ივანე ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტი

მარიამ გოზრონიძე

უსასრულო მონო-უნარული ალგებრების ზოგიერთი კომბინატორული თვისება და მათი გამოყენება

სამაგისტრო პროგრამის სახელწოდება: მათემატიკა

მისანიჭებელი აკადემიური ხარისხი: მეცნიერებათა მაგისტრი მათემატიკაში

სამაგისტრო ნაშრომის ხელმძღვანელი – არჩილ ყიფიანი

ფიზიკა მათემატიკის მეცნიერებათა კანდიდატი, ასისტენტ პროფესორი

ზუსტ და საბუნებისმეტყველო მეცნიერებათა ფაკულტეტი,

მათემატიკის დეპარტამენტი

2022

თბილისი

სარჩევი

ანოტაცია

სამაგისტრო ნაშრომში (A, f) მონო-უნარული ალგებრის გრაფის ბმულობის კომპონენტთა ტიპების მიხედვით დადგენილია (A, f^m) მონო-უნარული ალგებრის გრაფის ბმულობის კომპონენტთა ტიპები, როცა f ბიექციაა. გამოკვლეულია კავშირები ამ მონო-უნარული ალგებრების ბმულობის კომპონენტთა შორის. განხილულია დ. კიონიგის ამოცანა ნებისმიერი ჯგუფის გრაფთა ავტომორფიზმების ჯგუფით წარმოდგენის შესახებ. დამტკიცებულია, რომ ნებისმიერი უსასრულო G ჯგუფისათვის და ნებისმიერი კარდინალური α რიცხვისათვის თუ $Card(G) \leq \alpha$, არსებობს α სიმძლავრის გრაფი, რომლის ავტომორფიზმების ჯგუფი იზომორფულია G ჯგუფის. ამით არსებითადაა გაუმჯობესებული ცნობილი კანადელი მათემატიკოსის გერტ საბიდუსის შედეგი, რომელშიც შესაბამისი გრაფის სიმძლავრე ზევრად მეტია წარმოსადგენი ჯგუფის სიმძლავრეზე.

Abstract

In master thesis, according to the types of connected components of (A, f) mono-unary algebra types of connected components of (A, f^m) mono-unary algebra is established, in case of f being bijective. Connections between types of connected components of those mono-unary algebras are analyzed. Kőnig's problem about representation of abstract groups using automorphism group of a graph is discussed. It is proven, that for every infinite G group and every cardinal number α if $Card(G) \leq \alpha$, there exists a graph with cardinality of α, such that its automorphism group is isomorphic to the G. This essentially strengthens the result of the famous Canadian mathematician Gert Sabidoussi.

შესავალი

(A, f) მონო-უნარული, ანუ 1-უნარული ალგებრები დღემდე, თანამედროვე მათემატიკაში (განსაკუთრებით უნივერსალურ ალგებრებში) ინტენსიური კვლევის ობიექტებია.

მაგ. მხოლოდ [1] -ში (M. Novotny), მონო-უნარულ ალგებრებთან დაკავშირებული, მხოლოდ ჩეხი და სლოვაკი მათემატიკოსების 56 ნაშრომია მიმოხილული. იხ. აგრეთვე ჩეხი, ამერიკელი და გერმანელი მათემატიკოსების შრომები: [2]-[3] D. Jakubíková-Studenovská ; [4] S. D. Comer, J. J. Le Tourneau; [5] (J. Hyman); [6] (W. Degen); [7] (B. Jónsson); [8] G. Fuhrken. რომლებიც ასევე მონო-უნარულ ალგებრებთან დაკავშირებულ სხვადასხვა საკითხს იკვლევენ. ეს არცაა გასაკვირი, რადგან მათემატიკაში როგორც სიმრავლის, ისე ფუნქციის ცნება უმნიშვნელოვანესია. ამ ინტერესს აძლიერებს ისიც, რომ ჯერ ერთი, ის რელიაციური სისტემის მეტად მნიშვნელოვან ქვეშემთხვევას წარმოადგენს და რელიაციურ სისტემებთან დაკავშირებული ბევრი ცნობილი პრობლემა სწორედ ამ კერძო შემთხვევების დახმარებით ამოხსნილა. მონო-უნარულ ალგებრასთან ასოცირდება გარკვეული ეკვივალენტობის მიმართება, რომელიც მათი ბმულობის კომპონენტებად დაშლას იწვევს და გრაფთა თეორიის მეტად მოქნილი აპარატის გამოყენების შესაძლებლობას იძლევა.

