ივანე ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტი

ირაკლი სიხარულიძე

კალაბის ჰიპოთეზა და კომპლექსური მონჟ-ამპერის განტოლება

მათემატიკის სადოქტორო პროგრამა

დოქტორანტის სემინარი

ხელმძღვანელი - გია გიორგაძე, ფიზიკა-მათემატიკურ მეცნიერებათა დოქტორი, ასოცირებული პროფესორი, ივანე ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტის ზუსტ და საბუნებისმეტყველო მეცნიერებათა ფაკულტეტი

ზუსტ და საბუნებისმეტყველო ემცნიერებათა ფაკულტეტი,
მათემატიკის დეპარტამენტი

2022, თბილისი

სარჩევი

ანოტაცია

მნიშვნელოვანი სახის კომპლექსური მრავალსახეობის, ე.წ., კალაბი-იაუს მრავალსახეობის, თეორია ეყრდნობა კალაბის ჰიპოთეზას, რომლის დასამტკიცებლადაც იგი დაიყვანება კომპლექსურ მონჟ-ამპერის განტოლებაზე, რომლის ამონახსნის არსებობა და ერთადერთობა პირველად იაუს მიერ იქნა დამტკიცებული. ნაშრომში მიმოხილულია ცნებები და მათემატიკური ობიექტები, რომლებსაც ეს ჰიპოთეზა შეეხება და დამტკიცებულია მათი ის თვისებები, რომლებიც იძლევა საშუალებას ეს ჰიპოთეზა დაყვანილ იქნას კომპლექსურ მონჟ-ამპერის განტოლებაზე.

Abstract

The theory of an important class of complex manifolds, the so called Calabi-Yau manifolds, relies on the Calabi conjecgture, which can be reduced to a complex Monge-Ampère equation, whose solution's existance and uniqueness was first demonstrated by Yau. Here are discussed notions and mathematical objects which are involved in the statement of the conjecture and those of their important properties are proven which allow the reduction of the conjecture to a complex Monge-Ampère equation.

1 კელერის მრავალსახეობა

განვიხილოთ n-განზომილებიანი კომპლექსური მრავალსახეობა M, რომლის ჰოლომორფული კოორდინატული ატლასით ინდუცირებული წრფივი თითქმის კომპლექსური სტრუქტურა აღვნიშნოთ J-ით, ე. ი, J არის მრავალსახეობის, განხილულის როგორც $2n$-განზომიელბიანი ნამდვილი გლუვი მრავალსახეობა, ნამდვილი მხები ფიბრაციის ენდომორფიზმი $-\mathrm{id}$-ის ტოლი კვადრატით:

$$J : T_{\mathbb{R}}M \to T_{\mathbb{R}}M, \quad J^2 := J \circ J = -\mathrm{id}.$$

განსაზღვრება 1. რიმანულ მეტრიკას g კომპლექსურ მრავალსახეობაზე M ეწოდება *ერმიტული სტრუქტურა* M-ზე, თუ ყოველი წერტილისათვის $p \in M$ სკალარული ნამრავლი ამ წერტილში ნამდვილ მხებ სივრცეზე $T_{p,\mathbb{R}}M$ თავსებადია იმავე სივრცეზე წრფივ კომპლექსურ სტრუქტურასთან J_p, რაც ნიშნავს, რომ

$$g_p(X, Y) = g_p(J_p(X), J_p(Y)), \quad \forall X, Y \in T_{p,\mathbb{R}}M.$$

. ინდუცირებულ ნამდვილ, [2], $(1, 1)$-ტიპის ფორმას $\omega := g(J(), ())$ ეწოდება *ფუნდამეტური ფორმა.*

ლოკალურად, მოცემული $(U, z_1, z_2, \ldots, z_n)$ კოორდინატული სისტემის მიმართ, ფუნდამენტური ფორმა ω შეიძლება ჩაიწეროს შემდეგი სახით:

$$\omega = \frac{i}{2} \sum_{i,j=1}^{n} h_{ij} dz_i \wedge d\bar{z}_j,$$

სადაც ყოველი წერტილისათვის $p \in U$ მატრიცა $h_{ij}(z_1(p), z_2(p), \ldots, z_n(p))$ არის დადებითად განსაზღვრული და ერმიტული.

კომპლექსუს მრავალსახეობას M მასზე განსაზღვრული ერმიტული სტრუქტურით ეწოდება *ერმიტული მრავალსახეობა.* შევნიშნოთ, რომ ერმიტული სტრუქტურა g ცალსახად განისაზღვრება თითქმის კომპლექსური სტრუქტურით J და ფუნდამენტური ფორმით ω; მართლაც, $g(\, , \,) = \omega(\, , J(\,))$. ერმიტული მრავალსახეობის რიმანული მეტრიკით g და ფუნდამენტური ფორმით ω შეიძლება აიგოს ერმიტული სკალარული ნამრავლი მრავალსახეობის ჰოლომორფულ მხებ სივრცეზე მის ნების-

