ივანე ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტი

ზუსტ და საბუნებისმეტყველო მეცნიერებათა ფაკულტეტი

L^p სივრცეში დირიხლეს ინტეგრალების კრებადობის ზოგიერთი საკითხი

გამოყენებითი მათემატიკის სამაგისტრო პროგრამა

მაგისტრის აკადემიური ხარისხის მოსაპოვებლად

მათემატიკის დეპარტამენტი

მათემატიკური ანალიზის კათედრა

მაგისტრანტი - გიორგი მწყერაშვილი

ხელმძღვანელი - თეიმურაზ ახობაძე

ფიზიკა-მათემატიკის მეცნიერებათა დოქტორი

ასოცირებული პროფესორი

თბილისი 2022

სარჩევი

ანოტაცია

ნაშრომში განხილულია რ. ტაბერსკის [1, 2] მიერ შემოღებული დირიხლეს განზოგადოებული ინტეგრალების კრებადობის საკითხი $L^p(a,b)$ სივრცეში, ფუნქციათა გარკვეული E კლასისათვის. დირიხლეს განზოგადოებული ინტეგრალებისთვის დამტკიცებულია ა. ზახაროვის [3] თეორემის ანალოგი $L^p(a,b), p \geq 1$, სივრცეში.

Abstract

This study examines the convergence of Dirichlet's generalized integrals, first introduced by R. Taberski [1, 2], in the space $L^p(a,b)$, $p \geq 1$, for functions belonging to certain class E. For Dirichlet's generalized integrals, an analogue of A. Zakharov's [3] theorem is proved for $L^p(a,b)$, $p \geq 1$, space.

შესავალი

ტრიგონომეტრიულ მწკრივთა თეორიას ფართო გამოყენება აქვს როგორც მათემატიკის სხვადასხვა დარგში, ასევე სხვა მეცნიერებებში, მაგალითად ფიზიკაში, ინჟინერიაში და ა. შ. ფუნქციონალური ანალიზის მრავალი საბაზისო ცნება და ფუნქციათა თეორიაში მიღებული მთელი რიგი შედეგებისა ტრიგონომეტრიულ მწკრივთა თეორიიდან იღებს სათავეს.

ტრიგონომეტრიული მწკრივების შეჯამებადობის და წერტილოვნად კრებადობის საკითხებზე დღემდე მრავალი სტატია ქვეყნდება. შეიძლება ითქვას, რომ ეს საკითხები ღრმად შესწავლილი და გამოკვლეულია ფურიეს მწკრივებისათვის. შედარებით ბევრია საკვლევი დირიხლეს განზოგადებული ინტეგრალებისათვის.

რ. ტაბერსკიმ [2, 1] განიხილა ნამდვილი ცვლადის ლოკალურად ინტეგრებად ფუნქციათა E კლასი, რომელიც განსაზღვრულია შემდეგნაირად:

$$E=\left\{f(t)\colon \int_a^b f(t)dt<\infty, \qquad \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_T^{T+C} f(t)dt=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-T-c}^{-T} f(t)dt=0, \qquad a,b\in R, \qquad \forall c>0\right\}.$$

აღნიშნული კლასის ფუნქციებისთვის მან [1, 2] შეისწავლა ფურიეს ტრიგონომეტრიული მწკრივის თანაბრად კრებადობის, წერტილოვანი კრებადობისა და $(C,1)$ საშუალოებით შეჯამებადობის საკითხები.

ა. ზახაროვმა [3] განიხილა 2π-პერიოდული ფუნქციები, რომელთათვისაც აჩვენა შემდეგი თეორემის სამართლიანობა:

დავუშვათ მოცემული გვაქვს ფუნქცია $f(t)\in L(0,2\pi)$, რომლისთვისაც შესრულებულია შემდეგი პირობები:

$$\int_0^t \psi_{x,l}(u)du=o(t), \qquad (t\to+0),$$

$$\int_0^t \left|\psi_{x,l}(u)\right|du=O(t), \qquad (t\to+0),$$

$$\int_h^\delta \frac{\left|\psi_{x,l}(u+h)du-\psi_{x,l}(u)\right|}{u}=o(1), \qquad (h\to+0),$$

სადაც

$$\psi_{x,l}(u) = f(x+t) - f(x-t) - l.$$

მაშინ

$$\lim_{n\to\infty} \frac{S_n'(x;f)}{n} = \frac{l}{n}.$$

მოცემულ ნაშრომში გამოკვლეულია და დამტკიცებულია ა. ზახაროვის თეორემის [3] ანალოგი დირიხლეს განზოგადებული ინტეგრალებისთვის $L^p(a,b), p \geq 1,$ სივრცეში.

დამხმარე დებულებები

ლემა 1. (მინკოვსკის უტოლობა)[1]

თუ $p \geq 1$, $f_1, f_2 \in L^p(a,b)$, მაშინ

$$\left(\int_a^b |f_1(x)+f_2(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int_a^b |f_1(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_a^b |f_2(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}.$$

დამტკიცება.

ვთქვათ, $f_1(x) \in L^p(a,b)$ და $f_2(x) \in L^p(a,b)$. შევნიშნოთ, რომ, თუ $g(x) \in L^p(a,b)$, მაშინ $|g(x)|^{p-1} \in L^q(a,b)$, სადაც $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$. გვაქვს:

$$(|g(x)|^{p-1})^q = |g(x)|^{(p-1)\frac{p}{1-p}} = |g(x)|^p.$$

აქედან, ჰელდერის უტოლობის ძალით, მივიღებთ:

$$\int_a^b |f_1(x)+f_2(x)|^p dx \leq \int_a^b |f_1(x)+f_2(x)|^{p-1}|f_1(x)|dx + \int_a^b |f_1(x)+f_2(x)|^{p-1}|f_2(x)|dx$$

$$\leq \left(\int_a^b |f_1(x)+f_2(x)|^{(p-1)q} dx\right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_a^b |f_1(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$+ \left(\int_a^b |f_1(x)+f_2(x)|^{(p-1)q} dx\right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_a^b |f_2(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$= \left(\int_a^b |f_1(x)+f_2(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{q}} \left[\left(\int_a^b |f_1(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_a^b |f_2(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}\right].$$

თუ უტოლობის ორივე მხარეს გავყოფთ $\left(\int_a^b |f_1(x)+f_2(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}$-ზე, გვექნება:

[1] [4] გვერდი 21, §10.

$$\left(\int_a^b |f_1(x)+f_2(x)|^p dx\right)^{1-\frac{1}{q}} = \left(\int_a^b |f_1(x)+f_2(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \le \left(\int_a^b |f_1(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_a^b |f_2(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}.$$

ლემა 2. (მინკოვსკის განზოგადებული უტოლობა)[2]

$$\left(\int_a^b \left(\int_c^d |f(x,y)|dy\right)^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \le \int_c^d \left(\int_a^b |f(x,y)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} dy, \qquad 1\le p\le\infty, \qquad a<b, \qquad c<d.$$

დამტკიცება.

თუ $p=1$, მაშინ ლემა 2 ემთხვევა ფუბინის თეორემას.

ვთქვათ, $1<p\le\infty$ და $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$. გნვიხილოთ ასახვა:

$$\Lambda(\varphi)(g) \coloneqq \int_a^b |\varphi(x)||g(x)|dx, \qquad \varphi(x)\in L^p(a,b), \qquad g(x)\in L^q(a,b).$$

დავუშვათ $g\in L^q(a,b)$. ფუბინის თეორემისა და ჰელდერის უტოლობის ძალით, გვაქვს:

$$\Lambda\left(\int_c^d |f(x,y)|dy\right)(g) = \int_a^b \left(\int_c^d |f(x,y)|dy\right)|g(x)|dx = \int_c^d \left(\int_a^b |f(x,y)||g(x)|dx\right)dy$$

$$\le \|g(x)\|_{L^q(a,b)} \int_c^d \left(\int_a^b |f(x,y)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} dy, \qquad \forall g(x)\in L^q(a,b).$$

რადგან[3]

$$\|\Lambda\|_{\mathcal{L}(L^q(a,b);R)} = \sup_{\|g(x)\|_{L^q(a,b)}\neq 0} \frac{\int_a^b \left(\int_c^d |f(x,y)|dy\right)|g(x)|dx}{\|g(x)\|_{L^q(a,b)}} = \left\|\int_c^d |f(\cdot,y)|dy\right\|_{L^p(a,b)}$$

$$= \left(\int_a^b \left(\int_c^d |f(x,y)|dy\right)^p dx\right)^{\frac{1}{p}},$$

[2] [6] გვერდი 19, (9.12)

[3] [5] გვერდი 188, წინადადება 6.13

მიღებული უტოლობის ორივე მხარის $\|g(x)\|_{L^q(a,b)}$-ზე გაყოფით მივიღებთ დასამტკიცებელს.

ლემა 3.

$$sin\frac{\pi(l\pm x)}{2l}=cos\frac{\pi x}{2l}$$

და

$$sin\frac{\pi(-l\pm x)}{2l}=-cos\frac{\pi x}{2l}.$$

ეს ტოლობები ადვილი შესამოწმებელია.

ლემა 4.

$$sinx\geq\frac{2}{\pi}x,\qquad x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right].$$

დამტკიცება.

შევნიშნოთ, რომ

$$sinx=\frac{2x}{\pi}=0,\qquad x=0.$$

და

$$sinx=\frac{2x}{\pi}=1,\qquad x=\frac{\pi}{2}.$$

ამასთანავე, $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ შუალედში $sinx$ ამოზნექილი ფუნქციაა. ე. ი.

$$\sin x\geq\frac{(1-0)}{\left(\frac{\pi}{2}-0\right)}x=\frac{2}{\pi}x,\qquad \forall x_1,x_2\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right].$$

ლემა 5.

$$\left|\frac{1}{2sin\frac{\pi t}{2l}}-\frac{l}{\pi t}\right|\leq B,\qquad t\in[0,l].$$

დამტკიცება.

მოცემული სხვაობის მოდულის შემოსაზღვრულობა გამოკვლევას საჭიროებს 0-ის მიდამოში. $sin\frac{\pi t}{2l}$ ფუნქციის ტეილორის მწკრივის სახით წარმოდგენით, როდესაც $t_0 = 0$, გვაქვს:

$$sin\frac{\pi t}{2l} = sin\frac{\pi t_0}{2l} + \left(sin\frac{\pi t}{2l}\right)'_{t=t_0}\frac{(t-t_0)}{1!} + \left(sin\frac{\pi t}{2l}\right)''_{t=t_0}\frac{(t-t_0)^2}{2!} + \cdots = \frac{\pi}{2l}t + o(t^2).$$

ამის გათვალისწინებით და უკვე დამტკიცებული ლემა 4-ის გამოყენებით, გვაქვს:

$$\left|\frac{1}{2sin\frac{\pi t}{2l}} - \frac{l}{\pi t}\right| = \left|\frac{\pi t - 2lsin\frac{\pi t}{2l}}{2\pi t\ sin\frac{\pi t}{2l}}\right| = \left|\frac{\pi t - 2l\frac{\pi t}{2l} - o(t^2)}{2\pi t\ sin\frac{\pi t}{2l}}\right|$$

$$\leq \left|\frac{\pi t - 2l\frac{\pi t}{2l}}{2\pi t\ sin\frac{\pi t}{2l}}\right| + \left|\frac{o(t^2)}{2\pi t\ sin\frac{\pi t}{2l}}\right| \leq \left|\frac{o(t^2)}{2\pi t^2}\right| \to 0, \qquad t \to +0.$$

ლემა 6.

$$\left|\cos(2n+1)\frac{\pi t}{2l} - cos\frac{\pi n t}{l}\right| \leq \frac{2\pi t}{l}, \qquad t \in [0, l]\,.$$

დამტკიცება.