ჯგუფის წარმოდგენა სხვადასხვა მათემატიკური სტრუქტურის ავტომორფიზმთა ჯგუფის სახით დიდი ხანია ერთ-ერთ საინტერესო ამოცანას წარმოადგენს მათემატიკაში. საწყისად შეიძლება მივიჩნიოთ ბრიტანელი მათემატიკოსის, კელის (A.Cayley) თეორემა, სადაც ნაჩვენებია, რომ ნებისმიერი G ჯგუფი, იზომორფულია G სიმრავლის გადანაცვლებების (პერმუტაციების) ჯგუფის გარკვეული ქვეჯგუფის. ეს არის ერთ-ერთი მაგალითი ჯგუფთა წარმოდგენის თეორემისა, რომლის ძირითადი მიზანიც არის ვიპოვნოთ მოცემული აბსტრაქტული G ჯგუფის ისეთი იზომორფული ჯგუფი, რომლის შესახებაც ჩვენთვის ბევრი რამეა ცნობილი.

ასევე აღსანიშნავია 1946 წელს გამოქვეყნებული ბირკჰოფის (G. Birkhoff) [9] **თეორემა** ნებისმიერი ჯგუფის დისტრიბუტიული მესერის ავტომორფიზმთა ჯგუფით წარმოდგენის შესახებ.

დ. კიონიგმა (D. König) 1936 წელს გამოქვეყნებულ [10]- წიგნში, დასვა შემდეგი:

ამოცანა

შესაძლებელია თუ არა ნებისმიერი აბსტრაქტული ჯგუფისთვის მოიძებნოს გრაფი, რომლის ავტომორფიზმთა ჯგუფიც მოცემული ჯგუფის იზომორფული იქნება.

აღნიშნული საკითხი დადებითად იქნა გადაჭრილი სასრული ჯგუფებისათვის 1938 წელს ფრუხტის (R. Frucht) მიერ [11]- სტატიაში. ხოლო უსასრულო გრაფების შემთხვევაში, პრობლემა 1959 წელს დადებითად გადაჭრა ცნობილმა კანადელმა მათემატიკოსმა გერტ საბიდუსიმ (G. Sabidussi) [12]. მან დაამტკიცა შემდეგი:

თეორემა

თუ $(G,*)$ უსასრულო ჯგუფია, მაშინ არსებობს H გრაფი, ისეთი, რომ ჭეშმარიტია შემდეგი წინადადებები:

1. $Aut(H) \cong (G,*)$;
2. $Card(H) \geq Card(G)$.

შევნიშნოთ, რომ საბიდუსის მიერ აგებული გრაფის სიმძლავრე ბევრად დიდია თავიდან აღებული ჯგუფის სიმძლავრეზე. იმდენად დიდი, რომ მაგალითად თუ $Card(G) = \aleph_0$, მაშინ $Card(H) = \aleph_\omega$. ბუნებრივად ისმის კითხვა, ნებისმიერი G აბსტრაქტული ჯგუფისთვის არსებობს თუ არა საბიდუსის გრაფზე უფრო ნაკლები სიმძლავრის გრაფი (კერძოდ G -ს სიმძლავრის H გრაფი), რომლისთვისაც შესრულდება შემდეგი წინადადება $Aut(H) \cong G$. პრობლემის სასრულ ვარიანტში, ეს საკითხი, დეტალურად იქნა განხილული სხვადასხვა ავტორის, მათ შორის თავად ფრუხტისა და საბიდუსის მიერ. მათ მიერვე იქნა ნაპოვნი მინიმალური სიმძლავრის გრაფები, რომლებიც კიონიგის ამოცანის სასრული ვარიანტის ამოხსნას წარმოადგენს. ანალოგიური, სიმძლავრის მინიმიზაციის პრობლემა წინამდებარე ნაშრომში არის განხილული.

მოცემულ თემასთან დაკავშირებით აღსანიშნავია ასევე ამერიკელი მათემატიკოსის, სტოლერის [13] მიერ დასმული

ამოცანა.

ვთქვათ $(G,*)$ რაიმე უსასრულო ჯგუფია, არსებობს თუ არა B ბინარული მიმართება G −სიმრავლეზე, ისეთი რომ $Aut(G,B) \cong (G,*)$.

ამოცანა 1981 წელს დადებითად იქნა გადაწყვეტილი აკადემიკოს ა. ხარაზიშვილის მიერ.