მიერ წერტილში შემდეგნაირად: $h_p = g_p - i\omega_p$, რაც გვაძლევს კომპლექსურმნიშვნელობიან ასახვას ნამდვილ მხებ სივრცეზე, რომელიც კანონიკურად იზომორფულია ჰოლომორული მხები სივრცისა, [1], რის ძალითაც ეს ასახვა შეგვიძლია ვიგულისხმოთ განსაზღვრულად ჰოლომორფულ მხებ ფიბრაციაზე:

$$h_p : T_p^{1,0}M \times T_p^{1,0}M \to \mathbb{C}.$$

რადგანაც ეს ასახვა ერთნახევრადწრფივია, იგი ცალსახად განსაზღრავს წრფივ ასახვას ტენზორულ ნამრავლზე $T_p^{1,0}M \otimes \overline{T_p^{1,0}M}$, რომლისთვისაც გამოვიყენოთ იგივე აღნიშნვა:

$$h_p : T_p^{1,0}M \otimes \overline{T_p^{1,0}M} \to \mathbb{C}.$$

ამგვარად ვღებულობთ $\left(T^{1,0}M \otimes \overline{T^{1,0}M}\right)^*$ ვექტორული ფიბრაციის გლუვ კვეთას, $h \in \Gamma\left(T^{1,0}M \otimes \overline{T^{1,0}M}\right)^*$. ვინაიდან

$$h_p \in \left(T_p^{1,0}M \otimes \overline{T_p^{1,0}M}\right)^* \cong T_p^{*1,0}M \otimes \overline{T_p^{1,0}M}^* \cong T_p^{*1,0}M \otimes T_p^{*0,1}M,$$

ის ლოკალურად შეიძლება წარმოდგენილ იქნას როგორც

$$h = \sum_{i,j=1}^{n} h\left(\frac{\partial}{\partial z_i}, \frac{\partial}{\partial z_j}\right) dz_i \otimes d\bar{z}_j = \sum_{i,j=1}^{n} h_{ij} dz_i \otimes d\bar{z}_j.$$

განსაზღვრება 2. *კელერული სტრუქტურა* (ან *კელერული მეტრიკა*) ეწოდება ერმიტულ სტრუქტურას g, რომლის ფუნდამენტური ფორმაც ω ჩაკეტილია, ანუ, $d\omega = 0$. ასეთ ფუნდამეტურ ფორმას *კელერულ ფორმას* უწოდებენ, ხოლო ასეთი ფორმით აღჭურვილ ერმიტულ მრავალსახეობას კი - *კელერულ მრავალსახეობას.*

1.1 კომპლექსური ტენზორული აღნიშნვები

ბაზისისათვის $X_1, J(X_1), \ldots, X_n, J(X_n)$ შემოვიტანოთ აღნიშნვები

$$Z_\alpha = \frac{1}{2}\left(X_\alpha - iJ(X_\alpha)\right), \quad Z_{\bar{\alpha}} = \frac{1}{2}\left(X_\alpha + iJ(X_\alpha)\right)$$

და, [5],

$$g_{\alpha\beta} = g(Z_\alpha, Z_\beta),\; g_{\bar\alpha\beta} = g(Z_{\bar\alpha}, Z_\beta),\; g_{\alpha\bar\beta} = g(Z_\alpha, Z_{\bar\beta}),\; g_{\bar\alpha\bar\beta} = g(Z_{\bar\alpha}, Z_{\bar\beta}).$$

შევამჩნიოთ რომ g-ს თავსებადობიდან J-სთან და $J^2 = -\mathrm{id}$-იდან გამომდინარეობს:

$$\begin{aligned} g_{\alpha\beta} = g(Z_\alpha, Z_\beta) &= \frac{1}{4} g(X_\alpha - iJ(X_\alpha), X_\beta - iJ(X_\beta)) \\ &= \frac{1}{4}\left(g(X_\alpha, X_\beta) - g(J(X_\alpha), J(X_\beta)) - i(g(X_\alpha, J(X_\beta)) + g(J(X_\alpha), X_\beta)\right) \\ &= \frac{1}{4}\left(g(X_\alpha, X_\beta) - g(X_\alpha, X_\beta) - i(-g(J(X_\alpha), X_\beta) + g(J(X_\alpha), X_\beta)\right) = 0 \end{aligned}$$

და

$$\begin{aligned} g_{\bar\alpha\bar\beta} = g(Z_{\bar\alpha}, Z_{\bar\beta}) &= \frac{1}{4} g(X_\alpha + iJ(X_\alpha), X_\beta + iJ(X_\beta)) \\ &= \frac{1}{4}\left(g(X_\alpha, X_\beta) - g(J(X_\alpha), J(X_\beta)) + i(g(X_\alpha, J(X_\beta)) + g(J(X_\alpha), X_\beta)\right) \\ &= \frac{1}{4}\left(g(X_\alpha, X_\beta) - g(X_\alpha, X_\beta) + i(-g(J(X_\alpha), X_\beta) + g(J(X_\alpha), X_\beta)\right) = 0, \end{aligned}$$

ხოლო g-ს სიმეტრიულობიდან კი გამომდინარეობს:

$$g_{\alpha\bar\beta} = g(Z_\alpha, Z_{\bar\beta}) = g(Z_{\bar\beta}, Z_\alpha) = g_{\bar\beta\alpha},$$

ნამდვილმნიშვნელობიანობა კი - შემდეგიდან:

$$\overline{g_{\alpha\bar\beta}} = \overline{g(Z_\alpha, Z_{\bar\beta})} = g(Z_{\bar\alpha}, Z_\beta) = g(Z_\beta, Z_{\bar\alpha}) = g_{\beta\bar\alpha},$$