ტრიგონომეტრიული იგივეობის

$$cos\alpha - sin\beta = -2sin\frac{\alpha+\beta}{2}sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

და

$$sinx \leq x,\ \ x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$$

უტოლობის ძალით, გვაქვს:

$$\left|cos(2n+1)\frac{\pi t}{2l} - cos\frac{\pi n t}{l}\right| = \left|-2\,sin\left(\frac{\pi n t}{l} + \frac{\pi t}{2l}\right)sin\frac{\pi t}{4l}\right|$$

$$\leq \left|2sin\frac{\pi t}{4l}\right| \leq \left|\frac{\pi t}{2l}\right| \leq \left|\frac{2\pi t}{l}\right|.$$

ამოცანის დასმა

ვთქვათ, E არის ნებისმიერ სასრულ ინტერვალზე, ლებეგის აზრით ინტეგრებად ნამდვილ $f(t)$ ფუნქციათა კლასი ისეთი, რომ ყოველი ფიქსირებული $c > 0$-სთვის:

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{T}^{T+c}|f(t)|dt = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-T-c}^{-T}|f(t)|dt = 0.$$

მოცემული $f \in E$ ფუნქციისა და დადებითი l რიცხვისათვის, განვსაზღვროთ:

$$a_k = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(t)\cos\frac{k\pi t}{l}\,dt,$$

$$b_k = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(t)\, sin\frac{k\pi t}{l}\,dt,$$

$$S_n^l(x;f) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}\left(a_k\cos\frac{k\pi x}{l} + b_k\, sin\frac{k\pi x}{l}\right), \qquad x \in (-\infty,\infty), \qquad n = 0,1,2,\dots .$$

$S_n^l(x;f)$ შეიძლება წარმოვადგინოთ შემდეგი ფორმით:

$$S_n^l(x;f) = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(u)\mathrm{D}_n^l(u-x)\,du,$$

სადაც

$$D_n^l(t) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n}\cos\frac{k\pi t}{l} = \frac{\sin\,(2n+1)\,\frac{\pi t}{2l}}{2sin\,\frac{\pi t}{2l}}.$$

განვიხილოთ $S_n^l(x;f)$-ის წარმოებული:

$$\left(S_n^l(x;f)\right)' = S'_{l,n}(x;f) = \left(\ \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}(a_k\cos\frac{k\pi x}{l} + b_k\sin\frac{k\pi x}{l}\,)\right)'$$

$$= \frac{\pi}{l}\sum_{k=1}^{n} k\left(-a_k\, sin\frac{k\pi x}{l} + b_k\, cos\frac{k\pi x}{l}\right).$$

a_k-ს და b_k-ს მნიშვნელობების ამ ტოლობაში შეტანით, მივიღებთ:

$$S'_{l,n}(x;f) = \frac{\pi}{l}\sum_{k=1}^{n} k\left(-\frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(t)\cos\frac{k\pi t}{l}\ dt\sin\frac{k\pi x}{l} + \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(t)\sin\frac{k\pi t}{l}\ dt\,cos\frac{k\pi x}{l}\right)$$

$$= \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(t)\frac{\pi}{l}\sum_{k=1}^{n} k\left(sin\frac{k\pi t}{l}cos\frac{k\pi x}{l} - cos\frac{k\pi t}{l}\cdot sin\frac{k\pi x}{l}\right)dt$$

$$= \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(t)\frac{\pi}{l}\sum_{k=1}^{n} k\sin\frac{k\pi(t-x)}{l}dt.$$

თუ გავითვალისწინებთ, რომ

$$\left(D_n^l(t)\right)' = D'_{l,n}(t) = -\frac{\pi}{l}\sum_{k=1}^{n} k\sin\frac{k\pi t}{l},$$

გვექნება:

$$S'_{l,n}(x;f) = -\frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(t)D'_{l,n}(t-x)dt.$$

უკანასკნელ ტოლობაში $t - x = y$ ცვლადის გარდაქმნით, მივიღებთ:

$$S'_{l,n}(x;f) = -\frac{1}{l}\int_{-l-x}^{l-x} f(x+y)D'_{l,n}(y)dy = -\frac{1}{l}\int_{-l-x}^{l-x} f(x+t)D'_{l,n}(t)dt.$$

ამასთანავე, რადგან

$$D'_{l,n}(-t) = -\frac{\pi}{l}\sum_{k=1}^{n} k\,sin\frac{k\pi(-t)}{l} = \frac{\pi}{l}\sum_{k=1}^{n} k\,sin\frac{k\pi t}{l} = -D'_{l,n}(t)$$

კენტი ფუნქციაა, ამიტომ $t - x = -y$ ცვლადის გარდაქმნით, გვექნება:

$$S'_{l,n}(x;f) = -\frac{1}{l}\int_{l+x}^{-l+x} f(x-y)D'_{l,n}(-y)(-dy) = \frac{1}{l}\int_{-l+x}^{l+x} f(x-t)D'_{l,n}(t)dt.$$

აქედან:

$$S'_{l,n}(x;f)=\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{l}\int_{-l-x}^{l-x}f(x+t)D'_{l,n}(t)dt+\frac{1}{l}\int_{-l+x}^{l+x}f(x-t)D'_{l,n}(t)dt\right)$$

$$=-\frac{1}{2l}\int_{-l-x}^{-l+x}f(x+t)D'_{l,n}(t)dt-\frac{1}{2l}\int_{-l+x}^{l-x}f(x+t)D'_{l,n}(t)dt$$

$$+\frac{1}{2l}\int_{-l+x}^{l-x}f(x-t)D'_{l,n}(t)dt+\frac{1}{2l}\int_{l-x}^{l+x}f(x-t)D'_{l,n}(t)dt$$

$$=-\frac{1}{2l}\int_{-l+x}^{l-x}\big(f(x+t)-f(x-t)\big)D'_{l,n}(t)dt$$

$$-\frac{1}{2l}\int_{-l-x}^{-l+x}f(x+t)D'_{l,n}(t)dt+\frac{1}{2l}\int_{l-x}^{l+x}f(x-t)D'_{l,n}(t)dt.$$

შევნიშნოთ, რომ $t=-y$ ცვლადის გარდაქმნით, ვღებულობთ:

$$\frac{1}{2l}\int_{l-x}^{l+x}f(x-t)D'_{l,n}(t)dt=\frac{1}{2l}\int_{-l+x}^{-l-x}f(x+y)D'_{l,n}(-y)(-dy)$$

$$=-\frac{1}{2l}\int_{-l-x}^{-l+x}f(x+t)D'_{l,n}(t)(dt).$$

ამის გათვალისწინებით, გვაქვს:

$$S'_{l,n}(x;f)=-\frac{1}{2l}\int_{-l+x}^{l-x}\big(f(x+t)-f(x-t)\big)D'_{l,n}(t)dt-\frac{1}{l}\int_{-l-x}^{-l+x}f(x+t)D'_{l,n}(t)dt.$$

ამასთანავე,

$$-\frac{1}{2l}\int_{-l+x}^{l-x}\big(f(x+t)-f(x-t)\big)D'_{l,n}(t)dt=-\frac{1}{l}\int_{0}^{l-x}\big(f(x+t)-f(x-t)\big)D'_{l,n}(t)dt$$

$$=-\frac{1}{l}\int_{0}^{l}\big(f(x+t)-f(x-t)\big)D'_{l,n}(t)dt+\frac{1}{l}\int_{l-x}^{l}\big(f(x+t)-f(x-t)\big)D'_{l,n}(t)dt.$$

ე. ი. გვაქვს:

$$S'_{l,n}(x;f) = -\frac{1}{l}\int_0^l \big(f(x+t) - f(x-t)\big)D'_{l,n}(t)dt$$

$$+\frac{1}{l}\int_{l-x}^{l} \big(f(x+t) - f(x-t)\big)D'_{l,n}(t)dt - \frac{1}{l}\int_{-l-x}^{-l+x} f(x+t)D'_{l,n}(t)dt. \qquad (1)$$

შემოვიღოთ აღნიშვნები:

$$\frac{l}{n} = \eta, \qquad \psi_x(t) = f(x+t) - f(x-t) - f(x), \qquad \Phi_x(t) = \int_0^t |\psi_x(u)|du.$$

განვიხილოთ $\eta \cdot S'_{l,n}(x;f)$ ნამრავლი. (1) ტოლობიდან გვაქვს:

$$\eta \cdot S'_{l,n}(x;f) = -\int_0^l \{f(x+t) - f(x-t)\}\frac{D'_{l,n}(t)}{n}dt$$

$$+ \int_{l-x}^{l} \{f(x+t) - f(x-t)\}\frac{D'_{l,n}(t)}{n}dt - \int_{-l-x}^{-l+x} f(x+t)\frac{D'_{l,n}(t)}{n}dt. \qquad (1')$$

განვიხილოთ $\left\|\eta \cdot S'_{l,n}(x;f) - f(x)\right\|_{L^p_{[a,b]}}$. შევნიშნოთ, რომ

$$\int_0^l \frac{D'_{l,n}(t)}{n}dt = \frac{1}{n}\left\{\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} cos\frac{\pi kt}{l}\right\}\Bigg|_0^l = \frac{1}{n}\left\{\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} cos\pi k\right\} - \frac{1}{n}\left\{\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} 1\right\}$$

$$= \left\{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(-1)^k - 1\right\} = \left\{-1 - \frac{1-(-1)^n}{2n}\right\}.$$

ამის გათვალისწინებით, $(1')$ ტოლობიდან მივიღებთ:

$$\left\|\eta \cdot S'_{l,n}(x;f) - f(x)\right\|_{L^p_{[a,b]}}$$

$$= \left(\int_a^b \left| -\int_0^l \{f(x+t) - f(x-t)\}\frac{D'_{l,n}(t)}{n}dt - \int_{l-x}^{l} \{f(x+t) - f(x-t)\}\frac{D'_{l,n}(t)}{n}dt \right.\right.$$

$$\left.\left. - \int_{-l-x}^{-l+x} f(x+t)\frac{D'_{l,n}(t)}{n}dt + \left\{-1 - \frac{1-(-1)^n}{2n} + \frac{1-(-1)^n}{2n}\right\}f(x)\right|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} =$$

$$= \left(\int_a^b \left| - \int_0^l \psi_x(t) \frac{D'_{l,n}(t)}{n} dt - \int_{l-x}^{l} \{f(x+t) - f(x-t)\} \frac{D'_{l,n}(t)}{n} dt \right.\right.$$

$$\left.\left. - \int_{-l-x}^{-l+x} f(x+t) \frac{D'_{l,n}(t)}{n} dt + \left\{ \frac{1-(-1)^n}{2n} \right\} f(x) \right|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}. \qquad (2)$$

გამოვიკვლიოთ (2)-ის კრებადობა.