ანუ მან დაამტკიცა, რომ შესაძლებელია ნებისმიერი უსასრულო ჯგუფის რელიაციური სტრუქტურის ავტომორფიზმთა ჯგუფით წარმოდგენა.

თეორემა (ხარაზიშვილი) [14] [15]

ვთქვათ $(G,*)$ რაიმე ჯგუფი და $Card(G) = \aleph_\alpha$. მაშინ არსებობს $\aleph_\alpha$ სიმძლავრის საბაზისო სიმრავლე E და ბინარული მიმართება $A \subset E^2$ ისეთი, რომ G ჯგუფი იზომორფულია $Aut(E,A)$ ჯგუფის.

საგულისხმოა ასევე შემდეგი შედეგები:

1. ნებისმიერი ჯგუფი წარმოიდგინება ისეთი უნარული ალგებრის ავტომორფიზმების ჯგუფის საშუალებით, რომელიც შეიცავს ერთი ორ ადგილიან ოპერაციას [7].
2. ნებისმიერი ჯგუფი წარმოიდგინება ისეთი ალგებრის ავტომორფიზმების ჯგუფის საშუალებით, რომელიც შეიცავს ორ ერთ ადგილიან ოპერაციას [16].
3. ა. ყიფიანის მიერ იქნა დამტკიცებული, რომ მონო-უნარული ალგებრის ავტომორფიზმის ჯგუფით არ შეიძლება ნებისმიერი ჯგუფის წარმოდგენა, ეს შედეგი გამომდინარეობს შემდეგი თეორემიდან [17]:

თეორემა (ყიფიანი) [17]

ნებისმიერი უსასრულო A სიმრავლისთვის შემდეგი სამი წინადადება ერთმანეთის ექვივალენტურია:

1. $\theta -$ არის ისეთი ნაწილობრივ მონო-უნარული ალგებრის ავტომორფიზმების ჯგუფის სიმძლავრე, რომლის უნივერსიც არის A სიმრავლე.
2. $\theta -$ არის ისეთი მონო-უნარული ალგებრის ავტომორფიზმების ჯგუფის სიმძლავრე, რომლის უნივერსიც არის A სიმრავლე.
3. $1 \le \theta \le \aleph_0$ ან $\theta = 2^\mu$ სადაც $\mu \le Card(A)$.

მოცემულ საკითხებთან მიმართებაში ასევე მნიშვნელოვანია ა. ყიფიანის შემდეგი სტატიები იხ. [18] – [22].

სამაგისტრო ნაშრომში, უსასრულო სიმრავლეთა კომბინატორიკის, ჯგუფთა თეორიის, უსასრულო გრაფთა თეორიის, კერძოდ, ფერადი გრაფების და უნივერსალური ალგებრის მეთოდების გამოყენებით განიხილება შემდეგი ამოცანები:

1. როგორი კომპონენტები შეიძლება ჰქონდეს (A, f^m) $m \in \omega$, მონო-უნარული ალგებრის გრაფს, როცა f ბიექციური ფუნქციაა და ჩვენთვის ცნობილია (A, f) მონო-უნარული ალგებრის გრაფის კომპონენტები?
2. იზომორფულობის საკითხები (A, f^m) და (A, f^n) $(n, m \in \omega)$ მონო-უნარულ ალგებრებს შორის;
3. აბსტრაქტული ჯგუფების გრაფთა ავტომორფიზმების ჯგუფებით წარმოდგენის შესახებ კიონიგის ამოცანა უსასრულო ჯგუფებისათვის.

ამოცანა 1. და 2. გარკვეულწილად წარმოადგენს საბაკალავრო ნაშრომის გაგრძლებას, რომელიც ა. ყიფიანის ხელმძღვანელობით შევასრულე. ამავე ნაშრომის საფუძველზე გამოვაქვეყნეთ სტატია იხ. [23].

მეთოდი, რომელსაც ვიყენებთ ამოცანა 3.-ის გადასაჭრელად, ეყრდნობა აკადემიკოს ა. ხარაზიშვილის თეორემის მტკიცების გზას, მისი კონსტრუქციის გარკვეული მოდიფიკაციით. მტკიცებაში არსებითად გამოიყენება ნებისმიერი სიმძლავრისათვის ა. ყიფიანის მიერ აგებული ამ სიმძლავრის ხისტი ხეები.