რაც ნიშნავს, რომ $g_{\alpha\bar\beta}$ ერმიტული მატრიცაა. შევნიშნოთ, რომ

$$\begin{aligned} \omega_{\alpha\beta} =& \omega(Z_\alpha, Z_\beta) = g(J(Z_\alpha), Z_\beta) = ig_{\alpha\beta} = 0, \\ \omega_{\bar\alpha\bar\beta} =& \omega(Z_{\bar\alpha}, Z_{\bar\beta}) = g(J(Z_{\bar\alpha}), Z_{\bar\beta}) = -ig_{\alpha\beta} = 0, \\ \omega_{\alpha\bar\beta} =& \omega(Z_\alpha, Z_{\bar\beta}) = g(J(Z_\alpha), Z_{\bar\beta}) = ig_{\alpha\bar\beta}, \\ \omega_{\bar\alpha\beta} =& \omega(Z_{\bar\alpha}, Z_\beta) = g(J(Z_{\bar\alpha}), Z_\beta) = -ig_{\alpha\beta}. \end{aligned}$$

ასევე შევნიშნოთ, [5], რომ კელერის მრავალსახეობის ნებისმიერი წერტილისათვის $p \in M$ არსებობს მისი მიდამო $U \subseteq M$ მასზე ჰოლომორფული კოორდინატული სის-

ტემით $(z_1, z_2, \dots, z_n)$, რომლის მიმართაც ω ჩაიწერება შემდეგნაირად:

$$\omega = \frac{i}{2} \sum_{j,k=1}^{n} (\delta_{jk} + O(\|z\|)) dz^j \wedge d\bar{z}^k, \quad \|z\| \to 0,$$

სადაც $\|z\|$ არის $z = (z_1, z_2, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n$ ვექტორის სტანდარტული ნორმა.

2 სიმრუდე

M მრავალსახეობის g მეტრიკა ცალსახად განსაზღვრავს ლევი-ჩივიტას ბმულობას ∇, რომლის *რიმანული სიმრუდის ენდომორფიზმი*, [3], ეწოდება ასახვას

$$R : \Gamma(T_{\mathbb{R}}M) \times \Gamma(T_{\mathbb{R}}M) \times \Gamma(T_{\mathbb{R}}M) \to \Gamma(T_{\mathbb{R}}M)$$

განსაზღვრულს შემდეგნაირად

$$R(X,Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z,$$

სადაც $[X,Y]$ არის $X, Y \in \Gamma(T_{\mathbb{R}}M)$ ვექტორული ველების ლის ფრჩხილი. R არის $\binom{3}{1}$-ტენზორული ველი. მისი მეშვეობით *რიმანის სიმრუდის ტენზორი* Rm, [3], განისაზღვრება კოვარიანტულ 4-ტენზორულ ველად, რომელიც ვექტორულ ველებზე მოქმედებს შემდეგნაირად:

$$Rm(X,Y,Z,W) = g(R(X,Y)Z, W).$$

მისივე მეშვეობით განისაზღვრება მრავალსახეობის *რიჩის სიმრუდე* Ric, [3], რომლის მოქმედებაც ვექტორულ ველებზე $X, Y \in \Gamma(T_{\mathbb{R}}M)$ შემდეგნაირია:

$$Ric(X,Y) = tr(Z \mapsto R(Z,X)Y),$$

სადაც tr არის შესაბამისი წრფივი ოპერატორის კვალი.

კოორდინატული სისტემის მიმართ შეგვიძლია განვსაზღვროთ, [3], სიდიდეები

$R_{jkl}{}^m$ შემდეგნაირად:

$$R(\partial_j, \partial_k)\partial_l = \sum_m R_{jkl}{}^m \partial_m,$$

ან

$$R = \sum_{j,k,l,m} R_{jkl}{}^m dx^j \otimes dx^k \otimes dx^l \otimes \partial_m,$$

სადაც $\partial_j \equiv \dfrac{\partial}{\partial x^j}$ კოორდინატული სისტემით ინდუცირებული მხები ფიბრაციის ბაზისური კვეთებია. სიდიდეები R_{ijkl} კი რიმანის სიმრუდის ტენზორის კომპონენტებია:

$$R_{jklm} = Rm(\partial_j, \partial_k, \partial_l, \partial_m),$$

ანუ

$$Rm = \sum_{j,k,l,m} R_{jklm} dx^j \otimes dx^k \otimes dx^l \otimes dx^m.$$

მათ შორის შემდეგი კავშირია:

$$\begin{aligned}
R_{jklm} &= Rm(\partial_j, \partial_k, \partial_l, \partial_m) = g(R(\partial_j, \partial_k)\partial_l, \partial_m) \\
&= g(\sum_n R_{jkl}{}^n \partial_n, \partial_m) = \sum_n R_{jkl}{}^n g(\partial_n, \partial_m) = \sum_n R_{jkl}{}^n g_{nm}.
\end{aligned}$$

რიჩის ტენზორი (ტენზორული ველი) არის $T^*M \otimes T^*M$ ფბრაციის გლუვი კვეთა, $Ric \in \Gamma(T^*M \otimes T^*M)$, რის გამოც ის ლოკალური კოორდინატული სისტემის მიმართ შეგვიძლია ჩავწეროთ შემდეგნაირად:

$$Ric = R_{jk} dx^j \otimes dx^k,$$

სადაც R_{jk} სიმეტრიულია, $R_{jk} = R_{kj}$. მისი განსაზღვრებიდან გამომდინარე

$$R_{jk} = \sum_m R_{mjk}{}^m = \sum_{mn} g^{mn} R_{mjnk}.$$

დებულება 1. კელერის მრავალსახეობისთვის (M, J, g) სამართლიანია, [5],

$$Rm(X, Y, Z, W) = Rm(J(X), J(Y), Z, W) = Rm(X, Y, J(Z), J(W))$$

და

$$Ric(X,Y) = Ric(J(X), J(Y)).$$

დამტკიცება. კელერის მრავალსახეობისთვის $\nabla J = 0$, [4], საიდანაც გამომდინარეობს, რომ

$$\begin{aligned} R(X,Y)J(Z) &= \nabla_X \nabla_Y (J(Z)) - \nabla_Y \nabla_X (J(Z)) - \nabla_{[X,Y]} J(Z) \\ &= J(\nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z) = J(R(X,Y)Z). \end{aligned}$$