მიღებული შედეგი

ძირითადი თეორემა.

ვთქვათ, $f \in E$, (a,b) რაიმე სასრული შუალედია და შესრულებულია შემდეგი პირობები:

$$\|\Phi_x(\cdot)\|_{L^p(a,b)} = \left(\int_a^b \left|\int_0^t |\psi_x(u)|\, du\right|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} = o(t), \qquad t \to +0, \qquad t \to \infty, \tag{3}$$

$$\left\|\int_\eta^l \frac{|\psi_x(u+h) - \psi_x(u)|}{u} du\right\|_{L^p(a,b)} = \left(\int_a^b \left|\int_\eta^l \frac{|\psi_x(u+h) - \psi_x(u)|}{u} du\right|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} = o(1), \tag{4}$$

$$n \to \infty, \qquad l \to \infty, \qquad \frac{l}{n} \to 0$$

მაშინ

$$\left\|\eta \cdot S'_{l,n}(x;f) - f(x)\right\|_{L^p(a,b)} \longrightarrow 0,$$

$$p \geq 1, \qquad l \longrightarrow \infty, \qquad n \longrightarrow \infty, \qquad \frac{l}{n} \longrightarrow 0.$$

დამტკიცება.

მინკოვსკის უტოლობის ძალით, (2) ტოლობიდან მივიღებთ:

$$\begin{aligned}
&\left\|\eta \cdot S'_{l,n}(x;f) - f(x)\right\|_{L^p(a,b)} \\
&\leq \left(\int_a^b \left|-\int_0^l \psi_x(t) \frac{D'_{l,n}(t)}{n} dt\right|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \\
&+ \left(\int_a^b \left|-\int_{l-x}^l \{f(x+t) - f(x-t)\} \frac{D'_{l,n}(t)}{n} dt\right|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \\
&+ \left(\int_a^b \left|-\int_{-l-x}^{-l+x} f(x+t) \frac{D'_{l,n}(t)}{n} dt\right|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_a^b \left|\left\{\frac{1-(-1)^n}{2n}\right\} f(x)\right|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}.
\end{aligned} \tag{5}$$

მიღებული უტოლობის მარჯვენა მხარის ბოლო წევრისთვის, გვაქვს:

$$\left(\int_a^b \left|\left\{\frac{1-(-1)^n}{2n}\right\} f(x)\right|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \le \frac{1}{n}\left(\int_a^b |f(x)|^p\, dx\right)^{\frac{1}{p}} \le \frac{C}{n} \longrightarrow 0, \qquad n \to \infty.$$

ამის გათვალისწინებით (5) უტოლობაში მივიღებთ:

$$\begin{aligned}
&\left\|\eta \cdot S'_{l,n}(x;f) - f(x)\right\|_{L^p(a,b)} \\
&\le \left(\int_a^b \left| -\int_0^l \psi_x(t) \frac{D'_{l,n}(t)}{n} dt \right|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \\
&+ \left(\int_a^b \left| -\int_{l-x}^{l} \{f(x+t) - f(x-t)\} \frac{D'_{l,n}(t)}{n} dt \right|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \qquad (6) \\
&+ \left(\int_a^b \left| -\int_{-l-x}^{-l+x} f(x+t) \frac{D'_{l,n}(t)}{n} dt \right|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} + o(1) \\
&= \left\|M'_{l,n}(x)\right\|_{L^p(a,b)} + \left\|W'_{l,n}(x)\right\|_{L^p(a,b)} + \left\|P'_{l,n}(x)\right\|_{L^p(a,b)} + o(1), \\
&n \to \infty.
\end{aligned}$$

განვიხილოთ $\left\|W'_{l,n}(x)\right\|_{L^p(a,b)}$. შევნიშნოთ, რომ

$$\frac{D'_{l,n}(t)}{n} = \left(\frac{D_n^l(t)}{n}\right)' = \left(\frac{\sin(2n+1)\frac{\pi t}{2l}}{2n\, sin\frac{\pi t}{2l}}\right)' = \frac{\pi}{l}\left(\frac{\cos(2n+1)\frac{\pi t}{2l}}{2sin\frac{\pi t}{2l}} - \frac{sin\frac{n\pi t}{l}}{4\,n\sin^2\frac{\pi t}{2l}}\right), \qquad (7)$$

$$\left|\frac{D'_{l,n}(t)}{n}\right| = \frac{\pi}{l}\left(\left|\frac{\cos(2n+1)\frac{\pi t}{2l}}{2sin\frac{\pi t}{2l}} - \frac{sin\frac{n\pi t}{l}}{4\,n\sin^2\frac{\pi t}{2l}}\right|\right) \le \frac{\pi}{l}\left(\frac{1}{\left|2sin\frac{\pi t}{2l}\right|} + \frac{1}{4\,n\sin^2\frac{\pi t}{2l}}\right). \qquad (7')$$

თავდაპირველად დავუშვათ, $0 \le a \le x \le b < l$. მხედველობაში მივიღოთ $(7')$ უტოლობა და გავითვალისწინოთ, რომ $(0;l]$ შუალედზე $1/sin\frac{\pi t}{2l}$ და, შესაბამისად, $1/sin^2\frac{\pi t}{2l}$ კლებადი ფუნქციებია, გვაქვს:

$$\left\|W'_{l,n}(x)\right\|_{L^p(a,b)} = \left(\int_a^b \left| -\int_{l-x}^{l} \{f(x+t) - f(x-t)\} \frac{D'_{l,n}(t)}{n} dt \right|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \le$$

$$\leq \left(\int_a^b \left[\int_{l-x}^{l} |f(x+t) - f(x-t)| \left| \frac{D'_{l,n}(t)}{n} \right| dt \right]^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\leq \frac{\pi}{l} \left(\int_a^b \left\{ \frac{1}{2sin\frac{\pi(l-x)}{2l}} + \frac{1}{4\, n \sin^2 \frac{\pi(l-x)}{2l}} \right\}^p \left[\int_{l-x}^{l} |f(x+t) - f(x-t)| dt \right]^p dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

მხედველობაში მივიღოთ ლემა 3 და გავითვალისწინოთ, რომ $1/cos\frac{\pi x}{2l}$ და, შესაბამისად, $1/cos^2\frac{\pi x}{2l}$ ზრდადი ფუნქციებია $[0, l)$ შუალედზე. მინკოვსკის უტოლობის ძალით, მივიღებთ:

$$\left\| W'_{l,n}(x) \right\|_{L^p(a,b)} \leq \frac{\pi}{l} \left(\int_a^b \left\{ \frac{1}{2cos\frac{\pi x}{2l}} + \frac{1}{4\, n\, cos^2 \frac{\pi x}{2l}} \right\}^p \left[\int_{l-x}^{l} |f(x+t) - f(x-t)| dt \right]^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\leq \frac{\pi}{l} \left\{ \frac{1}{2cos\frac{\pi b}{2l}} + \frac{1}{4\, n\, cos^2 \frac{\pi b}{2l}} \right\} \left(\int_a^b \left[\int_{l-x}^{l} |f(x+t) - f(x-t)| dt \right]^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\leq \frac{\pi}{l} \left\{ \frac{1}{2cos\frac{\pi b}{2l}} + \frac{1}{4\, n\, cos^2 \frac{\pi b}{2l}} \right\} \left\{ \left(\int_a^b \left[\int_{l}^{l+x} |f(t)| dt \right]^p dx \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_a^b \left[\int_{-l+x}^{-l+2x} |f(t)| dt \right]^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \right\}$$

$$\leq \left\{ \frac{\pi}{2cos\frac{\pi b}{2l}} + \frac{\pi}{4\, n\, cos^2 \frac{\pi b}{2l}} \right\} \left\{ \left(\int_a^b \left[\frac{1}{l} \int_{l}^{l+b} |f(t)| dt \right]^p dx \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_a^b \left[\frac{1}{l} \int_{-l}^{-l+2b} |f(t)| dt \right]^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \right\}.$$

ვინაიდან $f(t) \in E$, ამიტომ

$$\lim_{l \to \infty} \frac{1}{l} \int_{l}^{l+b} |f(t)| dt = \lim_{l \to \infty} \frac{1}{l} \int_{-l}^{-l+2b} |f(t)| dt = 0.$$

გვექნება:

$$\left\|W'_{l,n}(x)\right\|_{L^p_{[a,b]}} \le \left\{\frac{\pi}{2cos\frac{\pi b}{2l}} + \frac{\pi}{4\,n\,cos^2\frac{\pi b}{2l}}\right\}\left\{\left(\int_a^b\left[\frac{1}{l}\int_l^{l+b}|f(t)|dt\right]^p dx\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_a^b\left[\frac{1}{l}\int_{-l}^{-l+2b}|f(t)|dt\right]^p dx\right)^{\frac{1}{p}}\right\}$$

$$\le \left\{\frac{\pi}{2cos\frac{\pi b}{2l}} + \frac{\pi}{4\,n\,cos^2\frac{\pi b}{2l}}\right\}2(b-a)^{\frac{1}{p}}\varepsilon_l = C_0\varepsilon_l \to 0, \qquad l\to\infty.$$

ახლა დავუშვათ, $-l < a \le x \le b \le 0$. იმის გათვალისწინებით, რომ $[l;2l)$ შუალედზე $1/sin\frac{\pi t}{2l}$ და, შესაბამისად, $1/sin^2\frac{\pi t}{2l}$ ზრდადი ფუნქციებია, გვაქვს:

$$\left\|W'_{l,n}(x)\right\|_{L^p(a,b)} = \left(\int_a^b\left|-\int_{l-x}^{l}\{f(x+t)-f(x-t)\}\frac{D'_{l,n}(t)}{n}dt\right|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\le \left(\int_a^b\left[\int_{l-x}^{l}|f(x+t)-f(x-t)|\left|\frac{D'_{l,n}(t)}{n}\right|dt\right]^p dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\le \frac{\pi}{l}\left(\int_a^b\left\{\frac{1}{2sin\frac{\pi(l-x)}{2l}} + \frac{1}{4\,n\,\sin^2\frac{\pi(l-x)}{2l}}\right\}^p\left[\int_{l-x}^{l}|f(x+t)-f(x-t)|dt\right]^p dx\right)^{\frac{1}{p}}.$$