ძირითადი ნაწილი

ცნებები

1. (A, f) დალაგებულ წყვილს, სადაც A − რაიმე სიმრავლეა, ხოლო f ამ სიმრავლეზე განსაზღვრული ფუნქციაა უწოდებენ მონო-უნარულ, ან 1-უნარულ ალგებრას.
2. ნაშრომში $\mathbb{N}$- ით აღნიშნული იქნება დადებით მთელ რიცხვთა სიმრავლე, ხოლო ω-თი არაუარყოფით მთელ რიცხვთა სიმრავლე.
3. H- ჯგუფს ეწოდება **ციკლური ჯგუფი**, თუ ის წარმოქმნილია ერთი ელემენტით:
$$\exists h \in H : H = \langle h \rangle = \{h^n \mid n \in \mathbb{Z}\}.$$
ასეთ შემთხვევაში ვიტყვით, რომ h არის H- ჯგუფის **წარმომქმნელი.**
4. ციკლური ჯგუფის წარმომქმნელის **ხარისხი** ეწოდება უმცირეს დადებით მთელ რიცხვს, რომლისთვისაც ჭეშმარიტია შემდეგი:
$$h^n = e.$$
5. (A, f) მონო-უნარულ ალგებრას შეესაბამება **ორიენტირებული გრაფი** (A, E) სადაც $E = \{(a, f(a)) : a \in A\}$. მონო-უნარულ ალგებრათა შესაბამის გრაფებში, ყოველი წერტილის გამომავალი ხარისხი არის 1 (ყოველი წერტილიდან გამოდის ერთი წიბო), შემავალი ხარისხი კი შეიძლება იყოს ნებისმიერი კარდინალური რიცხვი, რომელიც არ აღემატება Card(A)-ს.
6. თუ (A, f) მონო-უნარული ალგებრაა, A სიმრავლეზე განვსაზღვრავთ ***R*** **მიმართებას** შემდეგნაირად: ვიტყვით, რომ xRy (x არის R-მიმართებაში y-თან), თუ მოიძებნება ისეთი ორი ნატურალური რიცხვი, n და m, რომელთათვისაც ჭეშმარიტია შემდეგი: $f^n(x) = f^m(y)$, სადაც $f^0(x) = x,\ f^{n+1}(x) = f(f^n(x))$.
$$(x, y) \in R \iff \exists m \in \mathbb{N}\ \exists n \in \mathbb{N}\ \big(f^n(x) = f^m(y)\big)$$
7. ვთქვათ (A, f) მონო-უნარული ალგებრაა. $\{(A_i, f_i) : i \in I\}$ ოჯახს, სადაც $\{A_i : i \in I\}$ არის ოჯახი R − ექვივალენტობის კლასებისა, ხოლო $f_i = f_{|A_i}$, ეწოდება (A, f) მონო-უნარული ალგებრის **ბმულობის კომპონენტთა** ოჯახი. ეს ფაქტი მოკლედ ასე ჩავწეროთ:
$$(A, f) = \bigcup_{i \in I} (A_i, f_i).$$
თუ I ერთ ელემენტიანია, მაშინ (A, f) -ს ბმული მონო-უნარული ალგებრა ეწოდება.

8. **ბმულობის კომპონენტების ტიპები:**

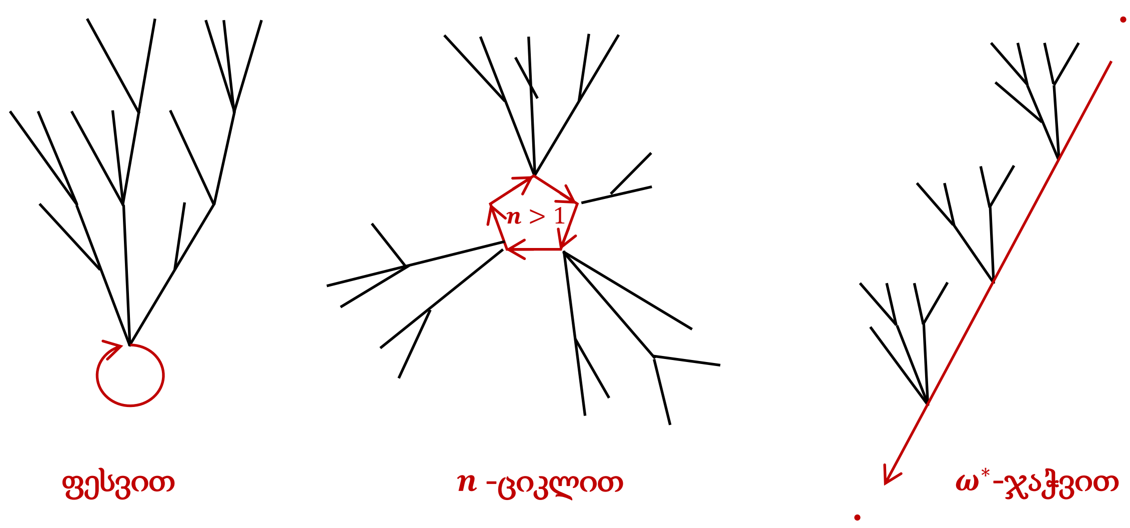
I ტიპი. თუ (A, f) ალგებრის რაიმე კომპონენტს აქვს უძრავი წერტილი, მაშინ ამ კომპონენტს **ფესვიანი მონო-უნარი** ეწოდება.