აქედან და რიმანის ტენზორის სიმეტრიულობიდან გვაქვს:

$$\begin{aligned} Rm(J(X), J(Y), Z, W) &= g(R(J(X), J(Y)Z, W) = g(R(Z,W)J(X), J(Y) \\ &= g(J(R(Z,W)X), J(Y)) = g(R(Z,W)X, Y) = Rm(X,Y,Z,W). \end{aligned}$$

მეორე ნაწილის დასამტკიცებლად კვალის თვისებებისა და ზემოთ ნაჩვენების გათვალისწინებით განვიხილოთ

$$\begin{aligned} Ric(J(X), J(Y)) &= tr(Z \mapsto R(Z, J(X))J(Y)) = tr(J(Z) \mapsto R(J(Z), J(X))J(Y)) \\ &= tr(J(Z) \mapsto R(Z,X)J(Y)) = tr(J(U) \mapsto J(R(Z,X)Y)) \\ &= tr(Z \mapsto R(Z,X)Y) = Ric(X,Y). \end{aligned}$$

□

აქედან ზემოთ g-სათვის ჩატარებული მსჯელობის მსგავსი მსჯელობით გამომდინარეობს, [5] რომ კელერის მრავალსახეობის სიმრუდის ტენზორისათვის არანულოვანია მხოლოდ შემდეგი მისი კომპონენტები:

$$R_{j\bar{k}l\bar{m}}, R_{j\bar{k}\bar{l}m}, R_{\bar{j}kl\bar{m}}, R_{\bar{j}k\bar{l}m}.$$

შევამჩნიოთ, რომ, იმის გათვალისწინებით, [5], რომ

$$\nabla_j \nabla_{\bar{k}} = -\nabla_{\bar{k}} \nabla_j, \quad [\partial_j, \partial_k] = 0.$$

გვაქვს

$$\sum_m R_{j\bar{k}l}{}^m \partial_m = \nabla_j \nabla_{\bar{k}} \partial_l - \nabla_{\bar{k}} \nabla_j \partial_l = -2\nabla_{\bar{k}} \nabla_j \partial_l = -\nabla_{\bar{k}} \left(\sum_m \Gamma^m_{jl} \partial_m \right) = -\sum_m \partial_{\bar{k}} (\Gamma^m_{jl}) \partial_m,$$

ანუ

$$R_{j\bar{k}l}{}^m = -\partial_{\bar{k}} (\Gamma^m_{jl}),$$

სადაც Γ^m_{jl} ლევი-ჩივიტას ბმულობის კრისტოფელის სიმბოლოებია.

დებულება 2. რიჩის ტენზორის კომპონენტები ლოკალურად შეიძლება ჩაიწეროს:

$$R_{j\bar{k}} = -\partial_j \partial_{\bar{k}} (\log(\det(g_{l\bar{m}}))).$$

დამტკიცება. იაკობის ფორმულის თანახმად, [5], დეტერმინანტის წარმოებულისთვის:

$$\partial_j (\log(\det(g_{l\bar{m}}))) = \sum_{l,\bar{m}} g^{l\bar{m}} \partial_j g_{l\bar{m}},$$

რის მეშვეობითაც

$$\begin{aligned} -\partial_j \partial_{\bar{k}} (\log(\det(g_{l\bar{m}}))) &= -\partial_{\bar{k}} \partial_j (\log(\det(g_{l\bar{m}}))) = -\partial_{\bar{k}} \left(\sum_{l,\bar{m}} g^{l\bar{m}} \partial_j g_{l\bar{m}} \right) \\ &= -\partial_{\bar{k}} \left(\sum_n \Gamma^n_{jn} \right) = -\partial_{\bar{k}} \left(\sum_n \Gamma^n_{nj} \right) = \sum_n R_{n\bar{k}j}{}^n = R_{j\bar{k}}. \end{aligned}$$

□

2.1 რიჩის 2-ფორმა

რიჩის სიმრუდის ტენზორს შეგვიძლია შევუსაბამოთ 2-ფორმა შემდეგნაირად:

$$Ric_\omega(X, Y) := Ric(J(X), Y).$$

დებულება 3. რიჩის 2-ფორმა არის ნამდვილი, ჩაკეტილი, $(1,1)$ ტიპის დიფერენციალური ფორმა და ლოკალური კოორდინატული სისტემის მიმართ შეიძლება ჩაიწე-

როს შემდეგნაირად:

$$Ric_\omega = i\sum_{j\bar{k}} R_{j\bar{k}} dz^j \wedge d\bar{z}^k = -i\partial\bar{\partial}(\log(\det(g_{m\bar{n}})).$$

