ივანე ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტი

თამარ მესაბლიშვილი

მონოიდთა ფაქტორიზაციის შესახებ

სამაგისტრო პროგრამის სახელწოდება: მათემატიკა

მისანიჭებელი აკადემიური ხარისხი: მეცნიერებათა მაგისტრი მათემატიკაში

სამაგისტრო ნაშრომის ხელმძღვანელი: ბაჩუკი მესაბლიშვილი, ფიზიკა-მათემატიკურ მეცნიერებათა დოქტორი, ასოცირებული პროფესორი

ზუსტ და საბუნებისმეტყველო მეცნიერებათა ფაკულტეტი,

მათემატიკის დეპარტამენტი

თბილისი

2022

სარჩევი

ანოტაცია

მათემატიკაში მნიშვნელოვან პრობლემას წარმოადგენს მათემატიკური ობიექტების ფაქტორიზაცია. ფაქტორიზაციის პრობლემა მოიცავს როგორც მოცემული მათემატიკური ობიექტის მისი ქვეობიექტებით ფაქტორიზაციების სიმრავლის აღწერას, ასევე ამ მათემატიკური ობიექტის თვისებების შესწავლას მისი იმ ქვებიექტების ტერმინებში, რომლებითაც ის ფაქტორიზდება. ხშირად ხდება, რომ ასეთი ქვეობიექტებისთვის არსებობს რაიმე კონკრეტული ამოცანის ამოხსნის ისეთი მეთოდი, რომელის გამოყენებაც საწყისი ობიექტისათვის არ იყო შესაძლებელი. ამგვარად, ფაქტორიზაციის პრობლემა ძალზე მნიშვნელოვანია და მისი შესწავლა-გამოკვლევა მიმდინარეობს მათემატიკისი მრავალი სხვადასხვა მიმართულებით.

ჩვენს მიზანს წარმოადგენდა მოცემული მონოიდის ყველა შესაძლო ფაქტორიზაციის სიმრავლის აღწერა. ნაშრომში წარმოდგენილია ნებისმიერი მონოიდის ფაქტორიზაციის არსებობის აუცილებელი და საკმარისი პირობა კონგრუენციების ტერმინებში. კერძოდ, დამტკიცებულია შემდეგი თეორემა:

თეორემა. ნებისმიერი $(A,\circ,1_{\mathrm{A}})$ მონოიდისათვის ასახვა

$$(\alpha,\beta)\mapsto([1_{\mathrm{A}}]_\beta\mapsto A\ \longleftarrow [1_{\mathrm{A}}]_\alpha)$$

არის ბიექცია A მონოიდის ფაქტორიზაციათა $FAC(A)$ სიმრავლესა და ისეთ $(\alpha,\beta)\in C^l(A)\times C^r(A)$ წყვილთა სიმრავლეს შორის, რომლებიც აკმაყოფილებს პირობებს:

(1) $\alpha\cap\beta=\Delta_A$;
(2) $[1_{\mathrm{A}}]_\beta$ წარმოადგენს α კონგრუენციის ტრანსვერსალს;
(3) $[1_{\mathrm{A}}]_\alpha$ წარმოადგენს β კონგრუენციის ტრანსვერსალს.

($C^l(A)$ და $C^r(A)$ შესაბამისად აღნიშნავს A მონოიდზე განსაზღვრულ მარცხენა და მარჯვენა კონგრუენციების სიმრავლეებს).

ეს თეორემა, ისევე როგორც ნაშრომში მიღებული სხვა ძირითადი შედეგები არის ახალი და ისინი წარდგენილი იყო კონფერენციაზე "ილია ვეკუას სახელობის გამოყენებითი მათემატიკის ინსტიტუტის სემინარის XXXV საერთაშორისო გაფართოებული სხდომები".

გარდა ამისა, აღნიშნული შედეგები გამოქვეყნდა ჟურნალში “ი. ვეკუას სახელობის გამოყენებითი მათემატიკის ინსტიტუტის სემინარის გაფართოებული სხდომების მოხსენებები (ტომი 35)”.

Abstract

Factorizations of mathematical objects is an important topic in Mathematics. The factorization problem consists of both finding all the factorizations of a given mathematical object through its subobjects, and studying properties of a mathematical objects in terms of the two smaller sub-objects through which it is already factorized. It occurs frequently that it is possible to solve the initial problem for these subobjects, for which one has techniques that weren't available for the initial object. Therefore, the factorization problem is crucial and it is being studied and researched in many different fields of Mathematics.

Our goal was to describe the set of all possible factorizations of a given monoid. A necessary and sufficient condition for any monoid to be factorized in terms of congruences was found. In particular, the following theorem was proved:

Theorem. For any $(A,\circ,1_{\mathrm{A}})$ monoid, the following assignment

$$(\alpha,\beta) \longmapsto ([1_{\mathrm{A}}]_{\beta} \longmapsto A \longleftarrow [1_{\mathrm{A}}]_{\alpha})$$

yields a bijection between the set of those pairs $(\alpha,\beta) \in C^{l}(A) \times C^{r}(A)$ such that

(1) $\alpha \cap \beta = \Delta_{A}$;
(2) $[1_{\mathrm{A}}]_{\beta}$ is a transversal of α;
(3) $[1_{\mathrm{A}}]_{\alpha}$ is a transversal of β

And the set $FAC(A)$ of factorizations of A.

($C^{l}(A)$ and $C^{r}(A)$ are, respectively, the sets of left and right congruences defined on monoid A).

This theorem, along with other main results of this thesis, was presented on the conference "XXXV Enlarged Sessions of the Seminar of I.Vekua Institute of Applied Mathematics".

The results mentioned above were also published in "Reports of Enlarged Sessions of the Seminar of I.Vekua Institute of Applied Mathematics (Volume 35)".

<u>შესავალი</u>

მათემატიკური ობიექტების ფაქტორიზაცია მათემატიკაში წარმოადგენს მნიშვნელოვან პრობლემას. ფაქტორიზაციის პრობლემა შეიძლება განვიხილოთ, როგორც ერთგვარი დაწევის თეორია.

ვთქვათ, მოცემული გვაქვს ამოცანა, რომელიც მდგომარეობს იმის დადგენაში, აქვს თუ არა კონკრეტულ მათემატიკური ობიექტს ესა თუ ის თვისება. პირველ რიგში, მოცემული ობიექტი უნდა წარმოვადგინოთ ორ (როგორც წესი, უფრო მარტივ) ქვეობიექტთა გაერთიანების სახით ისე, რომ ამ ქვეობიექტების თანაკვეთა იყოს მინიმალური; ხშირად ხდება, რომ ასეთი ქვეობიექტებისთვის არსებობს მოცემული ამოცანის ამოხსნის ისეთი მეთოდი, რომელის გამოყენებაც საწყისი ობიექტისათვის არ იყო შესაძლებელი.

საბოლოო ნაბიჯი მდგომარეობს ქვეობიექტებისათვის მოძებნილი ამონახსნების „შეწებებაში“ თავდაპირველად მოცემული ობიექტისათვის ამოხსნის მისაღებად. ფაქტორიზაციის პრობლემას აქვს ორი ნაწილი:

- პირველი ნაწილი წარმოადგენს მოცემული მათემატიკური ობიექტის მისი ქვეობიექტებით ფაქტორიზაციების სიმრავლის აღწერას.
- მეორე ნაწილი კი ეხება მათემატიკური ობიექტის თვისებების შესწავლას მისი იმ ქვებიექტების ტერმინებში, რომლებითაც ის ფაქტორიზდება.

სამაგისტრო ნაშრომის მიზანს წარმოადგენდა მონოიდების ფაქტორიზაციის პრობლემის პირველი ნაწილის კვლევა, კერძოდ კი კონგრუენციების ტერმინებში მოცემული მონოიდის ფაქტორიზაციის არსებობის აუცილებელი და საკმარისი პირობის პოვნა.

პირველ რიგში, შემოგვაქვს მონოიდის ფაქტორიზაციის ცნება:

განსაზღვრება. ვთქვათ, A მონოიდია, ხოლო A_1 და A_2 კი მისი ქვემონოიდები. ვიტყვით, რომ A მონოიდი არის *ფაქტორიზებადი* A_1 და A_2 ქვემონოიდებით, თუკი ნებისმიერი $a \in A$ ელემენტი ერთადერთი სახით ჩაიწერება, როგორც A_1 და A_2 ქვემონოიდების ელემენტების ნამრავლი

$$a = a_1 a_2, a_1 \in A_1, a_2 \in A_2.$$

ბუნებრივია, მონოიდთა ფაქტორიზაციის პრობლემაზე საუბრისას ჩნდება კითხვა, თუ რა განსხვავებაა მონოიდებისა და ჯგუფების შემთხვევებს შორის. ცნობილია, რომ ჯგუფებისათვის შემდეგი პირობა წარმოადგენს ფაქტორიზაციის აუცილებელ და საკმარის პირობას:

წინადადება. ვთქვათ, A ჯგუფია, A_1 და A_2 კი მისი ისეთი ქვეჯგუფები, რომ სრულდება შემდეგი პირობები

- $A = A_1 A_2$
- $A_1 \bigcap A_2 = \{1_A\}$,

მაშინ (A_1, A_2) წარმოადგენს A ჯგუფის ფაქტორიზაციას.