მხედველობაში მივიღოთ ლემა 3 და გავითვალისწინოთ, რომ $(-l,0]$ შუალედზე $1/cos\frac{\pi x}{2l}$ და, შესაბამისად, $1/cos^2\frac{\pi x}{2l}$ კლებადი ფუნქციებია, მივიღებთ:

$$\left\|W'_{l,n}(x)\right\|_{L^p(a,b)} \le \frac{\pi}{l}\left(\int_a^b\left\{\frac{1}{2cos\frac{\pi x}{2l}} + \frac{1}{4\,n\,cos^2\frac{\pi x}{2l}}\right\}^p\left|\int_{l-x}^{l}|f(x+t)-f(x-t)|dt\right|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\le \frac{\pi}{l}\left\{\frac{1}{2cos\frac{\pi a}{2l}} + \frac{1}{4\,n\,cos^2\frac{\pi a}{2l}}\right\}\left(\int_a^b\left|\int_{l-x}^{l}|f(x+t)-f(x-t)|dt\right|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\le \frac{\pi}{l}\left\{\frac{1}{2cos\frac{\pi a}{2l}} + \frac{1}{4\,n\,cos^2\frac{\pi a}{2l}}\right\}\left\{\left(\int_a^b\left|\int_l^{l+x}|f(t)|dt\right|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_a^b\left|\int_{-l+x}^{-l+2x}|f(t)|dt\right|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}\right\}$$

$$\leq \left\{\frac{\pi}{2cos\frac{\pi a}{2l}}+\frac{\pi}{4\,n\,cos^2\frac{\pi a}{2l}}\right\}\left\{\left(\int_a^b\left|\frac{1}{l}\int_l^{l+a}|f(t)|dt\right|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\int_a^b\left|\frac{1}{l}\int_{-l}^{-l+2a}|f(t)|dt\right|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}\right\}.$$

ვინაიდან $f(t)\in E$, ამიტომ

$$\lim_{l\to\infty}\frac{1}{l}\int_l^{l+a}|f(t)|dt=\lim_{l\to\infty}\frac{1}{l}\int_{-l}^{-l+2a}|f(t)|dt=0.$$

გვაქვს:

$$\left\|W'_{l,n}(x)\right\|_{L^p(a,b)}\leq \left\{\frac{\pi}{2cos\frac{\pi a}{2l}}+\frac{\pi}{4\,n\,cos^2\frac{\pi a}{2l}}\right\}\left\{\left(\int_a^b\left|\frac{1}{l}\int_l^{l+a}|f(t)|dt\right|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\int_a^b\left|\frac{1}{l}\int_{-l}^{-l+2a}|f(t)|dt\right|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}\right\}$$

$$\leq \left\{\frac{\pi}{2cos\frac{\pi a}{2l}}+\frac{\pi}{4\,n\,cos^2\frac{\pi a}{2l}}\right\}2(b-a)^{\frac{1}{p}}\varepsilon_l=C'_0\varepsilon_l\to 0,\qquad l\to\infty.$$

მივიღეთ, რომ

$$\left\|W'_{l,n}(x)\right\|_{L^p(a,b)}\to 0,\qquad -l<a\leq x\leq b<l,\qquad l\to\infty.$$

(6) უტოლობაში ამის გათვალისწინებით, გვექნება:

$$\begin{aligned}&\left\|\eta\cdot S'_{l,n}(x;f)-f(x)\right\|_{L^p(a,b)}\\ &\leq\left(\int_a^b\left|-\int_0^l\psi_x(t)\frac{D'_{l,n}(t)}{n}dt\right|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}\\ &+\left(\int_a^b\left|-\int_{-l-x}^{-l+x}f(x+t)\frac{D'_{l,n}(t)}{n}dt\right|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}+o(1)\\ &=\left\|M'_{l,n}(x)\right\|_{L^p(a,b)}+\left\|P'_{l,n}(x)\right\|_{L^p(a,b)}+o(1),\qquad l\to\infty,\qquad n\to\infty.\end{aligned}\tag{8}$$

ახლა განვიხილოთ $\left\|P'_{l,n}(x)\right\|_{L^p(a,b)}$. კვლავ დავუშვათ, $0\leq a\leq x\leq b<l$. მინკოვსკის უტოლობის ძალით და იმის გათვალისწინებით, რომ $(-2l,-l]$ შუალედზე $1/\left|sin\frac{\pi t}{2l}\right|$ და, შესაბამისად, $1/\sin^2\frac{\pi t}{2l}$ კლებადი ფუნქციებია, ხოლო $[-l,0)$ შუალედზე - ზრდადი, გვაქვს:

$$\left\|P'_{l,n}(x)\right\|_{L^p(a,b)} = \left(\int_a^b \left| -\int_{-l-x}^{-l+x} f(x+t)\frac{D'_{l,n}(t)}{n}dt\right|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\leq \left(\int_a^b \left|\int_{-l-x}^{-l} f(x+t)\frac{D'_{l,n}(t)}{n}dt\right|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_a^b \left|\int_{-l}^{-l+x} f(x+t)\frac{D'_{l,n}(t)}{n}dt\right|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\leq \frac{\pi}{l}\left(\int_a^b \left\{\frac{1}{\left|2sin\frac{\pi(-l-x)}{2l}\right|} + \frac{1}{4\,n\sin^2\frac{\pi(-l-x)}{2l}}\right\}^p \left[\int_{-l-x}^{-l} |f(x+t)|dt\right]^p dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$+\frac{\pi}{l}\left(\int_a^b \left\{\frac{1}{\left|2sin\frac{\pi(-l+x)}{2l}\right|} + \frac{1}{4\,n\sin^2\frac{\pi(-l+x)}{2l}}\right\}^p \left[\int_{-l}^{-l+x} |f(x+t)|dt\right]^p dx\right)^{\frac{1}{p}}.$$

$x+t=u$ ცვლადის გარდაქმნით და ლემა 3-თან ერთად იმის გათვალისწინებით, რომ $[0,l)$ შუალედზე $1/\left|-cos\frac{\pi x}{2l}\right|$ და, შესაბამისად, $1/\cos^2\frac{\pi x}{2l}$ ზრდადი ფუნქციებია, მივიღებთ:

$$\left\|P'_{l,n}(x)\right\|_{L^p(a,b)} \leq \frac{\pi}{l}\left\{\frac{1}{\left|-2cos\frac{\pi b}{2l}\right|} + \frac{1}{4\,n\,cos^2\frac{\pi b}{2l}}\right\}\left(\int_a^b \left[\int_{-l}^{-l+x} |f(t)|dt\right]^p dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$+\frac{\pi}{l}\left\{\frac{1}{\left|-2cos\frac{\pi b}{2l}\right|} + \frac{1}{4\,n\,cos^2\frac{\pi b}{2l}}\right\}\left(\int_a^b \left[\int_{-l+x}^{-l+2x} |f(t)|dt\right]^p dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\leq \left\{\frac{\pi}{2cos\frac{\pi b}{2l}} + \frac{\pi}{4\,n\,cos^2\frac{\pi b}{2l}}\right\}\left(\int_a^b \left[\frac{1}{l}\int_{-l}^{-l+b} |f(t)|dt\right]^p dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$+\left\{\frac{\pi}{2cos\frac{\pi b}{2l}} + \frac{\pi}{4\,n\,cos^2\frac{\pi b}{2l}}\right\}\left(\int_a^b \left[\frac{1}{l}\int_{-l}^{-l+2b} |f(t)|dt\right]^p dx\right)^{\frac{1}{p}}.$$

ვინაიდან $f(t)\in E$, ამიტომ

$$\lim_{l\to\infty}\frac{1}{l}\int_{-l}^{-l+b}|f(t)|dt = \lim_{l\to\infty}\frac{1}{l}\int_{-l}^{-l+2b}|f(t)|dt = 0.$$

მივიღებთ:

$$\left\|P'_{l,n}(x)\right\|_{L^p(a,b)} \le \left\{\frac{\pi}{2cos\frac{\pi b}{2l}}+\frac{\pi}{4\,n\cos^2\frac{\pi b}{2l}}\right\}\left(\int_a^b\left[\frac{1}{l}\int_{-l}^{-l+b}|f(t)|dt\right]^p dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$+\left\{\frac{\pi}{2cos\frac{\pi b}{2l}}+\frac{\pi}{4\,n\,cos^2\frac{\pi b}{2l}}\right\}\left(\int_a^b\left[\frac{1}{l}\int_{-l}^{-l+2b}|f(t)|dt\right]^p dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\le\left\{\frac{\pi}{2cos\frac{\pi b}{2l}}+\frac{\pi}{4\,n\,cos^2\frac{\pi b}{2l}}\right\}(b-a)^{\frac{1}{p}}\varepsilon_l+\left\{\frac{\pi}{2cos\frac{\pi b}{2l}}+\frac{\pi}{4\,n\,cos^2\frac{\pi b}{2l}}\right\}(b-a)^{\frac{1}{p}}\varepsilon_l$$

$$\le C_1\varepsilon_l\to 0,\qquad l\to\infty.$$

ახლა დავუშვათ, $-l<a\le x\le b\le 0$. მინკოვსკის უტოლობის ძალით და იმის გათვალისწინებით, რომ $(-2l,-l]$ შუალედზე $1/\left|sin\frac{\pi t}{2l}\right|$ და, შესაბამისად, $1/\sin^2\frac{\pi t}{2l}$ კლებადი ფუნქციებია, ხოლო $[-l,0)$ შუალედზე - ზრდადი, გვაქვს:

$$\left\|P'_{l,n}(x)\right\|_{L^p(a,b)}\le\left(\int_a^b\left|-\int_{-l-x}^{-l}f(x+t)\frac{D'_{l,n}(t)}{n}dt\right|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\int_a^b\left|-\int_{-l}^{-l+x}f(x+t)\frac{D'_{l,n}(t)}{n}dt\right|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\le\frac{\pi}{l}\left(\int_a^b\left\{\frac{1}{\left|2sin\frac{\pi(-l-x)}{2l}\right|}+\frac{1}{4\,n\sin^2\frac{\pi(-l-x)}{2l}}\right\}^p\left|\int_{-l-x}^{-l}|f(x+t)|dt\right|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$+\frac{\pi}{l}\left(\int_a^b\left\{\frac{1}{\left|2sin\frac{\pi(-l+x)}{2l}\right|}+\frac{1}{4\,n\sin^2\frac{\pi(-l+x)}{2l}}\right\}^p\left|\int_{-l}^{-l+x}|f(x+t)|dt\right|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}.$$

$x+t=u$ ცვლადის გარდაქმნით და ლემა 3-თან ერთად იმის გათვალისწინებით, რომ $(-l,0]$ შუალედზე $1/\left|-cos\frac{\pi x}{2l}\right|$ და, შესაბამისად, $1/\cos^2\frac{\pi x}{2l}$ კლებადი ფუნქციებია, მივიღებთ:

$$\left\|P'_{l,n}(x)\right\|_{L^p(a,b)}\le\frac{\pi}{l}\left\{\frac{1}{\left|-2cos\frac{\pi a}{2l}\right|}+\frac{1}{4\,n\,cos^2\frac{\pi a}{2l}}\right\}\left(\int_a^b\left|\int_{-l}^{-l+x}|f(t)|dt\right|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}+$$

$$+\frac{\pi}{l}\left\{\frac{1}{\left|-2cos\frac{\pi a}{2l}\right|}+\frac{1}{4\,n\,cos^2\frac{\pi a}{2l}}\right\}\left(\int_a^b\left|\int_{-l+x}^{-l+2x}|f(t)|dt\right|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\leq\left\{\frac{\pi}{2cos\frac{\pi a}{2l}}+\frac{\pi}{4\,n\,cos^2\frac{\pi a}{2l}}\right\}\left(\int_a^b\left|\frac{1}{l}\int_{-l}^{-l+a}|f(t)|dt\right|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$+\left\{\frac{\pi}{2cos\frac{\pi a}{2l}}+\frac{\pi}{4\,n\,cos^2\frac{\pi a}{2l}}\right\}\left(\int_a^b\left|\frac{1}{l}\int_{-l}^{-l+2a}|f(t)|dt\right|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}.$$