დამტკიცება. რიჩის ტენზორის J-ის მიმართ ინვარიანტულობიდან გამომდინარე:

$$\begin{aligned} Ric_\omega(X,Y) &= Ric(J(X),Y) = Ric(Y,J(X)) = Ric(J(Y),J(J(X)) \\ &= -Ric(J(y),X) = -Ric_\omega(Y,X), \end{aligned}$$

ანუ ის ანტისიმეტრიულია და, მაშასადამე, 2-ფორმაა.

$$\begin{aligned} Ric_\omega(J(X),J(Y)) &= Ric(J(J(X)),J(Y)) = -Ric(X,J(Y)) = -Ric(J(Y),X) = -Ric_\omega(Y,X) \\ &= Ric_\omega(X,Y), \end{aligned}$$

საიდანაც გამომდინარეობს, რომ Ric_ω $(1,1)$-ტიპის დიფერენციალური ფორმაა. ლოკალური კოორდინატული სისტემის მიმართ გვაქვს

$$\begin{aligned} Ric_\omega &= \sum_{j\bar{k}} Ric_\omega(\partial_j,\partial_{\bar{k}})dz^j \wedge d\bar{z}^k = \sum_{j\bar{k}} Ric(J(\partial_j),\partial_{\bar{k}})dz^j \wedge d\bar{z}^k = i\sum_{j\bar{k}} Ric(\partial_j,\partial_{\bar{k}})dz^j \wedge d\bar{z}^k \\ &= i\sum_{j\bar{k}} R_{j\bar{k}} dz^j \wedge d\bar{z}^k = -i\sum_{j\bar{k}} (\partial_j\partial_{\bar{k}}(\log(\det(g_{l\bar{m}}))) dz^j \wedge d\bar{z}^k = -i\partial\bar{\partial}(\log(\det(g_{l\bar{m}}))), \end{aligned}$$

რის მეშვეობითაც შეგვიძლია დავინახოთ, რომ ეს ფორმა ჩაკეტილია. მართლაც:

$$dRic_\omega = (\partial+\bar{\partial})Ric_\omega = \partial(-i\partial\bar{\partial}(\log(\det(g_{l\bar{m}})))) + \bar{\partial}(-i\partial\bar{\partial}(\log(\det(g_{l\bar{m}})))) = 0$$

□

დებულება 4. კელერის მრავალსახეობისთვის (M,J,g) კოჰომოლოგიის კლასი

$$c_1(M,J) \equiv \frac{1}{2\pi}[Ricc_\omega] \in H^{1,1}_{\mathbb{R}}(M) \subseteq H^2_{dR}(M)$$

არ არის დამოკიდებული კელერული მეტრიკის არჩევანზე, [5], ანუ, სხვადასხვა კელერული მეტრიკები ინდუცირებენ კოჰომოლოგიურ რიჩის სიმრუდის 2-ფორმას.

დამტკიცება. ვთქვათ, g' არის M-ის სხვა კელერული მეტრიკა მისი შესაბამისი ფუნ-

დამენტური ფორმით ω'; მაშინ

$$\begin{aligned}
Ricc_\omega - Ricc_{\omega'} &= -i\partial\bar{\partial}(\log(\det(g_{l\bar{m}}))) - (-i\partial\bar{\partial}(\log(\det(g'_{l\bar{m}})))) \\
&= -i\partial\bar{\partial}(\log(\det(g_{l\bar{m}}))) + i\partial\bar{\partial}(\log(\det(g'_{l\bar{m}}))) \\
&= -i\left(\partial\bar{\partial}(\log(\det(g_{l\bar{m}})) - \log(\det(g'_{l\bar{m}})))\right) = -i\partial\bar{\partial}\left(\log\left(\frac{\det(g_{l\bar{m}})}{\det(g'_{l\bar{m}})}\right)\right).
\end{aligned}$$

ნებისმიერი სათანადოდ რეგულარული f ფუნქციისთვის სამართლიანია, [5],:

$$\begin{aligned}
-i\partial\bar{\partial}(f) &= (\partial+\bar{\partial})(-i\bar{\partial}(f)) = \frac{1}{2}(\partial+\bar{\partial})(-i\bar{\partial}(f) + i\partial(f)) \\
&= \frac{1}{2}(\partial+\bar{\partial})(J(\bar{\partial}(f)) + J(\partial(f))) = \frac{1}{2}(\partial+\bar{\partial})(J(\partial(f)+\bar{\partial}(f)) = \frac{1}{2}d\left(J\left(d\left(f\right)\right)\right).
\end{aligned}$$

მაშასადამე $Ricc_\omega$-სა და $Ricc_{\omega'}$ სხვაობა ზუსტი ფორმაა:

$$Ricc_\omega - Ricc_{\omega'} = \frac{1}{2}d\left(J\left(d\left(\frac{\det(g_{l\bar{m}})}{\det(g'_{l\bar{m}})}\right)\right)\right),$$

მეტრიკის დეტერმინანტი კი გლობალურად განსაზღვრული ფუნქცია არის და, ამგვარად, $Ricc_\omega \sim Ricc_{\omega'}$, ანუ

$$[Ricc_\omega] = [Ricc_{\omega'}].$$

□

შევნიშნოთ ასევე, რომ

$$\omega^n := \omega \wedge \omega \wedge \cdots \wedge \omega = n! dV_g,$$

სადაც dV_g არის g მეტრიკის მოცულობითი ფორმა, [5]. ამგვარად, შეიგვიძლაი დავწეროთ:

$$Ricc_\omega - Ricc_{\omega'} = i\partial\bar{\partial}\left(\log\left(\frac{\omega^n}{\omega'^n}\right)\right).$$

3 კელერის კლასი და $\partial\bar{\partial}$-ლემა

რამდენადაც კელერის, ან ფუნდამენტური, ფორმა არის ჩაკეტილი ნამდვილი $(1,1)$-ტიპის და, ამგვარად, 2-დიფერენციალური ფორმა, ის განსაზღვრავს კოჰომოლოგიის კლასს მრავალსახეობის მეორე დე რამის კოჰომოლოგიის ჯგუფში.