II ტიპი. თუ $n > 1$ უმცირესი მთელი რიცხვია, ისეთი, რომ რომელიღაც $x \in A$ წერტილისთვის $f^{\mathrm{n}}(x) = x$, მაშინ კომპონენტს, რომელშიც ასეთი წერტილი შედის **n - ციკლიანი** კომპონენტი ჰქვია.

III ტიპი. თუ არსებობს A სიმრავლის ელემენტებისაგან შემდგარი ინიექციური ოჯახი $\{a_n : n \in \omega\}$, რომლისთვისაც სრულდება შემდეგი პირობა: $f(a_n) = a_{n+1}$, $n \in \omega$, ვიტყვით, რომ (A, f) ალგებრა შეიცავს **ω ჯაჭვს.**

III′ ტიპი. თუ არსებობს A სიმრავლის ელემენტებისაგან შემდგარი ინიექციური ოჯახი $\{a_n : n \in \omega\}$, რომლისთვისაც სრულდება შემდეგი პირობა: $f(a_{n+1}) = a_n$, $n \in \omega$, ვიტყვით, რომ (A, f) ალგებრა შეიცავს **ω^* ჯაჭვს.**

III′′ტიპი. თუ არსებობს A სიმრავლის ელემენტებისაგან შემდგარი ინიექციური ოჯახი $\{a_n : n \in \mathbb{Z}\}$, რომლისთვისაც სრულდება შემდეგი პირობა: $f(a_n) = a_{n+1}$, $n \in \mathbb{Z}$, ვიტყვით, რომ (A, f) ალგებრა შეიცავს ***Z* ჯაჭვს**.

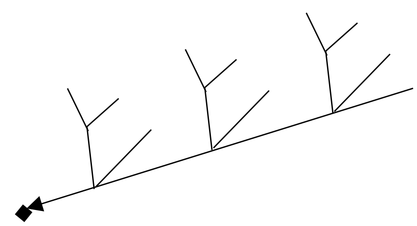


ფესვით $\quad$ n -ციკლით $\quad$ ω^*-ჯაჭვით

9. **მონო-უნარული ალგებრის ავტომორფიზმი:** თუ (A, f) მონო-უნარული ალგებრაა, $\varphi: A \to A$ ბიექციურ ასახვას ეწოდება (A, f) $-$ ის ავტომორფიზმი, თუ იგი f ოპერაციას ინახავს ანუ თუ სრულდება შემდეგი პირობა $\varphi \circ f = f \circ \varphi$, ანუ $f = \varphi^{-1} \circ f \circ \varphi$.

10. (A, f) ალგებრის ყველა ავტომოტფიზმთა სიმრავლე ქმნის ჯგუფს, ის $Aut(A, f) -$ ით აღინიშნება.
11. **ნაწილობრივი მონო-უნარული ალგებრა** ეწოდება (A, f) წყვილს, სადაც A არაცარიელი სიმრავლეა, ხოლო $f : A \to A$ ნაწილობრივი ფუნქციაა A -ზე.
12. **ნაწილობრივი მონო-უნარული ალგებრის გრაფების ბმულობის კომპონენტები**:
ნაწილობრივად მონო-უნარული ალგებრების შესაბამის გრაფებში შეიძლება მოიძებნოს წვეროები, რომელთა გამომავალი ხარისხი 0-ის ტოლია. ასეთი წერტილები აჩენენ ახალი ტიპის კომპონენტებს, ამიტომ გარდა I, II, III ტიპის კომპონენტებისა შეიძლება შეგვხვდეს
IV ტიპის კომპონენტი - იზოლირებული წერტილი და **V ტიპის კომპონენტი**: ფესვიანი ხე, რომლის ფესვის გამომავალი ხარისხიც 0-ის ტოლია;

იზოლირებული წერტილები



13. **კავშირი დალაგებასთან:** თუ (A, f) მონო-უნარული ალგებრა არ შეიცავს $n -$ ციკლს, მაშინ A სიმრავლეზე შემოვიტანოთ დალაგება შემდეგნაირად:
$$x \leq y \equiv \exists n(n \in \omega \;\&\; f^n(x) = y).$$
ადვილად მოწმდება, რომ, ეს დალაგების მიმართებაა A სიმრავლეზე.
14. მონო-უნარულ ალგებრას ეწოდება **ხისტი**, თუ მას გააჩნია მხოლოდ ტრივიალური ავტომორფიზმი.