ვინაიდან $f(t)\in E$, ამიტომ

$$\lim_{l\to\infty}\frac{1}{l}\int_{-l}^{-l+a}|f(t)|dt=\lim_{l\to\infty}\frac{1}{l}\int_{-l}^{-l+2a}|f(t)|dt=0.$$

მივიღებთ:

$$\left\|P'_{l,n}(x)\right\|_{L^p(a,b)}\leq\left\{\frac{\pi}{2cos\frac{\pi a}{2l}}+\frac{\pi}{4\,n\,cos^2\frac{\pi a}{2l}}\right\}\left(\int_a^b\left|\frac{1}{l}\int_{-l}^{-l+a}|f(t)|dt\right|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$+\left\{\frac{\pi}{2cos\frac{\pi a}{2l}}+\frac{\pi}{4\,n\,cos^2\frac{\pi a}{2l}}\right\}\left(\int_a^b\left|\frac{1}{l}\int_{-l}^{-l+2a}|f(t)|dt\right|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\leq\left\{\frac{\pi}{2cos\frac{\pi a}{2l}}+\frac{\pi}{4\,n\,cos^2\frac{\pi a}{2l}}\right\}(b-a)^{\frac{1}{p}}\varepsilon_l+\left\{\frac{\pi}{2cos\frac{\pi a}{2l}}+\frac{\pi}{4\,n\,cos^2\frac{\pi a}{2l}}\right\}(b-a)^{\frac{1}{p}}\varepsilon_l$$

$$\leq C'_1\varepsilon_l\to 0,\qquad l\to\infty.$$

ე. ი. მივიღეთ, რომ

$$\left\|P'_{l,n}(x)\right\|_{L^p(a,b)}\to 0,\qquad -l<a\leq x\leq b<l,\qquad l\to\infty.$$

(8) უტოლობაში ამის გათვალისწინებით, გვექნება:

$$\left\|\eta\cdot S'_{l,n}(x;f)-f(x)\right\|_{L^p_{(a,b)}}\leq\left(\int_a^b\left|-\int_0^l\psi_x(t)\frac{D'_{l,n}(t)}{n}dt\right|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}+o(1)= \qquad (9)$$

$$= \left\| M'_{l,n}(x) \right\|_{L^p(a,b)} + o(1), \qquad l \to \infty, \qquad n \to \infty.$$

ახლა განვიხილოთ $\left\| M'_{l,n}(x) \right\|_{L^p(a,b)}$. მინკოვსკის უტოლობის ძალით, გვაქვს:

$$\left\| M'_{l,n}(x) \right\|_{L^p(a,b)} \leq \left(\int_a^b \left| -\int_0^\eta \psi_x(t) \frac{D'_{l,n}(t)}{n} dt \right|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_a^b \left| -\int_\eta^l \psi_x(t) \frac{D'_{l,n}(t)}{n} dt \right|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\leq \left(\int_a^b \left[\int_0^\eta |\psi_x(t)| \left| \frac{D'_{l,n}(t)}{n} \right| dt \right]^p dx \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_a^b \left| -\int_\eta^l \psi_x(t) \frac{D'_{l,n}(t)}{n} dt \right|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

თუ გავითვალისწინებთ, რომ

$$\left| \frac{D'_{l,n}(t)}{n} \right| = \left| -\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{\pi k}{l} sin \frac{\pi k t}{l} \right| \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{\pi k}{l} \leq \frac{\pi n^2}{nl} \leq \frac{\pi n}{l},$$

მაშინ, მიღებული უტოლობის მარჯვენა მხარის პირველი წევრისთვის, (3) პირობის ძალით, გვექნება:

$$\left(\int_a^b \left[\int_0^\eta |\psi_x(t)| \left| \frac{D'_{l,n}(t)}{n} \right| dt \right]^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \leq \frac{\pi n}{l} \left(\int_a^b \left[\int_0^\eta |\psi_x(t)| dt \right]^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \leq \frac{\pi n}{l} \eta \varepsilon = \pi \varepsilon.$$

ε-ის ნებისმიერობის გამო ვასკვნით, რომ

$$\left(\int_a^b \left[\int_0^\eta |\psi_x(t)| \left| \frac{D'_{l,n}(t)}{n} \right| dt \right]^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \to 0, \qquad l \to \infty, \qquad n \to \infty, \qquad \frac{l}{n} \to 0.$$

(9) უტოლობაში ამის გათვალისწინებით, გვექნება:

$$\left\| \eta \cdot S'_{l,n}(x; f) - f(x) \right\|_{L^p(a,b)} \leq \left(\int_a^b \left| -\int_\eta^l \psi_x(t) \frac{D'_{l,n}(t)}{n} dt \right|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} + o(1), \tag{10}$$

$$l \to \infty, \qquad n \to \infty, \qquad \frac{l}{n} \to 0.$$

ახლა განვიხილოთ (10) უტოლობის მარჯვენა მხარის პირველი წევრი. გავითვალისწინოთ (7). კვლავ, მინკოვსკის უტოლობის ძალით, გვაქვს:

$$\left(\int_a^b \left|-\int_\eta^l \psi_x(t)\frac{D'_{l,n}(t)}{n}dt\right|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\int_a^b \left|-\frac{\pi}{l}\int_\eta^l \psi_x(t)\left(\frac{\cos(2n+1)\frac{\pi t}{2l}}{2sin\frac{\pi t}{2l}} - \frac{sin\frac{\pi nt}{l}}{4n\sin^2\frac{\pi t}{2l}}\right)dt\right|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\leq \left(\int_a^b \left|\frac{\pi}{l}\int_\eta^l \psi_x(t)\frac{\cos(2n+1)\frac{\pi t}{2l}}{2sin\frac{\pi t}{2l}}dt\right|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_a^b \left|\frac{\pi}{l}\int_\eta^l \psi_x(t)\frac{sin\frac{\pi nt}{l}}{4n\sin^2\frac{\pi t}{2l}}dt\right|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$= \|S_1\|_{L^p(a,b)} + \|S_2\|_{L^p(a,b)}.$$

$\|S_2\|_{L^p(a,b)}$ წევრისთვის, ნაწილობითი ინტეგრების გამოყენებით და, მინკოვსკის უტოლობისა და ლემა 3-ის ძალით, გვექნება:

$$\|S_2\|_{L^p(a,b)} = \left(\int_a^b \left|\frac{\pi}{l}\int_\eta^l \psi_x(t)\frac{sin\frac{\pi nt}{l}}{4n\sin^2\frac{\pi t}{2l}}dt\right|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int_a^b \left|\frac{\pi l}{4n}\int_\eta^l |\psi_x(t)|\frac{1}{t^2}dt\right|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$= \left(\int_a^b \left|\frac{\pi l}{4n}\frac{\Phi_x(t)}{t^2}\Big|_{t=\eta}^l + \frac{\pi l}{2n}\int_\eta^l \frac{\Phi_x(t)}{t^3}dt\right|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\leq \left(\int_a^b \left|\frac{\pi l}{4n}\frac{\Phi_x(t)}{t^2}\Big|_{t=\eta}^l\right|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_a^b \left|\frac{\pi l}{2n}\int_\eta^l \frac{\Phi_x(t)}{t^3}dt\right|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$= \|I_1\|_{L^p(a,b)} + \|I_2\|_{L^p(a,b)}.$$

აქედან, (3) პირობის ძალით, $\|I_1\|_{L^p(a,b)}$წევრისთვის მივიღებთ:

$$\|I_1\|_{L^p(a,b)} = \left(\int_a^b \left|\frac{\pi l}{4n}\frac{\Phi_x(l)}{l^2} - \frac{\pi l}{4n}\frac{\Phi_x(\eta)}{\eta^2}\right|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \leq \frac{\pi}{4nl}\left(\int_a^b |\Phi_x(l)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} + \frac{\pi l}{4n}\frac{1}{\eta^2}\left(\int_a^b |\Phi_x(\eta)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\leq \frac{\pi l\varepsilon}{4nl} + \frac{\pi l}{4n}\frac{\eta\varepsilon}{\eta^2} \leq \frac{\pi}{4n}\varepsilon + \frac{\pi}{4}\varepsilon.$$

ε-ის ნებისმიერობის გამო ვასკვნით, რომ

$$\|I_1\|_{L^p(a,b)} \to 0, \qquad l \to \infty, \qquad n \to \infty, \qquad \frac{l}{n} \to 0.$$

ამის გათვალისწინებით, (10) უტოლობაში გვექნება:

$$\left\|\eta \cdot S'_{l,n}(x;f) - f(x)\right\|_{L^p(a,b)}$$

$$\leq \left(\int_a^b \left|\frac{\pi}{l}\int_\eta^l \psi_x(t)\frac{\cos(2n+1)\frac{\pi t}{2l}}{2sin\frac{\pi t}{2l}}dt\right|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_a^b \left|\frac{\pi l}{2n}\int_\eta^l \frac{\Phi_x(t)}{t^3}dt\right|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} + o(1) \quad (11)$$

$$= \|S_1\|_{L^p(a,b)} + \|I_2\|_{L^p(a,b)} + o(1), \qquad l \to \infty, \qquad n \to \infty, \qquad \frac{l}{n} \to 0.$$

ახლა განვიხილოთ $\|I_2\|_{L^p(a,b)}$ წევრი. მინკოვსკის უტოლობის ძალით, მივიღებთ:

$$\|I_2\|_{L^p(a,b)} = \left(\int_a^b \left|\frac{\pi l}{2n}\int_\eta^l \frac{\Phi_x(t)}{t^3}dt\right|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \leq \frac{\pi l}{2n}\left(\int_a^b \left|\int_\eta^1 \frac{\Phi_x(t)}{t^3}dt\right|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} + \frac{\pi l}{2n}\left(\int_a^b \left|\int_1^l \frac{\Phi_x(t)}{t^3}dt\right|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$= \|K_1\|_{L^p(a,b)} + \|K_2\|_{L^p(a,b)}.$$