ნაშრომში კონკრეტულ მაგალითზე ნაჩვენებია, რომ ეს ორი პირობა წარმოადგენს მონოიდის ფაქტორიზაციის არსებობის მხოლოდ აუცილებელ და არა საკმარის პირობას. ამგვარად, მონოიდთა შემთხვევაში საჭირო ხდება მათი ფაქტორიზაციის პრობლემის ახლებური გზით გადაწყვეტა. ეს წარმოადგენს ჩვენ მიერ დასმული ამოცანის მოტივაციას და ნაშრომი სწორედ ამ მიზანს ემსახურება.

ძირითადი ცნებები

ამ თავში მიმოხილულია ის აუცილებელი ტერმინოლოგია და აღნიშვნები, რომლებიც გამოყენებულია ნაშრომში.

განსაზღვრება. *ბინარული ოპერაცია* S სიმრავლეზე არის ასახვა $\circ: \ S \times S \longrightarrow S$.

ამბობენ, რომ ბინარული ოპერაცია *ასოციურია,* თუ ნებისმიერი $x, y, z \in S$-თვის სრულდება შემდეგი პირობა

$$x \circ (y \circ z) = (x \circ y) \circ z$$

განსაზღვრება. *ნახევარ-ჯგუფი* წარმოადგენს $(S, \ \circ)$ წყვილს, სადაც S არის არაცარიელ სიმრავლე, ხოლო $\circ$ კი მასზე განსაზღვრულ *ასოციური* ბინარულ ოპერაცია.

განსაზღვრება. ვთქვათ, 1 არის S ნახევარ-ჯგუფის ელემენტი. თუ ნებისმიერი $x \in S$-თვის სრულდება ტოლობა

$$1 \circ x = x$$

მაშინ 1 ელემენტს ვუწოდებთ *მარცხენა ერთეულს.* ანალოგიურად, თუ

$$x \circ 1 = x$$

სრულდება ნებისმიერი $x \in S$-თვის, მაშინ 1 ელემენტს ვუწოდებთ *მარჯვენა ერთეულს.*

თუ გვაქვს $1 \circ x = x \circ 1 = x$ ნებისმიერი $x \in S$-თვის, (ე.ი. თუ 1 ერთდროულად მარცხენა და მარჯვენა ერთეულოვანი ელემენტია), მაშინ 1 ელემენტს ვუწოდებთ S ნახევარ-ჯგუფის *ერთეულს.*

წინადადება. ვთქვათ, 1 წარმოადგენს S ნახევარ-ჯგუფის მარცხენა ერთეულს, ხოლო $1'$ წარმოადგენს S ნახევარ-ჯგუფის მარჯვენა ერთეულს, მაშინ $1 = 1'$.

მაშასადამე, ნახევარ-ჯგუფს შეიძლება ჰქონდეს არაუმეტეს ერთი ერთეული.

დამტკიცება. რადგან 1 მარცხენა ერთეულოვანი ელემენტია, $1 \circ 1' = 1'$. მეორე მხრივ კი რადგანაც $1'$ მარჯვენა ერთეულოვანი ელემენტია, $1 = 1 \circ 1'$.

მივიღეთ, რომ $1 = 1 \circ 1' = 1'$.

განსაზღვრება. *მონოიდი* ეწოდება სამეულს $(A, \circ, 1)$, სადაც A სიმრავლეა, $\circ$ მასზე განსაზღვრული ასოციური ბინარული ოპერაცია, ხოლო $1 \in A$ კი ამ ოპერაციის ერთეულოვანი ელემენტი.

სიმარტივისათვის $(A, \circ, 1)$-ს ნაცვლად შემდგომში ხშირად გამოვიყენებთ უბრალოდ A-ს, ხოლო გამრავლებისთის კი მულტიპლიკაციურ აღნიშვნას.

მაგალითები.

1) შევნიშნოთ, რომ ერთი და იგივე სიმრავლე შეიძლება წარმოადგენდეს მონოიდს სხვადასხვა ოპერაციის მიმართ.
   მაგალითად, მთელ რიცხვთა სიმრავლე $\mathbb{Z}$ მონოიდია შეკრების მიმართ (ერთეულოვანი ელემენტით $0 \in \mathbb{Z}$) და ამავდროულად მონოიდია გამრავლების მიმართაც (ერთეულოვანი ელემენტი $1 \in \mathbb{Z}$).
2) ვთქვათ, X არაცარიელი სიმრავლეა. სიმრავლე, რომელიც შეიცავს ყველა ფუნქციას X-დან X-ში და რომელსაც აღვნიშნავთ X^X სიმბოლოთი, წარმოადგენს მონოიდს ფუნქციათა კომპოზიციის მიმართ. ეს გამომდინარეობს იქიდან, რომ ფუნქციათა კომპოზიცია ასოციურია და იგივური ასახვა ეკუთვნის X^X-ს.
3) $n \times n$ მატრიცთა სიმრავლე $M_n(\mathbb{Z})$, $\mathrm{n} \geq 2$, მატრიცთა გამრავლების მიმართ წარმოადგენს მონოიდს. ასოციურობა გამომდინარეობს მატრიცთა გამრავლების ასოციურობიდან, ხოლო ერთეულოვანი ელემენტი კი არის n განზომილებიანი ერთეულოვანი მატრიცი I_n.

განსაზღვრება. ვთქვათ, მოცემული გვაქვს A მონოიდი, $a \in A$ კი მისი ელემენტია.

თუ არსებობს ისეთი $a' \in A$ ელემენტი, რომ სრულდება $aa' = 1$ პირობა, მაშინ a'-ს ვუწოდებთ a-ს *მარცხენა შებრუნებულ ელემენტს*, a-ს კი *მარცხნიდან შებრუნებადს.*

ანალოგიურად, თუ არსებობს ისეთი $a'' \in A$ ელემენტი, რომ სრულდება $aa'' = 1$ პირობა, მაშინ a''-ს ვუწოდებთ a-ს *მარჯვენა შებრუნებულ ელემენტს*, a-ს კი *მარჯვნიდან შებრუნებადს.*

თუ a ელემენტი შებრუნებადია როგორც მარცხნიდან, ისე მარჯვნიდან, მაშინ მას *შებრუნებად ელემენტს* ვუწოდებთ.

წინადადება. ვთქვათ, მოცემული გვაქვს A მონოიდი და $a \in A$ მისი რაიმე ელემენტია, რომელიც შებრუნებადია და $a' \in A$ მისი მარცხენა შებრუნებული ელემენტი, ხოლო $a'' \in A$ მისი მარჯვენა შებრუნებული ელემენტია. მაშინ $a' = a''$.

დამტკიცება. რადგან a' და a'', შესაბამისად, a-ს მარცხენა და მარჯვენა შებრუნებული ელემენტებია, განმარტების თანახმად გვაქვს

$$aa' = 1 \text{ და } a''a = 1.$$

აქედან მივიღებთ, რომ

$$a' = 1a' = a''aa' = a''1 = a''.$$

შენიშვნა. შევნიშნოთ, რომ თუ მარცხენა და მარჯვენა შებრუნებული ელემენტი ორივე არსებობს, მაშინ ისინი ეთმანეთს ემთხვევა, მაგრამ სასზოგადოდ, ერთის არსებობა მეორის არსებობას არ განაპირობებს.

ამგვარად, a-ს შებრუნებული ელემენტი ერთადერთია, თუკი ასეთი არსებობს და ის a^{-1} სიმბოლოთი აღინიშნება.

განსაზღვრება. მონოიდს, რომლის ყველა ელემენტი შებრუნებადია, *ჯგუფი* ეწოდება.

განსაზღვრება. ვთქვათ, A მონოიდია, ხოლო A' მისი ისეთი ქვესიმრავლეა, რომელიც შეიცავს ერთეულს და ამავდროულად ჩაკეტილია გამრავლების მიმართ. მაშინ A'-ს ვუწოდებთ A-ს *ქვემონოიდს.* ისეთ ქვემონოიდს, რომელიც ჯგუფიცაა მონოიდზე განსაზღვრული გამრავლების ოპერაციის მიმართ, ეწოდება A-ს *ქვეჯგუფი.*

შენიშვნა. ვთქვათ, A ნებისმიერი მონოიდია. A-ს შებრუნებად ელემენტთა სიმრავლეს აღვნიშნავთ $U(A)$ სიმბოლოთი.

წინადადება. ნებისმიერი მონოიდის შებრუნებად ელემენტთა სიმრავლე წარმოადგენს მის ქვეჯგუფს.

დამტკიცება. ვთქვათ, A ნებისმიერი მონოიდია. პირველ რიგში შევნიშნოთ, რომ რადგანაც ცხადია $1 \in U(A)$, ამიტომ $U(A)$ არაცარიელი სიმრავლეა. ახლა ავიღოთ ნებისმიერი ორი ელემენტი $a_1, a_2 \in U(A)$. $U(A)$-ს განმარტებით, a_1 შებრუნებადი ელემენტია და ამიტომ არსებობს ისეთი ${a_1}^{-1}$, რომ

$$a_1{a_1}^{-1} = {a_1}^{-1}\, a_1 = 1.$$

ანალოგიურად a_2-სთვის არსებობს ისეთი ${a_2}^{-1}$, რომ გვაქვს $a_2{a_2}^{-1} = {a_2}^{-1}\, a_2 = 1$.

მაშინ

$$ {a_2}^{-1}{a_1}^{-1}a_1a_2 = {a_2}^{-1}a_2 = 1 $$

და ანალოგიურად

$$ a_1a_2{a_2}^{-1}{a_1}^{-1} = a_1{a_1}^{-1} = 1, $$

რაც ნიშნავს, რომ ${a_2}^{-1}{a_1}^{-1}$ არის a_1a_2-ის შებრუნებული ელემენტი და ამიტომ ეკუთვნის $U(A)$-ს. ამგვარად, ვაჩვენეთ, რომ $U(A)$ წარმოადგენს A-ს ქვემონოიდს.