განსაზღვრება 3. ω-ს *კელერის კლასი* ეწოდება კოჰომოლოგიის კლასს

$$[\omega] \in H^{1,1}_{\mathbb{R}}(M) \subseteq H^2_{dR}(M).$$

საზოგადოდ, კელერის კლასი არ ემთხვევა მისი შესაბამისი რიჩის 2-ფორმის კლასს, [5], $[\omega] \neq [Ric_\omega]$. სამართლიანია შემდეგი მნიშვნელოვანი ლემა, ე.წ, $\partial\bar{\partial}$-ლემა:

ლემა 1. თუ ω_1 და ω_2 ერთმანეთის კოჰომოლოიგური $(1,1)$-ტიპის ჩაკეტილი ნამდვილი ფორმებია, ე. ი., $[\omega_1] = [\omega_2] \in H^2_{\mathrm{dR}}(M)$, მაშინ არსებობს ისეთი ნამდვილმნიშვნელობიანი ფუნქცია $u : M \to \mathbb{R}$, რომ

$$\omega_2 = \omega_1 + i\partial(\bar{\partial}(u)).$$

დამტკიცება. ω_1-ისა და ω_2-ის კოჰომოლოგიურობიდან გამომდინარე არსებობს ისეთი ნამდვილი 1-ფორმა $\alpha \in \Omega^1(M)$, რომ

$$\omega_2 - \omega_1 = d\alpha.$$

ისევე როგორც ნებისმიერი 1-ფორმა M-ზე ის შეგვიძლია წარმოვადგინოთ $(1,0)$ და $(0,1)$-ტიპის ფორმების ჯამად, რომლებიც α-სთვის აღვნიშნოთ $\alpha^{1,0}$ და $\alpha^{0,1}$:

$$\alpha = \alpha^{1,0} + \alpha^{0,1}.$$

რადგანაც α ნამდვილი ფორმაა, ამიტომ $\overline{\alpha^{1,0}} = \alpha^{0,1}$. ამგვარად

$$\omega_2 - \omega_1 = d\alpha = (\partial + \bar{\partial})(\alpha^{1,0} + \alpha^{0,1}) = \partial(\alpha^{1,0}) + \partial(\alpha^{0,1}) + \bar{\partial}(\alpha^{1,0}) + \bar{\partial}(\alpha^{0,1}).$$

$\partial(\alpha^{1,0})$ არის $(2,0)$, ხოლო $\bar{\partial}(\alpha^{0,1})$ კი - $(0,2)$-ტიპის ფორმა, $\omega_2 - \omega_1$ კი $(1,1)$-ტიპის არის, საიდანაც ვასკვნით, რომ ისინი ნულის ტოლი უნდა იყოს და გვრჩება, რომ:

$$\omega_2 - \omega_1 = \partial(\alpha^{0,1}) + \bar{\partial}(\alpha^{1,0}).$$

ვაჩვენოთ, რომ ნებისმიერი $\bar{\partial}$-ჩაკეტილი $(0,1)$-ტიპის ფორმისთვის β კომპაქტურ კელერის მრავალსახეობაზე M, ანუ, ისეთისთვის, რომ $\bar{\partial}\beta = 0$, არსებობს გლუვი კომ-

პლექსურმნიშვნელობიანი ფუნქცია $f \in C^\infty(M,\mathbb{C})$ ისეთი, რომ

$$\partial\beta = \partial\bar{\partial} f.$$

ω იყოს M-ის ფუნდამენტური ფორმა. მრავალსახეობის კომპაქტურობიდან და $\bar{\partial}\beta = 0$-დან გამომდიანრე

$$\begin{aligned}\int_M \partial(\beta)\wedge\omega^{n-1} = \int_M d(\beta)\wedge\omega^{n-1} = \int_M (\partial+\bar{\partial})(\beta)\wedge\omega^{n-1} = \int_M d(\beta)\wedge\omega^{n-1}\\ = \int_M d(\beta\wedge\omega^{n-1}) = 0.\end{aligned}$$

შესაბამისად არსებობს, [4], $f \in C^\infty(M,\mathbb{C})$, რომელიც ხსნის განტოლებას

$$\partial(\bar{\partial}(f))\wedge\omega^{n-1} = \partial(\beta)\wedge\omega^{n-1}.$$

საიდანაც

$$\partial(\beta)\wedge\omega^{n-1} - \partial(\bar{\partial}(f))\wedge\omega^{n-1} = \partial(\beta-\bar{\partial}(f))\wedge\omega^{n-1} = 0.$$

ვაჩვენოთ, რომ ფორმისთვის $\gamma \coloneqq \beta - \bar{\partial}(f)$ სრულდება $\partial(\gamma) = 0$. რადგანაც $\bar{\partial}\gamma = 0$, გვაქვს:

$$\int_M \partial(\gamma)\wedge\overline{\partial(\gamma)}\wedge\omega^{n-2} = \int_M d(\gamma\wedge\overline{d(\gamma)}\wedge\omega^{n-2}) = 0.$$