(3) პირობის ძალით, რადგან $\|\Phi_x(t)\|_{L^p(a,b)} = o(t)$, როცა $t \to +0$, არსებობს $\delta < 1$ ისეთი, რომ როცა $0 \leq t \leq \delta$, მაშინ $\|\Phi_x(t)\|_{L^p(a,b)} \leq \varepsilon t$. ამის გათვალისწინებითა და მინკოვსკის განზოგადებული უტოლობის ძალით, $\|K_1\|_{L^p(a,b)}$ წევრისთვის, მივიღებთ:

$$\|K_1\|_{L^p(a,b)} = \frac{\pi l}{2n}\left(\int_a^b \left|\int_\eta^1 \frac{\Phi_x(t)}{t^3}dt\right|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \leq \frac{\pi l}{2n}\left(\int_a^b \left|\int_\eta^\delta \frac{\Phi_x(t)}{t^3}dt\right|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} + \frac{\pi l}{2n}\left(\int_a^b \left|\int_\delta^1 \frac{\Phi_x(t)}{t^3}dt\right|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\leq \frac{\pi l}{2n}\int_\eta^\delta \left(\int_a^b \left|\frac{\Phi_x(t)}{t^3}\right|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} dt + \frac{\pi l}{2n\delta^3}\left(\int_a^b \left|\int_\delta^1 \Phi_x(t)\,dt\right|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\leq \frac{\pi l}{2n}\int_\eta^\delta \frac{1}{t^3}\left(\int_a^b |\Phi_x(t)|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}} dt + \frac{\pi l}{2n\delta^3}\left(\int_a^b \left|\int_\delta^1 \Phi_x(t)\,dt\right|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\leq \frac{\pi l\varepsilon}{2n}\int_\eta^\delta \frac{1}{t^2}dt + \frac{\pi l}{2n\delta^3}\left(\int_a^b \left|\int_\delta^1 \Phi_x(t)\,dt\right|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$= \frac{\pi l\varepsilon}{2n}\left(\frac{1}{\eta} - \frac{1}{\delta}\right) + \frac{\pi l}{2n\delta^3}\left(\int_a^b \left|\int_\delta^1 \Phi_x(t)\,dt\right|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \leq \frac{\pi}{2}\varepsilon + \frac{\pi l}{2n\delta^3}\left(\int_a^b \left|\int_\delta^1 \Phi_x(t)\,dt\right|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}.$$

ახლა, რადგან

$$\left(\int_a^b \left|\int_\delta^1 \Phi_x(t)\,dt\right|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\int_a^b \left|\int_\delta^1 \int_0^t |\psi_x(u)| du\, dt\right|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \le \left(\int_a^b \left|\int_\delta^1 \int_0^1 |\psi_x(u)| du\, dt\right|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\le \left(\int_a^b \left|(1-\delta)\int_0^1 |\psi_x(u)| du\right|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \le \left(\int_a^b \left|\int_0^1 |\psi_x(u)| du\right|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\le \left(\int_a^b \left|\int_0^1 |f(x+u)| du\right|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_a^b \left|\int_0^1 |f(x-u)| du\right|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$+ \left(\int_a^b \left|\int_0^1 |f(x)| du\right|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$= \left(\int_a^b \left|\int_x^{x+1} |f(u)| du\right|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_a^b \left|\int_{x-1}^{x} |f(u)| du\right|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_a^b |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\le \left(\int_a^b \left|\int_a^{b+1} |f(u)| du\right|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_a^b \left|\int_{a-1}^{b} |f(u)| du\right|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_a^b |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\le (C_2' + C_2'' + C)(b-a)^{\frac{1}{p}} \le C_2,$$

მივიღებთ:

$$\|K_1\|_{L^p(a,b)} \le \frac{\pi}{2}\varepsilon + \frac{l}{n}\frac{\pi C_2}{2\delta^3}.$$

ε-ის ნებისმიერობის გამო ვასკვნით, რომ

$$\|K_1\|_{L^p(a,b)} \to 0, \qquad l \to \infty, \qquad n \to \infty, \qquad \frac{l}{n} \to 0.$$

კვლავ გამოვიყენოთ (3) პირობა. რადგან $\|\Phi_x(t)\|_{L^p(a,b)} = o(t)$, როცა $t \to +\infty$, არსებობს $s > 1$ ისეთი, რომ როცა $s \le t \le l$, მაშინ $\|\Phi_x(t)\|_{L^p(a,b)} \le \varepsilon t$. ამის გათვალისწინებით და მინკოვსკის განზოგადებული უტოლობის ძალით, გვაქვს:

$$\|K_2\|_{L^p(a,b)} = \frac{\pi l}{2n}\left(\int_a^b\left[\int_1^l \frac{\Phi_x(t)}{t^3}dt\right]^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \le \frac{\pi l}{2n}\left(\int_a^b\left[\int_1^s \frac{\Phi_x(t)}{t^3}dt\right]^p dx\right)^{\frac{1}{p}} + \frac{\pi l}{2n}\left(\int_a^b\left[\int_s^l \frac{\Phi_x(t)}{t^3}dt\right]^p dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\le \frac{\pi l}{2n}\left(\int_a^b\left[\int_1^s \Phi_x(t)\,dt\right]^p dx\right)^{\frac{1}{p}} + \frac{\pi l}{2n}\int_s^l\left(\int_a^b\left[\frac{\Phi_x(t)}{t^3}\right]^p dx\right)^{\frac{1}{p}} dt$$

$$\le \frac{\pi l}{2n}\left(\int_a^b\left[\int_1^s\int_0^t |\psi_x(u)|du\,dt\right]^p dx\right)^{\frac{1}{p}} + \frac{\pi l}{2n}\int_s^l \frac{1}{t^3}\left(\int_a^b[\Phi_x(t)]^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}} dt$$

$$\le \frac{\pi l(s-1)}{2n}\left(\int_a^b\left[\int_0^s |\psi_x(u)|du\right]^p dx\right)^{\frac{1}{p}} + \frac{\pi l\varepsilon}{2n}\int_s^l \frac{1}{t^2}dt$$

$$\le \frac{\pi ls}{2n}\left(\int_a^b\left[\int_0^s |f(x+u)|du\right]^p dx\right)^{\frac{1}{p}} + \frac{\pi ls}{2n}\left(\int_a^b\left[\int_0^s |f(x-u)|du\right]^p dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$+ \frac{\pi ls}{2n}\left(\int_a^b\left[\int_0^s |f(x)|du\right]^p dx\right)^{\frac{1}{p}} + \frac{\pi l\varepsilon}{2n}\left(\frac{1}{s}-\frac{1}{l}\right)$$

$$\le \frac{\pi ls}{2n}\left(\int_a^b\left[\int_x^{x+s} |f(u)|du\right]^p dx\right)^{\frac{1}{p}} + \frac{\pi ls}{2n}\left(\int_a^b\left[\int_{x-s}^x |f(u)|du\right]^p dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$+ \frac{\pi ls^2}{2n}\left(\int_a^b |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} + \frac{\pi l\varepsilon}{2ns}$$

$$\le \frac{\pi ls}{2n}\left(\int_a^b\left[\int_a^{b+s} |f(u)|du\right]^p dx\right)^{\frac{1}{p}} + \frac{\pi ls}{2n}\left(\int_a^b\left[\int_{a-s}^b |f(u)|du\right]^p dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$+ \frac{\pi ls^2}{2n}\left(\int_a^b |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} + \frac{\pi l\varepsilon}{2ns} \le \frac{l}{n}\frac{\pi sC_3'}{2} + \frac{l}{n}\frac{\pi sC_3''}{2} + \frac{l}{n}\frac{\pi s^2C}{2} + \frac{l}{n}\frac{\pi}{2s}\varepsilon \to 0,$$

$$l \to \infty, \qquad n \to \infty, \qquad \frac{l}{n} \to 0.$$

(11) უტოლობაში ამის გათვალისწინებით, გვექნება:

$$\left\|\eta\cdot S'_{l,n}(x;f)-f(x)\right\|_{L^p(a,b)}\le\left(\int\limits_a^b\left|\frac{\pi}{l}\int\limits_\eta^l\psi_x(t)\frac{\cos(2n+1)\frac{\pi t}{2l}}{2sin\frac{\pi t}{2l}}dt\right|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}+o(1) \tag{12}$$
$$=\|S_1\|_{L^p(a,b)}+o(1),\qquad l\to\infty,\qquad n\to\infty,\qquad \frac{l}{n}\to 0.$$

ახლა განვიხილოთ $\|S_1\|_{L^p(a,b)}$. მინკოვსკის უტოლობის ძალით, გვაქვს:

$$\|S_1\|_{L^p(a,b)}=\left(\int\limits_a^b\left|\frac{\pi}{l}\int\limits_\eta^l\psi_x(t)\frac{\cos(2n+1)\frac{\pi t}{2l}}{2sin\frac{\pi t}{2l}}dt\right|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}$$
$$=\left(\int\limits_a^b\left|\frac{\pi}{l}\int\limits_\eta^l\psi_x(t)\left(\frac{\cos(2n+1)\frac{\pi t}{2l}}{2sin\frac{\pi t}{2l}}+\frac{l}{\pi}\frac{\cos(2n+1)\frac{\pi t}{2l}}{t}-\frac{l}{\pi}\frac{\cos(2n+1)\frac{\pi t}{2l}}{t}\right)dt\right|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}$$
$$\le\left(\int\limits_a^b\left|\int\limits_\eta^l\psi_x(t)\frac{\cos(2n+1)\frac{\pi t}{2l}}{t}dt\right|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\int\limits_a^b\left[\frac{\pi}{l}\int\limits_\eta^l|\psi_x(t)|\left|\frac{1}{2sin\frac{\pi t}{2l}}-\frac{l}{\pi t}\right|dt\right]^p dx\right)^{\frac{1}{p}}$$
$$=\|T_1\|_{L^p(a,b)}+\|T_2\|_{L^p(a,b)}.$$

ლემა 5-ისა და (3) პირობის ძალით, გვაქვს:

$$\|T_2\|_{L^p(a,b)}=\left(\int\limits_a^b\left|\frac{\pi}{l}\int\limits_\eta^l|\psi_x(t)|\left|\frac{1}{2sin\frac{\pi t}{2l}}-\frac{l}{\pi t}\right|dt\right|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}\le\frac{\pi B}{l}\left(\int\limits_a^b\left[\int\limits_0^l|\psi_x(t)|dt\right]^p dx\right)^{\frac{1}{p}}\le\pi B\varepsilon,$$
$$l\to\infty.$$

ε-ის ნებისმიერობის გამო, ვღებულობთ:

$$\|T_2\|_{L^p(a,b)}\to 0,\qquad l\to\infty.$$

(12) უტოლობაში ამის გათვალისწინებით, გვექნება:

$$\left\|\eta\cdot S'_{l,n}(x;f)-f(x)\right\|_{L^p(a,b)}\le\left(\int\limits_a^b\left|\int\limits_\eta^l\psi_x(t)\frac{\cos(2n+1)\frac{\pi t}{2l}}{t}dt\right|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}+o(1) \tag{13}$$
$$=\|T_1\|_{L^p(a,b)}+o(1),\qquad l\to\infty,\qquad n\to\infty,\qquad \frac{l}{n}\to 0.$$