ახლა ავიღოთ ნებისმიერი $a \in U(A)$ ელემენტი. $U(A)$-ს განმარტებით ის შებრუნებადია, ე.ი. არსებობს ისეთი $a^{-1} \in A$, რომ

$$ aa^{-1} = a^{-1}a = 1, $$

ე.ი. a^{-1} ელემენტიც შებრუნებადია და შესაბამისად ეკუთვნის $U(A)$-ს.

მივიღეთ, რომ $U(A)$ ჩაკეტილია შებრუნებული ელემენტების მიმართაც და ამგვარად, წარმოადგენს A მონოიდის ქვეჯგუფს.

შენიშვნა. თუ X წარმოადგენს A-ს ქვემონოიდს, ι_X სიმბოლოთი აღვნიშნავთ კანონიკურ ჩადგმას $X \longrightarrow A$.

<u>მონოიდთა ფაქტორიზაცია</u>

ამ თავში შემოგვაქვს მონოიდების ფაქტორიზაციის ცნება, რომელიც წარმოადგენს ნაშრომში შესწავლილ ძირითად ცნებას.

განსაზღვრება. ვთქვათ, A მონოიდია, ხოლო A_1 და A_2 კი მისი ქვემონოიდები. ვიტყვით, რომ A მონოიდი არის *ფაქტორიზებადი* A_1 და A_2 ქვემონოიდებით, თუკი ასახვა

$$A_1 \times A_2 \longrightarrow A, (a_1, a_2) \mapsto a_1 a_2$$

ბიექციურია.

(A_1, A_2) წყვილს ვუწოდებთ A მონოიდის *ფაქტორიზაციას,* ხოლო A_1 და A_2 ქვემონოიდებს, შესაბამისად, ამ ფაქტორიზაციის პირველ და მეორე *ფაქტორებს.*

შევნიშნოთ, რომ ეს განსაზღვრება ექვივალენტურია შემდეგი პირობის:

ექვივალენტური განსაზღვრება. ვთქვათ, A მონოიდია, ხოლო A_1 და A_2 კი მისი ქვემონოიდები. ვიტყვით, რომ A მონოიდი არის *ფაქტორიზებადი* A_1 და A_2 ქვემონოიდებით, თუკი ნებისმიერი $a \in A$ ელემენტი ერთადერთი სახით ჩაიწერება, როგორც A_1 და A_2 ქვემონოიდების ელემენტების ნამრავლი

$$a = a_1 a_2, a_1 \in A_1, a_2 \in A_2.$$

მაგალითი. დადებით ნატურალურ რიცხვთა $\mathbb{N}$ სიმრავლე გამრავლების მიმართ წარმოადგენს მონოიდს $(\mathbb{N}, \cdot, 1)$.

განვიხილოთ მისი ორი ქვემონოიდი:

1) კენტი რიცხვების სიმრავლე $\mathbb{O} = \{2k - 1 \,|k \in \mathbb{N}\}$

   ვაჩვენოთ, რომ $\mathbb{O} \subset \mathbb{N}$ მართლაც წარმოადგენს $\mathbb{N}$-ის ქვემონოიდს.

   - ცხადია, $1 \in \mathbb{O}$;
   - რადგან ორი კენტი რიცხვის ნამრავლი კენტია, ამგვარად $\mathbb{O}$ ჩაკეტილია გამრავლების მიმართ და მაშასადამე წარმოადგენს $\mathbb{N}$-ის ქვემონოიდს.

2) $\mathbb{E} = \{2^i : \mathrm{i}$ არა-უარყოფითი მთელი რიცხვია $\}$

   ვაჩვენოთ, რომ $\mathbb{E} \subset \mathbb{N}$ აგრეთვე წარმოადგენს $\mathbb{N}$-ის ქვემონოიდს.

   - ცხადია, რომ $2^0 \in \mathbb{E}$;

- რადგან $2^i \cdot 2^j = 2^{i+j} \in \mathbb{E}$, $\mathbb{E}$ ჩაკეტილია გამრავლების მიმართ და წარმოადგენს $\mathbb{N}$-ის ქვემონოიდს.

რადგან ნებისმიერი ნატურალური რიცხვი ერთადერთი გზით შეიძლება ჩაიწეროს 2-ის ხარისხისა და კენტი რიცხვის ნამრავლის სახით, შემდეგი ასახვა

$$\mathbb{O} \times \mathbb{E} \longrightarrow \mathbb{N}, (k, 2^i) \mapsto 2^i k$$

ბიექციურია, ამიტომ განსაზღვრების თანახმად $(\mathbb{O}, \mathbb{E})$ წარმოადგენს $\mathbb{N}$ მონოიდის ფაქტორიზაციას.

განსაზღვრება. ვთქვათ, A მონოიდია. $FAC(A)$ სიმბოლოთი აღვნიშნავთ A *მონოიდის ფაქტორიზაციების სიმრავლეს*, ე.ი.

$$FAC(A) = \{(A_1, A_2) : A_1 \leq A, A_2 \leq A \text{ და } (A_1, A_2) \text{ არის } A\text{-ს ფაქტორიზაცია}\}.$$

შევნიშნოთ, რომ თუკი (A_1, A_2) წარმოადგენს A მონოიდის ფაქტორიზაციას, მაშინ ტრივიალურია იმის შემოწმება, რომ სრულდება შემდეგი პირობები

- $A = A_1 A_2$, სადაც $A_1 A_2 = \{a_1 a_2 : a_1 \in A_1, a_2 \in A_2\}$
- $A_1 \cap A_2 = \{1_A\}$.

შევნიშნოთ აგრეთვე, რომ მონოიდების შემთხვევაში ეს ორი პირობა მხოლოდ აუცილებელია, მაშინ როცა ჯგუფების შემთხვევაში საკმარისიცაა, როგორც ამას აჩვენებს შემდეგი წინადადება.

წინადადება. ვთქვათ, A ჯგუფია, A_1 და A_2 კი მისი ისეთი ქვეჯგუფები, რომ სრულდება შემდეგი პირობები

- $A = A_1 A_2$
- $A_1 \cap A_2 = \{1_A\}$,

მაშინ (A_1, A_2) წარმოადგენს A ჯგუფის ფაქტორიზაციას.

დამტკიცება. პირველი პირობა გვიჩვენებს, რომ A ჯგუფის ნებისმიერი ელემენტი წარმოიდგინება A_1 და A_2 ქვეჯგუფების ელემენტების ნამრავლის სახით. ამიტომ საკმარისია ვაჩვენოთ, რომ ასეთი წარმოდგენა ერთადერთია. დავუშვათ, რომ რაიმე $a \in A$ ელემენტისთვის გვაქვს მისი ორი ასეთი წაროდგენა:

$$a = a_1 a_2 = a_1' a_2'$$

სადაც $a_1, a_1' \in A_1$ და $a_2, a_2' \in A_2$. რადგან A ჯგუფია, ყველა ელემენტისთვის არსებობს შებრუნებული ელემენტი, ამიტომ ზედა ტოლობიდან მიიღება შემდეგი ტოლობა

$$(a_1')^{-1}a_1 = a_2' {a_2}^{-1}.$$

შევნიშნოთ, რომ ტოლობის მარცხენა მხარე A_1-ის ელემენტია, რადგან a_1, $(a_1')^{-1} \in A_1$ და A_1 ჩაკეტილია გამრავლების მიმართ, რადგანაც ქვეჯგუფია.

ანალოგიურად, ტოლობის მარჯვენა მხარე ეკუთვნის A_2-ს. მივიღეთ, რომ

$$(a_1')^{-1}a_1 = a_2' {a_2}^{-1} \in A_1$$

და ამავდროულად

$$(a_1')^{-1}a_1 = a_2' {a_2}^{-1} \in A_2,$$

ამიტომ მეორე პირობის თანახმად

$$(a_1')^{-1}a_1 = a_2' {a_2}^{-1} = 1_A.$$

აქედან $a_1 = a_1'$ და $a_2 = a_2'$ და მაშასადამე, a-ს წარმოდგენა A_1 და A_2 ქვეჯგუფების ელემენტების ნამრავლის სახით ერთადერთია.

როგორც ზემოთ აღვნიშნეთ, მონოიდებისთვის ეს ყოველთვის ასე არაა. საილუსტრაციოდ განვიხილოთ შემდეგი მაგალითი.

მაგალითი. ვთქვათ, $(\mathbb{Z}, +, 0)$ მთელ რიცხვთა მონოიდია შეკრების მიმართ. განვიხილოთ მისი ორი ქვემონოიდი:

- $-\mathbb{N}_0 = \{0, -1, -2, \dots\}$, რომელიც ცხადია, შეკრების მიმართ წარმოადგენს $(\mathbb{Z}, +, 0)$-ის ქვემონოიდს.
- $(\mathbb{N}_0, +, 0)$, რომელიც ასევე წარმოადგენს $(\mathbb{Z}, +, 0)$ -ის ქვემონოიდს.

შევნიშნოთ, რომ $\mathbb{N}_0 \cap -\mathbb{N}_0 = \{0\}$.

ამგვარად, სრულდება ზემოთ მოყვანილ წინადადებაში მოცემული ორივე პირობა.