ლოკალური კოორდინატული სისტემის მიმართ γ შეიძლება ჩაიწეროს:

$$\gamma = \sum_{k=1}^n \gamma_k d\bar{z}^k,$$

ხოლო

$$\partial(\gamma) = \sum_{j,k=1}^n \frac{\partial\gamma_k}{\partial z^j} dz^j \wedge d\bar{z}^k.$$

სამართლიანია, [4],

$$\partial(\gamma)\wedge\overline{\partial(\gamma)}\wedge\omega^{n-2} = \frac{1}{n(n-1)}\left(\sum_{j,k,l,m=1}^n g^{j\bar{k}} g^{l\bar{m}} \frac{\partial\gamma_k}{\partial z^l}\overline{\frac{\partial\gamma_j}{\partial z^m}} - \left|\sum_{j,k=1}^n g^{j\bar{k}}\frac{\partial\gamma_k}{\partial z^j}\right|^2\right)\omega^n.$$

რადგან $\partial(\gamma) \wedge \omega^{n-1} = \partial(\beta - \bar{\partial}(f)) \wedge \omega^{n-1} = 0$, გვაქვს

$$\sum_{j,k=1}^{n} g^{j\bar{k}} \frac{\partial \gamma_k}{\partial z^j} = 0,$$

და

$$\frac{\partial \gamma_k}{\partial z^j} = 0,$$

ანუ

$$\partial(\gamma) = 0,$$

და, მაშასადამე, $\partial(\beta) = \partial(\bar{\partial}(f))$.

ამ შედეგის გამოყენებით $\alpha^{0,1}$-ის მიმართ, გვექნება

$$\partial(\alpha^{0,1}) = \partial(\bar{\partial}(f)), \quad \bar{\partial}(\alpha^{1,0}) = \overline{\partial(\overline{\alpha^{1,0}})} = \overline{\partial(\bar{\partial}(f))} = -\partial(\bar{\partial}(\bar{f})), \quad f \in C^{\infty}(M, \mathbb{C}).$$

მაშასადამე

$$\omega_2 - \omega_1 = \partial(\alpha^{0,1}) + \bar{\partial}(\alpha^{1,0}) = \partial(\bar{\partial}(f)) - \partial(\bar{\partial}(\bar{f})) = \partial\bar{\partial}(f - \bar{f}) = i\partial(\bar{\partial}(2\Im(f))).$$

ამგვარად, $u \equiv 2\Im(f) : M \to \mathbb{R}$ ფუნქციისათვის გვაქვს

$$\omega_2 - \omega_1 = i\partial(\bar{\partial}(u)).$$

$\square$

4 იაუს ჰიპოთეზა და კომპლექსური მონჟ-ამპერის განტოლება

კალაბის ჰიპოთეზა, რომელიც საბოლოოდ დამტკიცებულ იქნა იაუს მიერ, არის შემდეგი:

თეორემა 1. (M, J, ω) იყოს კომპაქტური კელერის მრავალსახეობა, ხოლო ψ კი ნამდვილი $(1,1)$-ტიპის ფორმა $c_1(M, J) \equiv \dfrac{1}{2\pi}[Ricc_{\omega}] \in H_{\mathbb{R}}^{1,1}(M) \subseteq H_{dR}^2(M)$ კლასიდან, $\psi \in c_1(M)$. მაშინ არსებობს ერთადერთი ფუნდამენტური ფორმა $\tilde{\omega}$ კოჰომოლოგიური ω-ს, ანუ, $[\tilde{\omega}] = [\omega]$, რომლისთვისაც $Ric_{\tilde{\omega}} = 2\pi\psi$.

ამ თეორემის დამტკიცება ეყრდნობა შემდეგ თეორემას:

თეორემა 2. (M, J, ω) იყოს კომპაქტური კელერის მრავალსახეობა, ხოლო F კი გლუვი ნამდვილმნიშვნელობიანი ფუნქცია მასზე, $F \in C^\infty(M, \mathbb{R})$, ისეთი, რომ

$$\int_M e^F \omega^n = \int_M \omega^n.$$

მაშინ არსებობს ერთადერთი ფუნდამენტური ფორმა $\tilde{\omega}$ კოჰომოლოგიური ω-ს, $[\tilde{\omega}] = [\omega]$, რომლისთვისაც:

$$\tilde{\omega}^n = e^F \omega^n.$$

ლემა 1-ის მეშვეობით ეს ამოცანა შეიძლება დაყვანილ იქნას M-ზე კომპლექსურ მონჟ-ამპერის განტოლებაზე შემდეგნაირად: $[\tilde{\omega}] = [\omega]$ ნიშნავს, რომ არსებობს ნამდვილმნიშვნელობიანი ფუნქცია $u : M \to \mathbb{R}$ ისეთი, რომ

$$\tilde{\omega} = \omega + i\partial(\bar{\partial}(u)).$$

ამგვარად, თეორემა დადის მეორე რიგირს კერძოწარმოებულებიან დიფერენციალურ განტოლებაზე:

$$(\omega + i\partial(\bar{\partial}(u)))^n = e^F \omega^n,$$

რომელიც არის კომპლექსური მონჟ-ამპერის განტოლება, რომლის ამონახსნის არსებობა და ერთადერთობა დაამტკიცა იაუმ.