ახლა, $\|T_1\|_{L^p(a,b)}$ წევრისთვის ლემა 6-ისა და მინკოვსკის უტოლობის ძალით გვექნება:

$$\|T_1\|_{L^p(a,b)} = \left(\int_a^b \left|\int_\eta^l \psi_x(t)\frac{\cos(2n+1)\frac{\pi t}{2l}}{t}dt\right|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$= \left(\int_a^b \left|\int_\eta^l \psi_x(t)\left(\frac{\cos(2n+1)\frac{\pi t}{2l}}{t} + \frac{cos\frac{\pi nt}{l}}{t} - \frac{cos\frac{\pi nt}{l}}{t}\right)dt\right|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\leq \left(\int_a^b \left|\int_\eta^l \frac{\psi_x(t)}{t}\left(\cos(2n+1)\frac{\pi t}{2l} - cos\frac{\pi nt}{l}\right)dt\right|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_a^b \left|\int_\eta^l \psi_x(t)\frac{cos\frac{\pi nt}{l}}{t}dt\right|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\leq \frac{2\pi}{l}\left(\int_a^b \left[\int_0^l |\psi_x(t)|dt\right]^p dx\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_a^b \left|\int_\eta^l \psi_x(t)\frac{cos\frac{\pi nt}{l}}{t}dt\right|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\leq 2\pi\varepsilon + \left(\int_a^b \left|\int_\eta^l \psi_x(t)\frac{cos\frac{\pi nt}{l}}{t}dt\right|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}, \qquad l \to \infty.$$

შევნიშნოთ, რომ $\int_\eta^l \psi_x(t)\frac{cos\frac{\pi nt}{l}}{t}dt$ გამოსახულებაში $t = y + \eta$ ცვლადის გარდაქმნით, ვღებულობთ:

$$\int_\eta^l \psi_x(t)\frac{cos\frac{\pi nt}{l}}{t}dt = \int_0^{l-\eta} \psi_x(t+\eta)\frac{cos\frac{\pi n(t+\eta)}{l}}{t+\eta}dt = -\int_0^{l-\eta} \psi_x(t+\eta)\frac{cos\frac{\pi nt}{l}}{t+\eta}dt.$$

ამის გათვალისწინებით და მინკოვსკის უტოლობის გამოყენებით, გვექნება:

$$\left(\int_a^b \left|\int_\eta^l \psi_x(t)\frac{cos\frac{\pi nt}{l}}{t}dt\right|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\int_a^b \left|-\frac{1}{2}\int_0^{l-\eta} \psi_x(t+\eta)\frac{cos\frac{\pi nt}{l}}{t+\eta}dt + \frac{1}{2}\int_\eta^l \psi_x(t)\frac{cos\frac{\pi nt}{l}}{t}dt\right|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\leq \left(\int_a^b \left|-\frac{1}{2}\int_\eta^l \left(\frac{\psi_x(t+\eta)}{t+\eta} - \frac{\psi_x(t)}{t}\right)cos\frac{\pi nt}{l}dt\right|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$+ \left(\int_a^b \left|\frac{1}{2}\int_0^\eta \psi_x(t+\eta)\frac{cos\frac{\pi nt}{l}}{t+\eta}dt\right|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_a^b \left|\frac{1}{2}\int_{l-\eta}^l \psi_x(t+\eta)\frac{cos\frac{\pi nt}{l}}{t+\eta}dt\right|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}.$$

ახლა, (3) პირობის ძალით

$$\left(\int_a^b\left|\frac{1}{2}\int_0^{\eta}\psi_x(t+\eta)\frac{cos\frac{\pi nt}{l}}{t+\eta}dt\right|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}=\left(\int_a^b\left|\frac{1}{2}\int_0^{\eta}\psi_x(t+\eta)\frac{cos\frac{\pi n(t+\eta)}{l}}{t+\eta}dt\right|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\leq\frac{1}{2}\left(\int_a^b\left[\int_{\eta}^{2\eta}|\psi_x(t)|\frac{1}{t}dt\right]^p dx\right)^{\frac{1}{p}}\leq\frac{1}{2\eta}\left(\int_a^b\left[\int_0^{2\eta}|\psi_x(t)|dt\right]^p dx\right)^{\frac{1}{p}}\leq\varepsilon,$$

$$l\to\infty,\qquad n\to\infty,\qquad \frac{l}{n}\to 0.$$

ამასთანავე,

$$\left(\int_a^b\left|\frac{1}{2}\int_{l-\eta}^{l}\psi_x(t+\eta)\frac{cos\frac{\pi nt}{l}}{t+\eta}dt\right|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}=\left(\int_a^b\left|\frac{1}{2}\int_{l-\eta}^{l}\psi_x(t+\eta)\frac{cos\frac{\pi n(t+\eta)}{l}}{t+\eta}dt\right|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$=\left(\int_a^b\left|\frac{1}{2}\int_l^{l+\eta}\psi_x(t)\frac{cos\frac{\pi n(t)}{l}}{t}dt\right|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}\leq\frac{1}{2}\left(\int_a^b\left|\int_l^{l+\eta}|\psi_x(t)|\frac{1}{t}dt\right|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\leq\frac{1}{2l}\left(\int_a^b\left|\int_l^{l+\eta}|\psi_x(t)|dt\right|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}\leq\frac{1}{2l}\left(\int_a^b\left|\int_0^{l+\eta}|\psi_x(t)|dt\right|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\leq\frac{(l+\eta)}{2l}\varepsilon=\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2n},\qquad l\to\infty.$$

ამის გათვალისწინებით, (13) უტოლობაში გვექნება:

$$\left\|\eta\cdot S'_{l,n}(x;f)-f(x)\right\|_{L^p(a,b)}$$

$$\leq\left(\int_a^b\left|-\frac{1}{2}\int_{\eta}^{l}\left(\frac{\psi_x(t+\eta)}{t+\eta}-\frac{\psi_x(t)}{t}\right)cos\frac{\pi nt}{l}dt\right|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}+o(1),\tag{14}$$

$$l\to\infty,\qquad n\to\infty,\qquad \frac{l}{n}\to 0.$$

განვიხილოთ (14) უტოლობის მარჯვენა მხარის პირველი წევრი. მინკოვსკის უტოლობის ძალით, გვაქვს:

$$\left(\int_a^b \left|-\frac{1}{2}\int_\eta^l \left(\frac{\psi_x(t+\eta)}{t+\eta}-\frac{\psi_x(t)}{t}\right)\cos\frac{\pi nt}{l}dt\right|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$=\left(\int_a^b \left|\frac{1}{2}\int_\eta^l \left(\frac{\psi_x(t+\eta)}{t+\eta}+\frac{\psi_x(t+\eta)}{t}-\frac{\psi_x(t+\eta)}{t}-\frac{\psi_x(t)}{t}\right)\cos\frac{\pi nt}{l}dt\right|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\leq\left(\int_a^b \left|\frac{1}{2}\int_\eta^l \left(\frac{\psi_x(t+\eta)}{t+\eta}-\frac{\psi_x(t+\eta)}{t}\right)\cos\frac{\pi nt}{l}dt\right|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$+\left(\int_a^b \left|\frac{1}{2}\int_\eta^l \left(\frac{\psi_x(t+\eta)}{t}-\frac{\psi_x(t)}{t}\right)\cos\frac{\pi nt}{l}dt\right|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}.$$

მიღებული უტოლობის მარჯვენა მხარის პირველი წევრისთვის, ნაწილობითი ინტეგრების გამოყენებითა და მინკოვსკის უტოლობის ძალით, გვაქვს:

$$\left(\int_a^b \left|\frac{1}{2}\int_\eta^l \left(\frac{\psi_x(t+\eta)}{t+\eta}-\frac{\psi_x(t+\eta)}{t}\right)\cos\frac{\pi nt}{l}dt\right|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}\leq\left(\int_a^b \left[\frac{1}{2}\eta\int_\eta^l \frac{|\psi_x(t+\eta)|}{t(t+\eta)}dt\right]^p dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\leq\left(\int_a^b \left[\frac{l}{2n}\int_\eta^l \frac{|\psi_x(t+\eta)|}{t^2}dt\right]^p dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$=\left(\int_a^b \left[\frac{l}{2n}\frac{\Phi_x(t+\eta)}{t^2}\Big|_\eta^l+\frac{l}{n}\int_\eta^l \frac{\Phi_x(t+\eta)}{t^3}dt\right]^p dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$=\left(\int_a^b \left[\left(\frac{l}{2n}\frac{\Phi_x(l+\eta)}{l^2}-\frac{1}{2n}\frac{\Phi_x(2\eta)}{\eta^2}\right)+\frac{l}{n}\int_\eta^l \frac{\Phi_x(t+\eta)}{t^3}dt\right]^p dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\leq\left(\int_a^b \left|\frac{l}{2n}\frac{\Phi_x(l+\eta)}{l^2}-\frac{l}{2n}\frac{\Phi_x(2\eta)}{\eta^2}\right|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\int_a^b \left|\frac{l}{n}\int_\eta^l \frac{\Phi_x(t+\eta)}{t^3}dt\right|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}.$$

აქედან

$$\left(\int_a^b \left|\frac{l}{2n}\frac{\Phi_x(l+\eta)}{l^2}-\frac{1}{2n}\frac{\Phi_x(2\eta)}{\eta^2}\right|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \le \frac{1}{2nl}\left(\int_a^b |\Phi_x(l+\eta)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} + \frac{l}{2n\eta^2}\left(\int_a^b |\Phi_x(2\eta)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\le \frac{\varepsilon}{2nl}(l+\eta)+\frac{\varepsilon}{2nl}2\eta = \frac{\varepsilon}{2n}+\frac{\varepsilon}{2n^2}+\frac{\varepsilon}{n^2} \to 0,$$

$$l \to \infty, \qquad n \to \infty, \qquad \frac{l}{n} \to 0.$$

ამასთანავე,

$$\left(\int_a^b \left|\frac{l}{n}\int_\eta^l \frac{\Phi_x(t+\eta)}{t^3}\,dt\right|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\int_a^b \left[\frac{l}{n}\int_\eta^l \frac{1}{t^3}\left(\int_0^{t+\eta} |\psi_x(u)|\,du\right)dt\right]^p dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\le \left(\int_a^b \left[\frac{l}{n}\int_\eta^1 \frac{1}{t^3}\left(\int_0^{t+\eta} |\psi_x(u)|\,du\right)dt\right]^p dx\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_a^b \left[\frac{l}{n}\int_1^l \frac{1}{t^3}\left(\int_0^{t+\eta} |\psi_x(u)|\,du\right)dt\right]^p dx\right)^{\frac{1}{p}}.$$