ახლა განვიხილოთ ასახვა

$$-\mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 \longrightarrow \mathbb{Z}, (m, n) \longmapsto m + n.$$

ეს ასახვა ცხადია სურექციულია, მაგრამ არ არის ინექციური. მართლაც, მაგალითად, $-7, -3 \in -\mathbb{N}_0$ და $1{,}5 \in \mathbb{N}_0$ რიცხვებისთვის გვაქვს $-7 + 5 = -3 + 1$.

ამგვარად, $\mathbb{Z}$ მონოიდის ნებისმიერი ელემენტი ერთადერთი გზით არ ჩაიწერება $-\mathbb{N}_0$ და $\mathbb{N}_0$ ქვემონოიდთა ელემენტების ჯამის სახით, ე.ი. $(-\mathbb{N}_0, \mathbb{N}_0)$ არ წარმოადგენს $\mathbb{Z}$ მონოიდის ფაქტორიზაციას.

მონოიდის მოქმედებები

განსაზღვრება. ვთქვათ, მოცემული გვაქვს $A = (A, \circ, 1)$ მონოიდი.

მარცხენა A*-სიმრავლე* ეწოდება (X, ρ_X) წყვილს, რომელიც შედგება X არაცარიელი სიმრავლისა და ასახვისაგან

$$\rho_X : A \times X \longrightarrow X,$$

$$\rho_X(a, x) = ax$$

რომელსაც ეწოდება A*-ს მარცხენა მოქმედება* X *სიმრავლეზე* (ან მარცხენა A-მოქმედება) და რომელიც აკმაყოფილებს შემდეგ პირობებს:

1) $1x = x$, ნებისმიერი $x \in X$-თვის.
2) $a(a'x) = (aa')x$, ნებისმიერი $a, a' \in A, x \in X$-თვის.

ვამბობთ, რომ A მონოიდი *(მარცხნიდან) მოქმედებს* X*-ზე.* X სიმრავლეს ეწოდება *მარცხენა* A*-სიმრავლე.*

ანალოგიურად განვმარტავთ მონოიდის მოქმედებას მარჯვნიდან და მარჯვენა A-სიმრავლეს.

განსაზღვრება. ვთქვათ, მოცემული გვაქვს $A = (A, \circ, 1)$ მონოიდი.

მარჯვენა A*-სიმრავლე* ეწოდება (X, ρ_X) წყვილს, რომელის შედგება X არაცარიელი სიმრავლისა და ასახვისაგან

$$\rho_X : X \times A \longrightarrow X,$$

$$\rho_X(x, a) = xa$$

რომელსაც ეწოდება A*-ს მარჯვენა მოქმედება* X *სიმრავლეზე* (ან მარჯვენა A-მოქმედება) და რომელიც აკმაყოფილებს შემდეგ პირობებს

1) $x1 = x$, ნებისმიერი $x \in X$-თვის.
2) $x(aa') = (xa)a'$, ნებისმიერი $a, a' \in A, x \in X$-თვის.

ვამბობთ, რომ A მონოიდი *(მარჯვნიდან) მოქმედებს* X*-ზე.* X სიმრავლეს ეწოდება *მარჯვენა* A*-სიმრავლე.*

მოვიყვანოთ მარცხენა და მარჯვენა A-სიმრავლეების რამდენიმე მაგალითი.

მაგალითები.

1) ვთქვათ, A ერთ ელემენტიანი მონოიდია $\{1\}$, მაშინ ნებისმიერი არაცარიელი X სიმრავლე A-ს ერთადერთი შესაძლო მოქმედებით წარმოადგენს როგორც მარცხენა, ისე მარჯვენა A-სიმრავლეს.
2) ვთქვათ, X არის მარცხენა A-სიმრავლე. მაშინ მისი ქვესიმრავლეთა სიმრავლე $P(X) = \{Y \subseteq X\}$ თავადაც წარმოადგენს მარცხენა A-სიმრავლეს შემდეგი ასახვის საშუალებით:

$$\rho : A \times P(X) \longrightarrow P(X),$$

$$\rho(a, Y) = aY = \{ay \mid y \in Y\}.$$

3) $(A, \circ)$ არის როგორც მარცხენა, ასევე მარჯვენა A-სიმრავლე.

ახლა კი განვიხილოთ ისეთი ასახვები მოქმედებებისთვის, რომლებიც სტრუქტურას ინახავს.

განსაზღვრება. ვთქვათ, მოცემული გვაქვს ორი X და Y მარცხენა A-სიმრავლე. *მორფიზმი* X-დან Y-ში ეწოდება ისეთ $f : X \longrightarrow Y$ ასახვას, რომ სრულდება შემდეგი პირობა

$$f(ax) = af(x) \text{ ნებისიმერი } a \in A, x \in X\text{-თვის.}$$

მარცხენა A-სიმრავლეების მორფიზმებს ხშირად *მარცხენა A-მორფიზმებსაც* უწოდებენ.

განსაზღვრება. ვთქვათ, მოცემული გვაქვს ორი მარჯვენა A-სიმრავლე X, Y. *მორფიზმი* X-დან Y-ში ეწოდება ისეთი $f: X \longrightarrow Y$ ასახვას, რომ სრულდება შემდეგი პირობა

$$f(xa) = f(x)a \text{ ნებისიმერი } a \in A, x \in X\text{-თვის.}$$

განსაზღვრება. ვთქვათ, მოცემული გვაქვს (მარცხენა ან მარჯვენა) A-მორფიზმი $f : X \longrightarrow Y$. მას ეწოდება *A-იზომორფიზმი,* თუ f ბიექციაა. ამ შემთხვევაში ვამბობთ, რომ X და Y იზომორფულია (როგორც მარცხენა ან მარჯვენა A-სიმრავლეები) და ეს ფაქტი აღინიშნება შემდეგნაირად

$$X \cong Y.$$

კონგრუენციები მოქმედებაზე

განსაზღვრება. ვთქვათ, A მონოიდია, ხოლო X კი მარცხენა A-სიმრავლე.

X -ზე (*მარცხენა) კონგრუენცია* ეწოდება X-ზე განსაზღვრულ ისეთ $\rho \subseteq X \times X$ ექვივალენტობის მიმართებას, რომ სრულდება შემდეგი პირობა

$$\text{თუ } (x,\, x') \in \rho \text{, მაშინ } (ax,\, ax') \in \rho$$

ნებისმიერი $x,\, x' \in X,\, a \in A$-თვის.

ანალოგიურად შემოგვაქვს (მარჯვენა) A-კონგრუენციის განსაზღვრება მარჯვენა A-სიმრავლე Y-ზე.

განსაზღვრება. ვთქვათ, A მონოიდია, ხოლო X კი მარცხენა A-სიმრავლე.

თუ ρ არის კონგრუენცია X-ზე, მაშინ $x \in X$ ელემენტის ρ-ექვივალენტობის კლასი აღინიშნება $[x]_\rho$ სიმბოლოთი. ამგვარად,

$$[x]_\rho \;=\; \{x' \in X : (x,\, x') \in \rho\}.$$

განსაზღვრება. წინა განსაზღვრებაში მოცემულ სიტუაციაში ექვივალენტური კლასების სიმრავლე

$$X/\rho \;=\; \{[x]_\rho : x \in X\}$$

არის მარცხენა (შესაბამისად, მარჯვენა) A-სიმრავლე მარცხენა (შესაბამისად, მარჯვენა) A-მოქმედებით $a \cdot [x]_\rho = [ax]_\rho$ (შესაბამისად,$[x]_\rho \cdot a = [xa]_\rho$).

შევნიშნოთ, რომ კანონიკური ასახვა

$$\pi^\rho : X \;\to\; X/\rho,$$

რომელსაც ყოველი x ელემენტი გადაჰყავს თავის ექვივალენტობის კლასში $[x]_\rho$, არის მარცხენა (შესაბამისად, მარჯვენა) A -სიმრავლეების მორფიზმი. π^ρ ასახვას ეწოდება ρ კონგრუენციის შესაბამისი *ფაქტორ-ასახვა.*

მარცხენა ან მარჯვენა A-სიმრავლე X-ზე კონგრუენციების სიმრავლეს აღვნიშნავთ $C_A(X)$ სიმბოლოთი.

განსაზღვრება. მარცხენა (შესაბამისად, მარჯვენა) კონგრუენცია A მონოიდზე წარმოადგენს კონგრუენციას მარცხენა (შესაბამისად, მარჯვენა) A -სიმრავლეზე $(A, \circ)$.

მარცხენა (შესაბამისად, მარჯვენა) კონგრუენციების სიმრავლე A მონოიდზე აღინიშნება $C^l(A)$ (შესაბამისად, $C^r(A)$) სიმბოლოთი.

განსაზღვრება. *კონგრუენცია* A-ზე არის ისეთი ექვივალენტობის მიმართება, რომელიც ერთდროულად არის მარცხენა და მარჯვენა კონგრუენცია.

A -ზე ყველა კონგრუენციის სიმრავლე აღვნიშნოთ $Con(A)$ სიმბოლოთი.

შევნიშნოთ, რომ ნებისმიერი კონგრუენცია ფაქტობრივად არის რაიმე მორფიზმების ე.წ. ბირთვი-კონგრუენცია.

განსაზღვრება. ვთქვათ, A მონოიდია. მარცხენა X , Y (შესაბამისად, მარჯვენა) A -სიმრავლეთა $f : X \to Y$ მორფიზმის *ბირთვი-კონგრუენცია* ეწოდება $X \times X$ სიმრავლის შემდეგ ქვესიმრავლეს

$$K[f] = \{(x_1, x_2) \in X \times X \colon f(x_1) = f(x_2)\}.$$

წინადადება. ვთქვათ, A მონოიდია, ხოლო $f : X \to Y$ კი მარცხენა (შესაბამისად, მარჯვენა) A-სიმრავლეთა მორფიზმი. მაშინ $K[f]$ მარცხენა (შესაბამისად, მარჯვენა) კონგრუენციაა X-ზე.