კალაბის ჰიპოთეზის დასაყვანად კომპლექსურ მონჟ-ამპერის ამპერის განტოლებაზე გამოვიყენოთ **ლემა** 1 $[Ric_\omega] = [Ric_{\tilde{\omega}}]$-სთვის: არსებობს ნამდვილმნიშვნელობიანი ფუნქცია $F : M \to \mathbb{R}$ ისეთი, რომ

$$Ric_{\tilde{\omega}} - Ric_\omega = i\partial(\bar{\partial}(F)),$$

მაგრამ, მეორეს მხრივ,

$$Ric_{\tilde{\omega}} - Ric_\omega = i\partial\left(\bar{\partial}\left(\log\left(\frac{\tilde{\omega}^n}{\omega^n}\right)\right)\right) = i\partial\left(\bar{\partial}\left(\log\left(\frac{(\omega + i\partial(\bar{\partial}(u)))^n}{\omega^n}\right)\right)\right),$$

საიდანაც ვასკვნით, რომ

$$i\partial\left(\bar{\partial}\left(\log\left(\frac{(\omega+i\partial(\bar{\partial}(u)))^n}{\omega^n}\right)\right)\right)=i\partial(\bar{\partial}(F)),$$

ანუ

$$\log\left(\frac{(\omega+i\partial(\bar{\partial}(u)))^n}{\omega^n}\right)=F+c,$$

სადაც c მუდმივია. მაშასადამე:

$$\frac{(\omega+i\partial(\bar{\partial}(u)))^n}{\omega^n}=e^{F+c}$$

და ვღებულობთ კომპლექსურ მონჟ-ამპერის განტოლებას:

$$(\omega+i\partial(\bar{\partial}(u)))^n=e^{F+c}\omega^n.$$

c-ს ცალსახად განისაზღვრება შემდეგიდან გამომდინარე: რადგანაც მრავალსახეობა კომპაქტურია და $\tilde{\omega}^n-\omega^n$ ზუსტი, გვაქვს:

$$\int_M(\tilde{\omega}^n-\omega^n)=\int_M\tilde{\omega}^n-\int_M\omega^n=e^c\int_M e^F\omega^n-\int_M\omega^n=0,$$

საიდანაც

$$e^c=\frac{\int_M\omega^n}{\int_M e^F\omega^n},$$

და

$$c=\log\left(\frac{\int_M\omega^n}{\int_M e^F\omega^n}\right).$$

აქედან უშუალოდ გამომდინარეობს

თეორემა 3. (M,J,ω) იყოს კომპაქტური კელერის მრავალსახეობა. თუ $c_1(M)=0$, მაშინ არსებობს ერთადერთი კელერის ფორმა $\tilde{\omega}$ ისეთი, რომ $[\tilde{\omega}]=[\omega]$ და $Ric_{\tilde{\omega}}$=0.

მაშასადამე, თუ კომპაქტური კელერის მრავალსახეობის პირველი ჩერნის კლასი ნულოვანია, მაშინ მასზე მოიძებნება საწყისი ფუნდამენტური ფორმის კოჰომოლოგიური ფუნდამენტური ფორმა, რომლის შესაბამისი მეტრიკის მიმართაც მრავალსახეობა რიჩი-ბრტყელია. ეს უკანასკნელი თვისება მნიშვნელოვანია და, ერთ-ერთი განსაზღვრების თანახმად, წარმოადგეს კალაბი-იაუს მრავალსახეობის არსე-

ბით თვისებას.

5 დასკვნა

კელერის მრავალსახეობის რიჩის სიმრუდის ტენზორული ველის წრფივ თითქმის კომპლექსურ სტრუქტურასთან თავსებადობისა და მისი კომპლექსიფიკაციის ლოკალური წარმოდგენის შესახებ დებულების დამტკიცების შემდეგ მოყვანილია რიჩის 2-ფორმის არსებითი თვისებების, კერძოდ, ჩაკეტილობის, დამტკიცება და ნაჩვენებია, რომ სხვადასხვა კელერული მეტრიკების შესაბამისი რიჩის 2-ფორმები ერთსა და იმავე კოჰომოლოგიის კლასს განსაზღვრავს. ამის შემდეგ მოყვანილია $\partial\bar{\partial}$-ლემის დამტკიცება, რომელიც შემდგომ გამოიყენება იაუს ჰიპოთეზის დაყვანისათვის კომპლექსურ მონჟ-ამპერის განტოლებაზე; ეს თეორემა კერძო შემთხვევაში, როდესაც მრავალსახეობის ჩერნის პრიველი კლასი ნულოვანია, გვაძლევს გარანტიას იმისა, რომ მრავალსახეობაზე არსებობს საწყისის კოჰომოლოგიური ფუნდამენტური ფორმა, რომლის შესაბამისი რიჩის სიმრუდეც ნულოვანია.

გამოყენებული ლიტერატურა

[1] P. Griffiths, J. Harris: *Pirinciples of Algebraic Geometry.* A Wiley-Interscience Publication, 1978.

[2] D. Huybrechts: *Complex Geometry, An Introduction.* Springer-Verlag New York, 1991.

[3] J. M. Lee: *Riemannian Manifolds. An Introduction to Curvature.* Springer-Verlag New York, 1997.

[4] Z. Błocki: *The Complex Monge–Amp'ere Equation in Kähler Geometry.* Course given at CIME Summer School in Pluripotential Theory Cetraro, Italy, July 11-16, 2011

[5] J. A. Viaclovsky: *Kähler manifolds, Ricci curvature, and hyperk ̈ahler metrics.*, June 25-29, 2018.