პარაგრაფი 1

ამ პარაგრაფში განხილულია შემდეგი

ამოცანა.

(A, f) მონო-უნარული ალგებრის გრაფის კომპონენტთა ტიპებისა და მათი რაოდენობების მიხედვით აღვწეროთ (A, f^m) მონო-უნარული ალგებრის გრაფის კომპონენტების ტიპები და რაოდენობები.

ამოცანა ამოხსნილია სრულად, როდესაც f ბიექციაა. განხილულია შემთხვევები, როდესაც f ბიექცია არ არის.

პარაგრაფი 1.1

განვიხილოთ შემთხვევა, როდესაც f ბიექციაა.

ლემა 1.1.1

ვთქვათ n და m ფიქსირებული მთელი დადებითი რიცხვებია და (A, f) მონო-უნარული ალგებრის გრაფი შედგება n-ციკლებისაგან, მაშინ (A, f^m) მონო-უნარული ალგებრის გრაფი შედგება $\frac{n}{\mathrm{d}}$-ციკლებისაგან, სადაც $d = უსგ(n, m)$.

დამტკიცება

ვთქვათ:

$$(A, f) = \bigcup_{i \in I} (A_i, f_i)$$

სადაც, $\forall i$-თვის (A_i, f_i) არის (A, f)- ის ბმული კომპონენტი. შევნიშნოთ, რომ $\{ f^k : 0 \leq k < n \}$ სიმრავლე კომპოზიციის მიმართ წარმოადგენს ციკლურ ჯგუფს, სადაც წარმომქმნელია f, ხოლო ნეიტრალური ელემენტია $f^0 = f^n$, მართლაც

$$f^0 \circ f^i(x) = f^{0+i}(x) = f^i(x),$$

$f^i(x)$ −ის მოპირდაპირე ელემენტი იქნება $f^{n-i}(x)$,

$$f^i \circ f^{n-i}(x) = f^{i+n-i}(x) = f^n(x) = f^0(x),$$

სრულდება ასოციატიურობის -

$$f^i \circ \left(f^j \circ f^k(x)\right) = \left(f^i \circ f^j\right) \circ f^k(x) = f^{i+j+k}(x),$$

და კომუტატიურობის -

$$f^j \circ f^k(x) = f^k \circ f^j(x)$$

პირობები. შესაბამისად, საქმე გვაქვს აბელურ ჯგუფთან.

ანუ, როცა (A, f) მონო-უნარული ალგებრის გრაფში n - ციკლები გვაქვს, მაშინ

$$(\{ f^k: 0 \leq k < n\}, \circ)$$

ციკლური ჯგუფის ხარისხი n -ის ტოლია ე.ი. ამ ციკლური ჯგუფის წარმომქმნელის f-ის ხარისხი ($|f|$) n-ის ტოლია, მაშინ $|f^m| = \frac{n}{d}$ (რადგან ცნობილია რომ, თუ $|a| = n$, ციკლურ ჯგუფში, სადაც წარმომქმნელია a ელემენტი, მაშინ $|a^m| = \frac{n}{d}$). შესაბამისად (A, f^m) მონო-უნარული ალგებრის გრაფი შედგება $\frac{n}{d}$ − ციკლებისაგან.

საილუსტრაციოდ მოვიყვანოთ მაგალითი, $n = 9$ −თვის, (ფიგ.1).