დამტკიცება. სიმეტრიულობის გამო საკმარისია განვიხილოთ მარცხენა A-სიმრავლეთა მორფიზმების შემთხვევა.

ვთქვათ, $f : X \to Y$ მარცხენა A-სიმრავლეთა მორფიზმია და $(x, y) \in K[f]$ და $a \in A$.

მაშინ $K[f]$-ის განსაზღვრებიდან გამომდინარე, გვაქვს

$$f(x) = f(y)$$

და ამიტომ

$$af(x) = af(y)$$

ახლა თუ გავითვალისწინებთ, რომ f მარცხენა A-სიმრავლეთა მორფიზმია, მივიღებთ, რომ

$$f(ax) = f(ay),$$

ანუ რომ $(ax, ay) \in K[f]$.

რადგან x, y და a ნებისმიერი იყო, აქედან მიიღება, რომ $K[f]$ მარცხენა A-კონგრუენციაა X-ზე.

მაგალითები.

ვთქვათ, მოცემული გვაქვს ნებისმიერი მარცხენა A -სიმრავლე X . მაშინ X-ზე ყოველთვის გვაქვს შემდეგი ორი კონგრუენცია:

- ტრივიალური (ან დიაგონალური) კონგრუენცია Δ_X, სადაც ყოველი ელემენტი მხოლოდ თავის თავთანაა მიმართებაში

$$\Delta_X = \{(x, x) : x \in X\}$$

- უდიდესი კონგრუენცია ∇_X, სადაც ყოველი ელემენტი მიმართებაშია ყველა ელემენტთან. ამგვარად,

$$\nabla_X = X \times X.$$

ვთქვათ, A მონოიდია, X მარცხენა A-სიმრავლე, ხოლო ϱ კი X-ზე განსაზღვრული კონგრუენციაა.

განსაზღვრება. ϱ კონგრუენციის *ტრანსვერსალი* X-ში ეწოდება ისეთ $T \subseteq X$ სიმრავლეს, რომელიც შეიცავს ϱ-ს თითოეული ექვივალენტობის კლასიდან ზუსტად ერთ წარმომადგენელს.

სხვა სიტყვებით რომ ვთქვათ, $T \subseteq X$ არის ϱ-ს ტრანსვერსალი, თუ სრულდება ტოლობები:

$$\varrho \cap (T \times T) = \Delta_T \text{ და } \cup_{x \in T} [x]_\varrho = X.$$

ექვივალენტური განსაზღვრება. არსებობს კანონიკური $\pi^\varrho : A \longrightarrow A / \varrho$ ასახვის ისეთი სიმრავლური კვეთა, რომ მისი ანასახი A-ში არის T.

განსაზღვრება. $C_A(X)|_T$ სიმბოლოთი აღვნიშნავთ $C_A(X)$-ის იმ ქვესიმრავლეს, რომელიც შედგება ისეთი $\varrho \in C_A(X)$ კონგრუენციებისგან, რომლებისთვისაც T არის ϱ -ს ტრანსვერსალი. ამგვარად,

$$C_A(X)|_T = \{\varrho \in C_A(X) : \ T \text{ არის } \varrho - \text{ს ტრანსვერსალი}\}.$$

მოქმედების ფაქტორ-სიმრავლეები

ვთქვათ, მოცემულია A მონოიდი და მარცხენა A-სიმრავლე X.

$Quot(X)$ სიმბოლოთი აღვნიშნავთ X განსაზღვრის არის მქონე მარცხენა A-სიმრავლეების სურექციული ასახვების კლასს.

შევნიშნოთ, რომ მარცხენა A-სიმრავლეების სურექციები

$$f_Y : X \longrightarrow Y$$

ქმნის წინა-დალაგებას, თუ ვიტყვით, რომ

$$f_Y \leq f_{Y'.}$$

როცა $f_Y = kf_{Y'}$ მარცხენა A-სიმრავლეების რაიმე $k : Y' \longrightarrow Y$ მორფიზმისთვის.

მართლაც, ჩვენ მიერ განსაზღვრული მიმართება არის

1. რეფლექსური, რადგან ყოველი სურექცია $X \longrightarrow Y$ ნაკლებია ან ტოლი თავის თავზე $k = id$ მორფიზმით;
2. ტრანზიტული, რადგან თუ $f_Y \leq f_{Y'}$ და $f_{Y'} \leq f_{Y''}$, ე.ი. თუ არსებობს ისეთი $k : Y' \longrightarrow Y$, რომ $f_Y = kf_{Y'}$ და ისეთი $l : Y'' \longrightarrow Y'$, რომ $f_{Y'} = lf_{Y''}$, მაშინ $k \circ l : Y'' \longrightarrow Y$ იქნება ასახვა, რომლითაც ჩავწერთ $f_Y = (k \circ l)f_{Y''}$, ამიტომ $f_Y \leq f_{Y''}$.

განსაზღვრება. ვიტყვით, რომ მარცხენა A-სიმრავლეების ორი ასეთი სურექციული ასახვა ექვივალენტურია, თუ

$$f_Y \leq f_{Y'} \text{ და } f_{Y'} \leq f_Y,$$

ე.ი. თუ არსებობს მარცხენა A-სიმრავლეების ისეთი ბიექციური ასახვა $l : Y \longrightarrow Y'$, რომ $f_Y = lf_{Y'}$.

განსაზღვრება. ვთვათ, X მარცხენა A-სიმრავლეა. $Quot(X)$ სიმრავლეზე ზემოთ განსაზღვრული ექვივალენტობის მიმართების ექვივალენტობის თითოეულ კლასს ეწოდება მარცხენა A-სიმრავლის *ფაქტორ-სიმრავლე* (ან უბრალოდ, ფაქტორი).

მარცხენა A-სიმრავლეების ნებისმიერი სურექციული ასახვის

$$f_Y : X \longrightarrow Y$$

შესაბამისი ფაქტორს აღვნიშნავთ $[(Y, f_Y)]$ სიმბოლოთი.

განსაზღვრება. ვიტყვით, რომ მარცხენა A-სიმრავლე Y არის მარცხენა A-სიმრავლე X-ის *ფაქტორი,* თუკი არსებობს $X \longrightarrow Y$ მარცხენა A-სიმრავლეების სურექციული ასახვა.

შემდგომში $[Y, f_Y]$ აღნიშვნის ნაცვლად, $Quot(X)$-ში ფაქტორების აღსანიშნად გამოვიყენებთ (Y, f_Y) სიმბოლოს, ან მხოლოდ f_Y-ს, თუმცა ვიგულისხმებთ, რომ ის წარმოადგენს ექვივალენტობის კლასს, როგორც ეს ზემოთ განვმარტეთ.

თეორემა A. ვთქვათ, A მონოიდია, $f : X \longrightarrow Y$ მარცხენა A-სიმრავლეების მორფიზმი, ხოლო ρ კი ისეთი კონგრუენცია X-ზე, რომ

$$x\rho x' \Rightarrow f(x) = f(x')$$

ე.ი. $\rho \leq \ker f$. მაშინ $f'\colon X/\rho \longrightarrow Y$, სადაც $f'\big([x]_\rho\big) := f(x), x \in X$ არის A-სიმრავლეების ერთადერთი მორფიზმი ისეთი, რომ შემდეგი დიაგრამა კომუტაციურია:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\pi_\rho"'] & & Y \\ & X/\rho \arrow[ur, "f'"'] & \end{tikzcd}$$

თუ $\rho = \ker f$, მაშინ f' ინექციურია, ხოლო თუ f სურექციულია, მაშინ f'-იც სურეციულია.

დამტკიცება. პირდაპირი შემოწმება აჩვენებს, რომ $f'\big([x]_\rho\big) = f(x)$ ასახვით დიაგრამა ხდება კომუტაციური და რომ f' არის მარცხენა A-სიმრავლეების მორფიზმი.

შედეგი B. თუ $f : X \longrightarrow Y$ მარცხენა A-სიმრავლეების ეპიმორფიზმია, მაშინ $Y \cong X/\ker f$ როგორც მარცხენა A-სიმრავლეები.

ლემა. ნებისმიერი A მონოიდისთვის შესაბამისობა, რომელიც $(X, f_X) \in Quot(A)$ ფაქტორს უთანადებს $K[f_X]$-ს, განსაზღვრავს ბიექციას

$$Quot(A) \simeq C^l(A).$$

მის შებრუნებულ ასახვას $\rho \in C^l(A)$-ს გადაყავს $(A/\rho,\ \pi^\rho)$-ში.

დამტკიცება. რადგანაც $K[\ \pi^\rho] = \rho$ ნებისმიერი $\rho \in C^l(A)$-თვის, საჩვენებელია მხოლოდ ის, რომ თუ $(X, f_X) \in Quot(X)$, მაშინ $Quot(A)$-ში $[(X, f_X)] = A/K[f_X],\ \pi^{K[fx]}$.

თეორემა A-ს თანახმად, არსებობს ერთადერთი მორფიზმი

$$\overline{f_X} : A/K[f_X] \longrightarrow X$$

ისეთი, რომ შემდეგი დიაგრამა კომუტაციურია:

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[rr, "f_X"] \arrow[dr, "\pi^{K[f_X]}"'] & & X \\
& A/K[f_X] \arrow[ur, "\overline{f}_X"'] &
\end{tikzcd}$$

რადგან $\overline{f_X}$ სურექციაა, $\overline{f_X}$ წარმოადგენს A-იზომორფიზმს შედეგი B-ს თანახმად. ამგვარად, დიაგრამის კომუტაციურობა გვაძლევს ტოლობას

$$[(X, f_X)] = A/K[f_X],\ \pi^{K[fx]}$$

$Quot(A)$-ში.