უკანასკნელი უტოლობის პირველი წევრისთვის, (3) პირობისა და მინკოვსკის უტოლობის ძალით, გვაქვს:

$$\left(\frac{l}{n}\int_a^b \left[\int_\eta^1 \frac{1}{t^3}\Phi_x(t+\eta)\,dt\right]^p dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\le \frac{l}{n}\left(\int_a^b \left[\int_\eta^\delta \frac{1}{t^3}\Phi_x(t+\eta)\,dt\right]^p dx\right)^{\frac{1}{p}} + \frac{l}{n}\left(\int_a^b \left[\int_\delta^1 \frac{1}{t^3}\Phi_x(t+\eta)\,dt\right]^p dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\le \frac{l}{n}\int_\eta^\delta \left[\int_a^b \left|\frac{1}{t^3}\Phi_x(t+\eta)\right|^p dx\right]^{\frac{1}{p}} dt + \frac{l}{n\delta^3}\left(\int_a^b \left[\int_\delta^1 \Phi_x(t+\eta)\,dt\right]^p dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\le \frac{l}{n}\int_\eta^\delta \frac{1}{t^3}\left[\int_a^b |\Phi_x(t+\eta)|^p\,dx\right]^{\frac{1}{p}} dt + \frac{l}{n\delta^3}\left(\int_a^b \left[\int_\delta^1 \Phi_x(t+\eta)\,dt\right]^p dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\le \frac{\varepsilon l}{n}\int_\eta^\delta \frac{1}{t^2}\,dt + \frac{\varepsilon l\eta}{n}\int_\eta^\delta \frac{1}{t^3}\,dt + \frac{l}{n\delta^3}\left(\int_a^b \left[\int_\delta^1 \Phi_x(t+\eta)\,dt\right]^p dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\le \frac{\varepsilon l}{n}\left(\frac{1}{\eta}-\frac{1}{\delta}\right) + \frac{\varepsilon l\eta}{n}\left(\frac{1}{2\eta^2}-\frac{1}{2\delta^2}\right) + \frac{l}{n\delta^3}\left(\int_a^b \left[\int_\delta^1 \Phi_x(t+\eta)\,dt\right]^p dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\leq \varepsilon + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{l}{n\delta^3}\left(\int_a^b \left[\int_\delta^1 \Phi_x(t+\eta)\,dt\right]^p dx\right)^{\frac{1}{p}}, \qquad l \to \infty, \qquad n \to \infty, \qquad \frac{l}{n} \to 0.$$

ახლა, რადგან

$$\left(\int_a^b \left[\int_\delta^1 \Phi_x(t+\eta)\,dt\right]^p dx\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\int_a^b \left[\int_\delta^1 \int_0^{t+\eta} |\psi_x(u)|du\,dt\right]^p dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\leq \left(\int_a^b \left[\int_0^{1+\eta} |f(x+u)|du\right]^p dx\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_a^b \left[\int_0^{1+\eta} |f(x-u)|du\right]^p dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$+ \left(\int_a^b \left[\int_0^{1+\eta} |f(x)|du\right]^p dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\leq \left(\int_a^b \left[\int_x^{x+(1+\eta)} |f(t)|dt\right]^p dx\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_a^b \left[\int_{x-(1+\eta)}^{x} |f(t)|dt\right]^p dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$+ (1+\eta)\left(\int_a^b |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\leq \left(\int_a^b \left[\int_a^{b+(1+\eta)} |f(t)|dt\right]^p dx\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_a^b \left[\int_{a-(1+\eta)}^{b} |f(t)|dt\right]^p dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$+ (1+\eta)\left(\int_a^b |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \leq (b-a)^{\frac{1}{p}}(C_4' + C_4'') + (1+\eta)C \leq C_4,$$

$$l \to \infty, \qquad n \to \infty, \qquad \frac{l}{n} \to 0.$$

მივიღებთ:

$$\frac{l}{n}\left(\int_a^b \left[\int_\eta^1 \frac{1}{t^3}\Phi_x(t+\eta)\,dt\right]^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \leq 2\varepsilon + \frac{l}{n}\frac{C_4}{\delta^3} = o(1), \qquad l \to \infty, \qquad n \to \infty, \qquad \frac{l}{n} \to 0.$$

(14) უტოლობაში ამის გათვალისწინებით, გვექნება:

$$
\begin{aligned}
&\left\|\eta\cdot S'_{l,n}(x;f)-f(x)\right\|_{L^p(a,b)}\\
&\qquad\le\left(\int_a^b\left|\frac{1}{2}\int_\eta^l\left(\frac{\psi_x(t+\eta)}{t}-\frac{\psi_x(t)}{t}\right)cos\frac{\pi nt}{l}dt\right|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}\\
&\qquad+\left(\int_a^b\left[\frac{l}{n}\int_1^l\frac{1}{t^3}\left(\int_0^{t+\eta}|\psi_x(u)|\,du\right)dt\right]^p dx\right)^{\frac{1}{p}}+o(1),\\
&\qquad l\to\infty,\qquad n\to\infty,\qquad \frac{l}{n}\to 0.
\end{aligned}
\tag{15}
$$

ახლა, რადგან (3) პირობის ძალით $\|\Phi_x(t)\|_{L^p(a,b)}=o(t)$, როცა $t\to\infty$, არსებობს $s>1$ ისეთი, რომ $\|\Phi_x(t)\|_{L^p(a,b)}\le\varepsilon t$, როცა $s\le t\le l$. ამის გათვალისწინებით და მინკოვსკის განზოგადებული უტოლობის ძალით, გვაქვს:

$$
\begin{aligned}
&\left(\int_a^b\left[\frac{l}{n}\int_1^l\frac{1}{t^3}\left(\int_0^{t+\eta}|\psi_x(u)|\,du\right)dt\right]^p dx\right)^{\frac{1}{p}}\\
&=\frac{l}{n}\left(\int_a^b\left[\int_1^s\frac{\Phi_x(t+\eta)}{t^3}dt\right]^p dx\right)^{\frac{1}{p}}+\frac{l}{n}\left(\int_a^b\left[\int_s^l\frac{\Phi_x(t+\eta)}{t^3}dt\right]^p dx\right)^{\frac{1}{p}}\\
&\le\frac{l}{n}\left(\int_a^b\left[\int_1^s\Phi_x(t+\eta)\,dt\right]^p dx\right)^{\frac{1}{p}}+\frac{l}{n}\int_s^l\left[\int_a^b\left|\frac{\Phi_x(t+\eta)}{t^3}\right|^p dx\right]^{\frac{1}{p}}dt\\
&\le\frac{l}{n}\left(\int_a^b\left[\int_1^s\int_0^{s+\eta}|\psi_x(u)|\,du\,dt\right]^p dx\right)^{\frac{1}{p}}+\frac{l}{n}\int_s^l\frac{1}{t^3}\left[\int_a^b|\Phi_x(t+\eta)|^p\,dx\right]^{\frac{1}{p}}dt\\
&\le\frac{l}{n}\left(\int_a^b\left[(s-1)\int_0^{s+\eta}|\psi_x(u)|\,du\right]^p dx\right)^{\frac{1}{p}}+\frac{l}{n}\left(\int_s^l\frac{\varepsilon(t+\eta)}{t^3}dx\right)^{\frac{1}{p}}\\
&\le\frac{sl}{n}\left(\int_a^b\left[\int_0^{s+\eta}f(x+u)\,du\right]^p dx\right)^{\frac{1}{p}}+\frac{sl}{n}\left(\int_a^b\left[\int_0^{s+\eta}f(x-u)\,du\right]^p dx\right)^{\frac{1}{p}}\\
&+\frac{sl}{n}\left(\int_a^b\left[\int_0^{s+\eta}f(x)\,du\right]^p dx\right)^{\frac{1}{p}}+\frac{l}{n}\left(\int_s^l\frac{\varepsilon(t+\eta)}{t^3}dx\right)^{\frac{1}{p}}\le
\end{aligned}
$$

$$\leq \frac{sl}{n}\left(\int_a^b \left[\int_{1+x+\eta}^{s+x+\eta} |f(t)|\,dt\right]^p dx\right)^{\frac{1}{p}} + \frac{sl}{n}\left(\int_a^b \left[\int_{x-(x+\eta)}^{x-(x+\eta)} |f(t)|\,dt\right]^p dx\right)^{\frac{1}{p}} + \frac{sl(s+\eta)}{n}\left(\int_a^b |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$+\frac{\varepsilon l}{n}\left(\int_a^b \left[\int_s^l \frac{1}{t^2}dt\right]^p dx\right)^{\frac{1}{p}} + \frac{\varepsilon l^2}{n^2}\left(\int_a^b \left[\int_s^l \frac{1}{t^3}dt\right]^p dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\leq \frac{sl}{n}\left(\int_a^b \left[\int_{1+a+\eta}^{s+b+\eta} |f(t)|\,dt\right]^p dx\right)^{\frac{1}{p}} + \frac{sl}{n}\left(\int_a^b \left[\int_{a-(b+\eta)}^{b-(a+\eta)} |f(t)|\,dt\right]^p dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$+\frac{sl(s+\eta)}{n}\left(\int_a^b |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} + \frac{\varepsilon l}{n}\left(\int_a^b \left[\int_s^l \frac{1}{t^2}dt\right]^p dx\right)^{\frac{1}{p}} + \frac{\varepsilon l^2}{n^2}\left(\int_a^b \left[\int_s^l \frac{1}{t^3}dt\right]^p dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\leq \frac{sl}{n}C_5' + \frac{sl}{n}C_5'' + \frac{sl(s+\eta)}{n}C + \frac{\varepsilon l}{n}\left(\frac{1}{s} - \frac{1}{l}\right)(b-a)^{\frac{1}{p}} + \frac{\varepsilon l^2}{2n^2}\left(\frac{1}{s^2} - \frac{1}{l^2}\right)(b-a)^{\frac{1}{p}}$$

$$\leq \frac{sl}{n}C_5' + \frac{sl}{n}C_5'' + \frac{sl(s+\eta)}{n}C + \frac{l}{n}\frac{\varepsilon}{s}(b-a)^{\frac{1}{p}} + \frac{\varepsilon l^2}{2n^2}\frac{(b-a)^{\frac{1}{p}}}{s^2} \to 0,$$

$$l \to \infty, \qquad n \to \infty, \qquad \frac{l}{n} \to 0.$$

ამასთანავე, (4) პირობის ძალით

$$\left(\int_a^b \left|\int_\eta^l \frac{|\psi_x(u+h) - \psi_x(u)|}{u}du\right|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} = o(1), \qquad l \to \infty.$$

ხოლო

$$\left(\int_a^b \left|\frac{1}{2}\int_\eta^l \left(\frac{\psi_x(t+\eta)}{t} - \frac{\psi_x(t)}{t}\right)\cos\frac{\pi n t}{l}dt\right|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \leq \frac{1}{2}\left(\int_a^b \left[\int_\eta^l \left|\frac{\psi_x(t+\eta) - \psi_x(t)}{t}\right|dt\right]^p dx\right)^{\frac{1}{p}},$$

საიდანაც ვღებულობთ დასამტკიცებელს.

დასკვნა

ფუნქციათა E კლასისათვის დამტკიცებულია ა. ზახაროვის თეორემის [3] ანალოგი დირიხლეს განზოგადებული ინტეგრალებისთვის $L^p(a,b), p \geq 1$, სივრცეში.

გამოყენებული ლიტერატურა

[1] R. Taberski, *On general Diriclilet's integrals*, Annales Societiatis Matematicae Polonae, Vol. 17 No. 1, (1974), p. 499-512.

[2] R. Taberski, *Convergence of some trigonometric sums*, Demonstratio Matematica, Vol. 5, No. 3 (1973), p. 101-117.

[3] A. A. Zakharov, *Strong Summability of Fourier Series,* Sibirskii Matematicheskii Zhurnal, Vol. 23, No. 5, (1980), p. 100-114.

[4] N. K. Bary, *A Treatise on Trigonometric Series*, New Yourk, The Macmillan Company, 1964.

[5] G. B. Folland, *Real Analysis*, New York, John Wiley & Sons, Inc, 1999.

[6] A. Zygmund, *Trigonomrttic Series*, Cambridge, Cambridge Uiversity Press, 2002.