ლემა 1.1.2

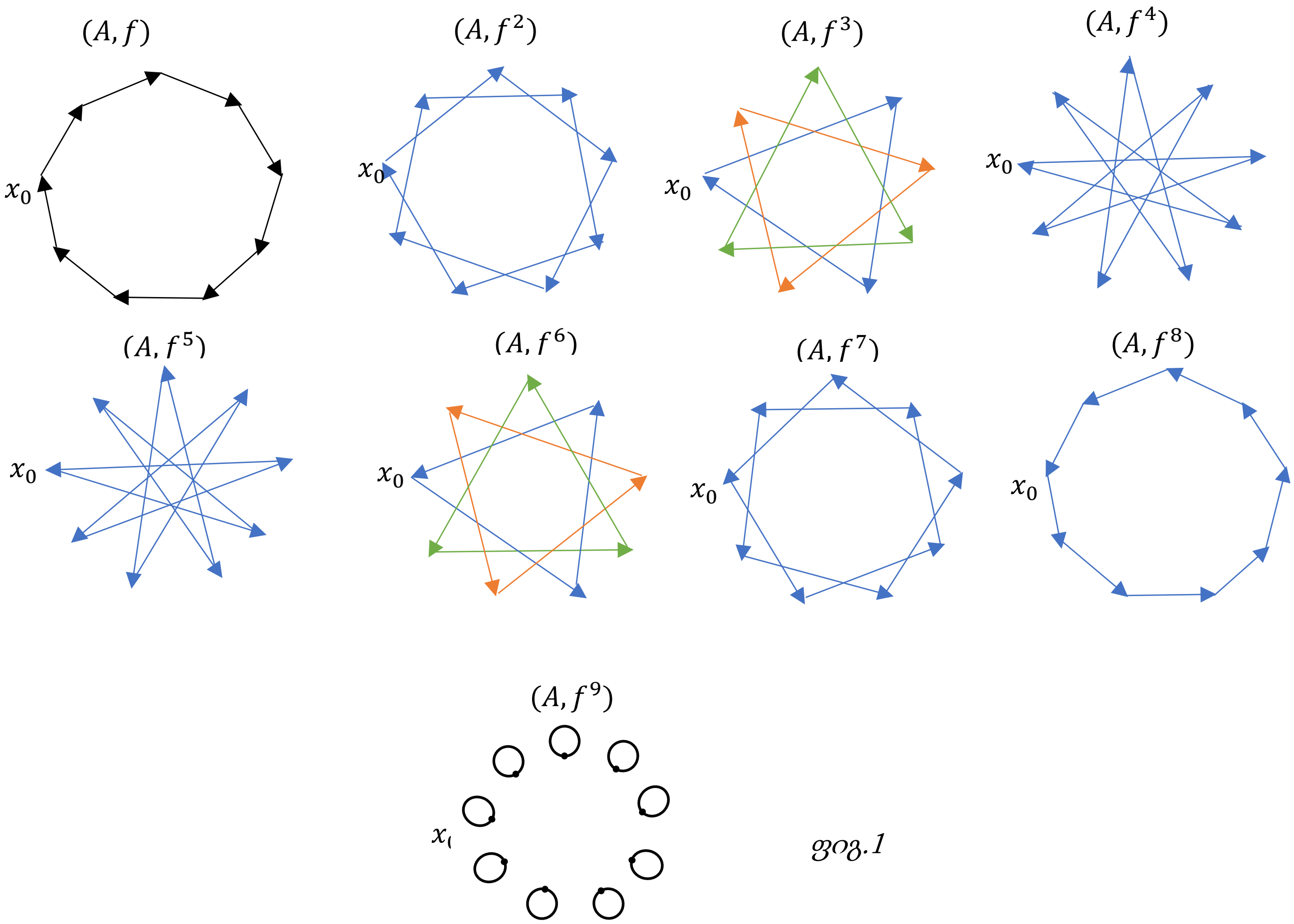
ვთქვათ (A, f) მონო-უნარული ალგებრის გრაფი შედგება n-ციკლებისაგან, მაშინ ჭეშმარიტია შემდეგი წინადადება:

$$უსგ(n, i) = უსგ(n, j) \Leftrightarrow \left(A, f^i\right) \cong \left(A, f^j\right)$$

დამტკიცება

ლემა 1.1.1-დან გამომდინარე შეგვიძლია ვთქვათ, რომ თუ (A, f) მონო-უნარული ალგებრის გრაფი შედგება n-ციკლებისაგან, მაშინ $\left(A, f^i\right)$ მონო-უნარული ალგებრის გრაფში გვექნება $\frac{n}{უსგ(n,i)}$ ციკლები, ხოლო $\left(A, f^j\right)$ მონო-უნარული ალგებრის გრაფში გვექნება $\frac{n}{უსგ(n,j)}$ ციკლები;

შესაბამისად, (A, f^i) მონო – უნარულ ალგებრის და (A, f^j) მონო-უნარულ ალგებრის გრაფებს შორის შევძლებთ იზომორფიზმის დამყარებას მაშინ და მხოლოდ მაშინ, თუ $\frac{n}{\text{უსგ}(n,i)} = \frac{n}{\text{უსგ}(n,j)}$ ე.ი. თუ $\text{უსგ}(n,i) = \text{უსგ}(n,j)$. საიდანაც გამომდინარეობს ლემა 1.1.2 -ის მართებულობა.