<u>დამხმარე დებულებები</u>

განსაზღვრება. ვთქვათ, მოცემულია მონოიდთა მორფიზმი

$$\iota : B \longrightarrow A.$$

$Z^l(\iota)$ სიმბოლოთი აღვნიშნავთ ისეთი $q : A \longrightarrow B$ ასახვების სიმრავლეს, რომლებიც აკმაყოფილებს შემდეგ პირობებს:

$(ZL1)$ $q\iota = Id_B$;

$(ZL2)$ $q(\iota(b)a) = bq(a)$, ნებისმიერი $b \in B$ და $a \in A$-სთვის;

$(ZL3)$ $q(aa') = q(a \cdot \iota q(a'))$, ნებისმიერი $a, a' \in A$-სთვის.

$Z^l(\iota)$ სიმრავლის ელემენტებს ვუწოდებთ *1-განზომილებიან დაწევის კოციკლებს.*

სიმეტრიულად, გვაქვს შემდეგი განსაზღვრება.

განსაზღვრება. $Z^r(\iota)$ სიმბოლოთი აღვნიშნავთ იმ $p : A \longrightarrow B$ ასახვების სიმრავლეს, რომლებიც აკმაყოფილებს შემდეგ პირობებს:

$(ZR1)$ $p\iota = Id_B$;

$(ZR2)$ $p(a\iota(b)) = p(a)b$, ნებისმიერი $b \in B$ და $a \in A$-სთვის;

$(ZR3)$ $p(aa') = (\iota p(a) \cdot a')$, ნებისმიერი $a, a' \in A$-სთვის.

ლემა C. ვთქვათ, მოცემულია მონოიდთა ჰომომორფიზმი

$$\iota : B \longrightarrow A.$$

მაშინ ნებისმიერი q ასახვისთვის $Z^l(\iota)$-დან, $\iota(B)$ წარმოადგენს q-ს ბირთვ-კონგრუენციის ტრანსვერსალს:

$$K[q] \in C^l(A)|_{\iota(B)}.$$

დამტკიცება. პირველ რიგში ვაჩვენოთ, რომ $K[q]$ მართლაც წარმოადგენს კონგრუენციას მარცხენა A-სიმრავლეზე $(A, \circ)$.

განვიხილოთ ნებისმიერი $q \in Z^l(\iota)$. მაშინ ცხადია, რომ $K[q]$ არის A სიმრავლეზე განსაზღვრული ექვივალენტობის მიმართება. მეტიც, თუკი $(a_1, a_2) \in K[q]$, მაშინ ბირთვი-კონგრუენციის განსაზღვრების თანახმად

$$q(a_1) = q(a_2)$$

და მაშასადამე, ნებისმიერი $a \in A$ ელემენტისთვის გვაქვს:

$$q(aa_1) = q\big(a \cdot \iota q(a_1)\big) = q\big(a \cdot \iota q(a_2)\big) = q(aa_2),$$

აქ პირველი და მესამე ტოლობა გამომდინარეობს იქიდან, რომ q ასახვა აკმაყოფილებს $(ZL3)$ პირობას.

ამგვარად, მივიღეთ, რომ ნებისმიერი a, a_1, a_2 ელემენტებისთვის A-დან სრულდება შემდეგი:

$$(a_1, a_2) \in K[q] \Longrightarrow q(aa_1) = q(aa_2),$$

და შესაბამისად

$$\big(aa_{1,} aa_2\big) \in K[q].$$

ეს ნიშნავს, რომ $K[q]$ - რომელიც წარმოადგენს ექვივალენტობის მიმართებას A-ზე - არის კონგრუენცია მარცხენა A-სიმრავლეზე $(A,\circ)$.

ახლა ვაჩვენოთ, რომ $\iota(B)$ არის $K[q]$ კონგრუენციის ტრანსვერსალი.

რადგან $(ZL1)$ პირობის თანახმად გვაქვს $q\iota = Id_B$, ამიტომ q სურექციულია და თეორემა A-ს თანახმად, შემდეგი დიაგრამა

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "q"] \arrow[dr, "\pi^{K[q]}"'] & & B \\ & A/K[q] \arrow[ur, "\bar{q}"'] & \end{tikzcd}$$

კომუტაციურია. მაშასადამე, გვაქვს, რომ

$$\bar{q} \cdot \pi^{K[q]} \cdot \iota \cdot \bar{q} = q \cdot \iota \cdot \bar{q} = \bar{q},$$

შესაბამისად სამართლიანია ტოლობაც

$$\pi^{K[q]} \cdot \iota \cdot \bar{q} = Id_{A/K[q]},$$

რადგანაც $\bar{q}$ ბიექციურია.

გარდა ამისა, შევნიშნოთ, რომ $\iota \cdot \bar{q}$-ს ანასახი არის $\iota(B)$, ე.ი. მივიღეთ, რომ $\iota(B)$ წარმოადგენს $K[q]$ კონგრუენციის ტრანსვერსალს. ამგვარად, ვაჩვენეთ, რომ

$$K[q] \in C^l(A)|_{\iota(B)}.$$

ვთქვათ, $\iota : B \longrightarrow A$ მონოიდების ინექციური ჰომომორფიზმია და $\rho \in C^l(A)|_{\iota(B)}$.

q_ρ სიმბოლოთი აღვნიშნოთ ასახვა A-დან B-ში:

$$q_\rho : A \longrightarrow B,$$

რომელსაც $a \in A$ ელემენტი გადაჰყავს ერთადერთ $b \in B$ ისეთ ელემენტში, რომლისთვისაც $[a]_\rho = [\iota(b)]_\rho$ (ასეთი $b \in B$ ელემენტი არსებობს, რადგანაც $\iota(B)$ არის ρ-ს ტრანსვერსალი).

ლემა D. q_ρ ასახვა არის $Z^l(\iota)$ სიმრავლის ელემენტი, (ე.ი. $q_\rho \in Z^l(\iota)$).

დამტკიცება. q_ρ ასახვა რომ ეკუთვნოდეს $Z^l(\iota)$-ს, ის უნდა აკმაყოფილებდეს $(ZL1) - (ZL3)$ პირობებს.

შევამოწმოთ $(ZL1)$ პირობა. რადგანაც

$$\iota(1_B) = 1_A,$$

ამიტომ $[1_A]_\rho = [\iota(1_B)]_\rho$ და ამგვარად

$$q_\rho(1_A) = 1_B.$$

ე.ი. q_ρ აკმაყოფილებს $(ZL1)$ პირობას.

ახლა ვაჩვენოთ, რომ q_ρ აკმაყოფილებს $(ZL2)$ პირობას.

ვთქვათ, $[a]_\rho = [\iota(b)]_\rho$, მაშინ ნებისმიერი $b' \in B$-თვის გვაქვს

$$[\iota(b')a]_\rho = [\iota(b')\iota(b)]_\rho = [\iota(b'b)]_\rho.$$

აქ პირველ ტოლობას ადგილი აქვს იმიტომ, რომ ρ მარცხენა კონგრუენციაა მარცხენა A-სიმრავლეზე $(A,\circ)$, ხოლო მეორე ტოლობას ადგილი აქვს, რადგანაც ι მონოიდთა ჰომომორფიზმია. მივიღეთ, რომ

$$q_\rho(\iota(b')a) = b'b = b'q_\rho(a)$$

და ამგვარად მეორე პირობაც დაკმაყოფილებულია.

$(ZL3)$ პირობის შესამოწმებლად ავიღოთ ნებისმიერი ორი ელემენტი A-დან, $a, a' \in A$. რადგანაც ρ მარცხენა კონგრუენციაა მარცხენა A-სიმრავლეზე $(A, \circ)$ და თანაც

$$[a']_\rho = [\iota(q_\rho(a'))]_\rho,$$

ამიტომ გვაქვს

$$[aa']_\rho = [a\iota(q_\rho(a'))]_\rho$$

საიდანაც მივიღებთ, რომ

$$q_\rho(aa') = q_\rho\big(a\iota(q_\rho(a'))\big).$$

ამგვარად, q_ρ ასახვა აკმაყოფილებს $(ZL1) - (ZL3)$ პირობებს და ამიტომ, $q_\rho \in Z^l(\iota)$.

ძირითადი შედეგები

თეორემა E. ვთქვათ, $\iota : B \longrightarrow A$ მონოიდთა ინექციური ჰომომორფიზმია. მაშინ ასახვა

$$\Gamma : Z^l(\iota) \longrightarrow C^l(A)|_{\iota(B)},$$

$$(q : A \longrightarrow B) \mapsto K[q]$$

არის ბიექცია. მის შებრუნებულ ასახვას აქვს შემდეგი სახე

$$\Gamma' : C^l(A)|_{\iota(B)} \longrightarrow Z^l(\iota),$$

$$\rho \mapsto q_\rho.$$

დამტკიცება. პირველ რიგში, ვაჩვენოთ რომ $\Gamma\Gamma'(q) = q$ ნებისმიერი $q \in Z^l(\iota)$-თვის. მართლაც, რადგან

$$K[q] = \{(a_1, a_2) \in A \times A : q(a_1) = q(a_2)\}$$

და რადგან (ZL1) პირობის თანახმად ნებისმიერი $a \in A$-სთვის სამართლიანია $q(a) = q(\iota q(a))$ ტოლობა, ამიტომ გვაქვს

$$[a]_{K[q]} = [\iota q(a)]_{K[q]}.$$

ეს ნიშნავს, რომ $q_{K[q]}(a) = q(a)$, ხოლო რადგან a ნებისმიერი იყო, ამიტომ

$$q_{K[q]} = q.$$

ახლა ვაჩვენოთ, რომ $\Gamma\Gamma'(\rho) = \rho$ ნებისმიერი $\rho \in C^l(A)|_{\iota(B)}$-თვის. ავიღოთ ნებისმიერი ელემენტი $(a, a') \in K[q_\rho]$. მაშინ

$$q_\rho(a) = q_\rho(a').$$

q_ρ-ს განმარტებიდან გამომდინარე არსებობს ერთადერთი ისეთი b ∈ B ელემენტი, რომელისთისაც სრულდება ტოლობა:

$$[a]_\rho = [\iota(b)]_\rho \text{ და } [a']_\rho = [\iota(b)]_\rho.$$

ამგვარად, $[a]_\rho = [a']_\rho$ და მაშასადამე, $(a, a') \in \rho$.

აქედან მივიღებთ, რომ $K[q_\rho] \subseteq \rho$.

მეორე მხრივ, თუ $(a, a') \in \rho$, მაშინ $[a]_\rho = [a']_\rho$ და შესაბამისად,

$$[a]_\rho = [\iota(b)]_\rho \text{ და } [a']_\rho = [\iota(b)]_\rho$$

ერთადერთი b ∈ B-სთვის, რადგანაც B არის ρ-ს ტრანსვერსალი. აქედან გამომდინარეობს, რომ

$$q_\rho(a) = q_\rho(a')$$

და ამიტომ

$$(a, a') \in K[q_\rho].$$

მივიღეთ, რომ $\rho \subseteq K[q_\rho]$. ამგვარად, $\rho = K[q_\rho]$, რისი დამტკიცებაც გვინდოდა.

შენიშვნა F. შევნიშნოთ, რომ ზემოთ მოყვანილი თეორემის შემთხვევაში, ნებისმიერი

$\rho \in C^l(A)|_{\iota(B)}$-სთვის მისი შესაბამისი ელემენტი $q_\rho \in Z^l(\iota)$ არის ასახვა A-დან B-ში, რომელიც

$a \in A$ ელემენტს შეუსაბამებს ერთადერთ b ∈ B ელემენტს, ისე რომ

$$[a]_\rho = [\iota(b)]_\rho.$$

ასეთი ელემენტი არსებობს, რადგან $\iota(B)$ წარმოადგენს ρ-ს ტრანსვერსალს.

ლემა C. ვთქვათ, A მონოიდია. მაშინ ნებისმიერი $\rho \in C^l(A)$ მარცხენა კონგრუენციისთვის A -ს ერთეულოვანი ელემენტის შესაბამისი ექვივალენტობის კლასი $[1_\mathrm{A}]_\rho$ წარმოადგენს A -ს ქვემონოიდს. სიმეტრიულად, ნებისმიერი $\varrho \in C^r(A)$ მარჯვენა კონგრუენციისათვის $[1_\mathrm{A}]_\varrho$ არის A-ს ქვემონოიდი.

დამტკიცება. ვთქვათ, $\rho \in C^l(A)$ მარცხენა კონგრუენციაა, ხოლო $a, a' \in \mathrm{A}$ ისეთი ელემენტებია, რომლებიც $[1_\mathrm{A}]_\rho$ ექვივალენტობის კლასს ეკუთვნის, ე.ი. გვაქვს

$$[a]_\rho = [1_\mathrm{A}]_\rho\,,$$

$$[a']_\rho = [1_\mathrm{A}]_\rho.$$

რადგანაც ρ მარცხენა კონგრუენციაა, განსაზღვრების თანახმად სრულდება $[aa']_\rho = [\mathrm{a}1_\mathrm{A}]_\rho$ ტოლობა, საიდანაც მივიღებთ, რომ $[aa']_\rho = [\mathrm{a}]_\rho$. ხოლო რადგან $[a]_\rho = [1_\mathrm{A}]_\rho$, ე.ი. $[aa']_\rho = [1_\mathrm{A}]_\rho$.

მივიღებთ, რომ თუ $a, a' \in [1_\mathrm{A}]_\rho$, მაშინ $aa' \in [1_\mathrm{A}]_\rho$, ე.ი. $[1_\mathrm{A}]_\rho$ ჩაკეტილია A მონოიდზე განსაზღვრული გამრავლების მიმართ. მარტივი სანახავია, რომ $[1_\mathrm{A}]_\rho$ ასევე შეიცავს ერთეულოვან ელემენტს, ე.ი. $1_\mathrm{A} \in [1_\mathrm{A}]_\rho$. ამგვარად, ვაჩვენეთ, $[1_\mathrm{A}]_\rho$ არის A-ს ქვემონოიდი.

ანალოგიური მსჯელობით ვაჩვენოთ, რომ $[1_\mathrm{A}]_\varrho$ ასევე A-ს ქვემონოიდია. თუკი $\varrho \in C^r(A)$ მარჯვენა კონგრუენციაა, ხოლო $a, a' \in [1_\mathrm{A}]_\varrho$, მაშინ გვაქვს

$$[a]_\varrho = [1_\mathrm{A}]_\varrho = [a']_\varrho.$$

მარჯვენა კონგრუენციის განსაზღვრებიდან გამომდინარე მივიღებთ

$$[a'a]_\varrho = [1_A a]_\varrho = [1_\mathrm{A}]_\varrho,$$

ამგვარად, თუ $a, a' \in [1_\mathrm{A}]_\varrho$, მაშინ $aa' \in [1_\mathrm{A}]_\varrho$ და ცხადია, ამ შემთხვევაშიც $1_\mathrm{A} \in [1_\mathrm{A}]_\varrho$.

ფაქტორიზაციისათვის აუცილებელი და საკმარისი პირობა

თეორემა H. ნებისმიერი $(A, \circ, 1_{\mathrm{A}})$ მონოიდისათვის ასახვა

$$(\alpha, \beta) \mapsto ([1_{\mathrm{A}}]_{\beta} \mapsto A \leftarrow [1_{\mathrm{A}}]_{\alpha})$$

არის ბიექცია A მონოიდის ფაქტორიზაციათა სიმრავლეს - $FAC(A)$-ს და ისეთ $(\alpha, \beta) \in C^{l}(A) \times C^{r}(A)$ წყვილთა სიმრავლეს შორის, რომლებიც აკმაყოფილებს პირობებს:

(1) $\alpha \cap \beta = \Delta_{A}$;
(2) $[1_{\mathrm{A}}]_{\beta}$ წარმოადგენს α კონგრუენციის ტრანსვერსალს;
(3) $[1_{\mathrm{A}}]_{\alpha}$ წარმოადგენს β კონგრუენციის ტრანსვერსალს.

დამტკიცება. პირველ რიგში ვაჩვენოთ, რომ თეორემაში განსაზღვრული ასახვა, რომელსაც $\mathcal{F}$ სიმბოლოთი აღვნიშნავთ, კორექტულად განსაზღვრული ასახვაა. ამისათვის ავიღოთ მარცხენა და მარჯვენა კონგრუენციების ნებისმიერი წყვილი $(\alpha, \beta) \in C^{l}(A) \times C^{r}(A)$, რომელიც აკმაყოფილებს (1)-(3) პირობებს. შემოვიტანოთ შემდეგი აღნიშვნები: $B = [1_{\mathrm{A}}]_{\alpha}$ და $X = [1_{\mathrm{A}}]_{\beta}$. ლემა G-ს თანახმად, B და X ორივე A მონოიდის ქვემონოიდია. ვაჩვენოთ, რომ $\mathcal{F}(\alpha, \beta) = (X \overset{\iota_X}{\rightarrow} A \overset{\iota_B}{\leftarrow} B)$ არის A-ს ფაქტორიზაცია, ე.ი. ვაჩვენოთ რომ შემდეგი ასახვა

$$[\iota_{X,}\iota_{B}] : X \times B \longrightarrow A, (x, b) \mapsto xb$$

არის ბიექცია. $q \in Z^{l}(\iota)$ და $p \in Z^{r}(\iota)$ იყოს ის ასახვები, რომლებიც თეორემა C-ს და მისი მარჯვენა ვერსიის მიხედვით შეესაბამება α და β კონგრუენციებს. მაშინ ნებისმიერი a ელემენტისთვის A-დან, q(a) არის X-ის ის ერთადერთი ელემენტი, რომლისთვისაც სრულდება ტოლობა

$$[\mathrm{a}]_{\mathrm{a}} = [\mathrm{q}(\mathrm{a})]_{\mathrm{a}}.$$

ანალოგიურად, ნებისმიერი $a \in A$-თვის $p(\mathrm{a})$ არის B-ს ის ერთადერთი ელემენტი, რომლისთვისაც სრულდება ტოლობა

$$[\mathrm{a}]_{\beta} = [\mathrm{q}(\mathrm{a})]_{\beta}.$$

(ეს სამართლიანია შენიშვნა F-ის ძალით).

კერძოდ, გვაქვს რომ

$$\mathrm{q(b)} = 1_A \text{ ნებისმიერი } \mathrm{b} \in \mathrm{B}\text{-თვის}$$

და ამასთან

$$p(x) = 1_A \text{ ნებისმიერი } x \in X\text{-თვის.}$$

აქედან გამომდინარე და იმის გათვალისწინებით, რომ q აკმაყოფილებს $(ZL2)$ პირობას, გვაქვს

$$q(xb) = xq(b) = x1_A = x$$

ანალოგიურად, რადგან p აკმაყოფილებს $(ZR2)$ პირობას, გვაქვს

$$p(xb) = p(x)b = 1_A b = b$$

ნებისმიერი $x \in X$ და $\mathrm{b} \in \mathrm{B}$-თვის.

აქედან მიიღება, რომ შემდეგიკომპოზიციით განსაზღვრული ასახვა

$$X \times B \xrightarrow{[\iota_X, \iota_B]} A \xrightarrow{\langle q, p\rangle} X \times B,$$

სადაც $\langle q, p\rangle : A \longrightarrow X \times B$ არის ასახვა $a \longmapsto (q(a), p(a))$, წარმოადგენს იგივურ ასახვას $Id_{X\times B}$.

ამრიგად იმისათვის, რომ დავამტიცოთ $[\iota_X, \iota_B]$ ასახვის ბიექციურობა, საკმარისი იქნება ვაჩვენოთ $\langle q, p\rangle$ ასახვის ინექციურობა. მაგრამ თუ

$$\langle q, p\rangle(a) = \langle q, p\rangle(a'),$$

მაშინ

$$q(a) = q(a') \text{ და } p(a) = p(a').$$

და მაშასადამე,

$$[a]_\alpha = [q(a)]_\alpha = [q(a')]_\alpha = [a']_\alpha$$

და

$$[a]_\beta = [p(a)]_\beta = [p(a')]_\beta = [a']_\beta.$$

საბოლოოდ მივიღეთ, რომ $(a, a') \in \alpha$ და $(a, a') \in \beta$, საიდანაც გამომდინარეობს, რომ $a = a'$, რადგანაც პირობითა $\alpha \cap \beta = \Delta_A$.

მაშასადამე, $[\iota_X, \iota_B]$ ასახვა ბიექციურია, რაც ამტკიცებს რომ

$$[1_A]_\beta \xrightarrow{\iota_{[1_A]_\beta}} A \xleftarrow{\iota_{[1_A]_\beta}} [1_A]_\alpha$$

წარმოადგენს A-ს ფაქტორიზაციას. ამგვარად, $\mathcal{F}$ კორექტულად განსაზღვრული ასახვაა.

შენიშვნა. შევნიშნოთ, რომ რადგან $K[q] = \{\, (a, a') \in A\ \times A\ : q(a) =\ q(a')\,\}$ და $[a]_\alpha = [a']_\alpha$ გვაქვს მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $q(a) = q(a')$, ამიტომ $K[q] = \alpha$. ანალოგიურად მივიღებთ, რომ $K[p] = \beta$.

ჩვენი შემდეგი მიზანია ვაჩვენოთ, რომ $\mathcal{F}$ ასახვა ბიექციურია. ამისათვის ავაგოთ მისი შექცეული ასახვა $\mathcal{F}^{-1}$.

ვთქვათ, მოცემული გვაქვს A-ს ნებისმიერი ფაქტორიზაცია

$$X \xrightarrow{\iota_X} A \xleftarrow{\iota_B} B\,.$$

მაშინ ასახვა $[\iota_X, \iota_B] : X\ \times B\ \longrightarrow A$ ბიექციაა და ადვილი სანახავია, რომ

$$[\iota_X, \iota_B]^{-1} = \langle q, p\rangle,$$

სადაც q და p შემდეგი ასახვებია:

$$q : A \xrightarrow{[\iota_X, \iota_B]^{-1}} X \times B \xrightarrow{P_X} X$$

და

$$p : A \xrightarrow{[\iota_X, \iota_B]^{-1}} X \times B \xrightarrow{P_B} B.$$

პირდაპირი გამოთვლები გვიჩვენებს, რომ $q \in Z^l(\iota)$ და $p \in Z^r(\iota)$. განვიხილოთ $\alpha = K[q]$ და $\beta = K[p]$. მაშინ ლემა C-სა და მისი მარჯვენა ვერსიის თანახმად,

$$(\alpha, \beta) \in C^l(A) \times C^r(A).$$

ვაჩვენოთ, რომ α და β აკმაყოფილებს (1)-(3) პირობებს.

ჯერ ვაჩვენოთ, რომ α და β აკმაყოფილებს (1) პირობას. თუ $(a, a') \in \alpha \cap \beta$, მაშინ

$$q(a) = q(a') \text{ და } p(a) = p(a'),$$

რაც ნიშნავს, რომ

$$\langle q, p\rangle(a) = \langle q, p\rangle(a'),$$

საიდანაც $a = a'$, რადგან ხოლო რადგან $\langle q, p\rangle$ დაშვებით ბიექციურია.

ახლა ვაჩვენოთ, რომ (2) პირობაც სრულდება. ამისათვის ავიღოთ ნებისმიერი $a \in A$ ელემენტი და შევნიშნოთ, რომ (ZL1)-ის გათვალისწინებით გვაქვს

$$q\big(q(a)\big) = q(a),$$

ამიტომ

$$[a]_\alpha = [q(a)]_\alpha.$$

გარდა ამისა, თუ რაიმე $x, x' \in X$-სთვის $[x]_\alpha = [x']_\alpha$, მაშინ

$$q(x) = q(x')$$

და კვლავ (ZL1)-ის გათვალისწინებით გვაქვს, რომ $x = x'$. ამგვარად, $X = [1_{\mathrm{A}}]_\beta$ სიმრავლე წარმოადგენს α-ს ტრანსვერსალს. ანალოგიურად ვაჩვენებთ, რომ $B = [1_{\mathrm{A}}]_\alpha$ წარმოადგენს β-ს ტრანსვერსალს და შესაბამისად დავამტკიცებთ, რომ (3) პირობაც სრულდება.

ახლა შეგვიძლია, $\mathcal{F}^{-1}$ ($X \xrightarrow{\iota_X} A \xleftarrow{\iota_B} B$) განვსაზღვროთ, როგორც $(K[q], K[p])$ წყვილი და ვაჩვენოთ, რომ $\mathcal{F}\mathcal{F}^{-1} = Id.$ ამისთვის შევნიშნოთ, რომ ნებისმიერი $x \in X$-სთვის

$$[\iota_X, \iota_B](x, 1_{\mathrm{A}}) = x$$

და ნებისმიერი $b \in B$-სთვის

$$[\iota_X, \iota_B](1_{\mathrm{A}}, b) = b,$$

აქედან გამომდინარეობს, რომ

$$[1_{\mathrm{A}}]_{K[q]} = \{a \in A : q(a) = 1_{\mathrm{A}}\} = B$$

და

$$[1_{\mathrm{A}}]_{K[p]} = \{a \in A : p(a) = 1_{\mathrm{A}}\} = X.$$

ბოლოს, შენიშვნის თანახმად გვაქვს, რომ $\mathcal{F}^{-1}\mathcal{F}$ ასევე იგივური ასახვაა. ამით თეორემის დამტკიცება დასრულებულია.

დასკვნა

სამაგისტრო ნაშრომში განხილულია მონოიდთა ფაქტორიზაციასთან დაკავშირებული საკითხები.

ნაშრომის პირველ ნაწილში შემოტანილია ისეთი ძირითადი ცნებები, როგორიცაა მონოიდის ფაქტორიზაცია, მოქმედებები მონოიდზე და მოყვანილია შესაბამისი მაგალითები. შემოღებულია ასევე მოქმედებაზე კონგრუენციების, ტრანსვერსალებისა და მოქმედების ფაქტორის ცნებები და მნიშვნელოვანი ფაქტები მათ გარშემო.

ნაშრომის მეორე ნაწილში განსაზღვრულია *1*-განზომილებიან დაწევის კოციკლები, მოყვანილია დამხმარე ლემები და თეორემები, რომლებიც საჭიროა ძირითადი თეორემის დასამტკიცებლად.

და ბოლოს, დამტკიცებულია ძირითადი თეორემა, რომლითაც ხდება მოცემული მონოიდის მისი ქვემონოიდებით ფაქტორიზაციების სიმრავლის აღწერა კონგრუენციების ტერმინებში.

ნაშრომი არის კვლევითი ხასიათის და ძირითადი თეორემები და დასკვნები წარმოადგენს სიახლეს.

გამოყენებული ლიტერატურა

1. K.S. Brown. Cohomology of groups. Graduate Texts in Mathematics, 87. Springer-Verlag, New York, 1994.
2. Z.A. Balogh, T. Mesablishvili. Some Results on Factorization of Monoids. arXiv:2203.02422 [math.RA] (2022) https://arxiv.org/abs/2203.02422
3. D. Dummit, R. Foote. Abstract algebra. Third edition. John Wiley & Sons, Inc., Hoboken, NJ, 2004.
4. M. Kilp, U. Knauer, A. V. Mikhalev. Monoids, acts and categories. A handbook for students and researchers. De Gruyter Expositions in Mathematics, 29. Walter de Gruyter & Co., Berlin, 2000.
5. B. Mesablishvili. On descent cohomology. Transactions of A. Razmadze Mathematical Institute 173 (2019), 137-155. http://www.rmi.ge/transactions/TRMI-volumes/173-2/r173(2)-9.pdf
6. T. Mesablishvili. On factorization of monoids. Rep. Enlarged Sess. Semin. I. Vekua Appl. Math. 35 (2021), 67–70. http://www.viam.science.tsu.ge/enl_ses/vol35/Mesablishvili.pdf