ფიგ.1

ლემა 1.1.3

ვთქვათ (A, f) უსასრულო მონო-უნარული ალგებრის გრაფი შედგება: Z-ჯაჭვებისაგან (ფიგ. 2) (ორმხრივ უსასრულო ციკლები), მაშინ (A, f^m) მონო-უნარული ალგებრის გრაფში კომპონენტების ტიპები კვლავ Z-ჯაჭვები იქნება.

$$(A,f): \quad \cdots \; f^{-1}(x) \longrightarrow x \longrightarrow f^{1}(x) \longrightarrow f^{2}(x) \longrightarrow f^{3}(x) \; \cdots$$

ფიგ.2

$$(A,f^{m}): \quad \cdots \; f^{-m}(x) \longrightarrow x \longrightarrow f^{m}(x) \longrightarrow f^{2m}(x) \longrightarrow f^{3m}(x) \; \cdots$$

დამტკიცება

ვთქვათ:

$$(A,f) = \bigcup_{i\in I}(A_i, f_i)$$

(A,f) მონო-უნარული ალგებრის გრაფი შედგება: Z-ჯაჭვებისაგან ნიშნავს, რომ $\forall x \in A_i$, A_i შეიძლება წარმოვიდგინოთ, როგორც

$$\{f^{k}(x), k \in \mathbb{Z}\}.$$

ხოლო, თუ განვიხილავთ (A,f^{m}) მონო-უნარულ ალგებრას, მისი კომპონენტი, რომელიც შეიცავს x-ს შეიძლება წარმოვადგინოთ შემდეგნაირად:

$$\{(f^{m})^{k}(x), k \in \mathbb{Z}\}.$$

შესაბამისად, (A,f) მონო-უნარული ალგებრის გრაფის თითოეული (A_i, f_i) ბმული კომპონენტი წარმოქმნის m-ცალ Z-ჯაჭვს (A,f^{m}) მონო-უნარული ალგებრის გრაფში.

შედეგი 1.1.4

თუ (A,f) უსასრულო მონო-უნარული ალგებრის გრაფი შედგება: უსასრულო რაოდენობა Z-ჯაჭვებისაგან, მაშინ ნებისმიერი $i-$სა და $j-$სათვის მართებულია ფორმულა

$$\left(A,f^{i}\right) \cong \left(A,f^{j}\right).$$

დამტკიცება

ლემიდან გამომდინარე (A, f)-ის თითოეული Z-ჯაჭვი წარმოქმნის i-ცალ Z-ჯაჭვს (A, f^i)-ში, ხოლო j-ცალს (A, f^j)-ში. ანუ ორივეგან გვექნება Z-ჯაჭვების თვლადი რაოდენობა და მხოლოდ ისინი და ცხადია, რომ მართებული იქნება $(A, f^i) \cong (A, f^j)$ ფორმულა.

ლემა 1.1.5

თუ (A, f) მონო-უნარული ალგებრის გრაფი შედგება მხოლოდ სასრული ციკლებისაგან, მაშინ (A, f^m) (სადაც $m \in \mathbb{N}$) მონო-უნარული ალგებრის გრაფიც მხოლოდ სასრული ციკლებისაგან შედგება.

დამტკიცება

თუ (A, f) მონო-უნარული ალგებრის გრაფი შედგება მხოლოდ სასრული ციკლებისაგან, ლემა 1.1.1 -ის გამოყენებით, ცხადია, რომ თითოეული ეს სასრული ციკლი (A, f^m) ალგებრაში წარმოქმნის მხოლოდ სასრული რაოდენობის ციკლებს, ამიტომ (A, f^m) ალგებრაში მხოლოდ სასრული რაოდენობის ციკლები იქნება.

თეორემა 1.1.6

თუ (A, f) უსასრულო მონო-უნარული ალგებრის გრაფი შედგება მხოლოდ სასრული და უსასრულო ციკლებისაგან (Z-ჯაჭვებისაგან), მაშინ (A, f^m) მონო-უნარული ალგებრის გრაფშიც იქნება როგორც სასრული ასევე უსასრულო ციკლები და მხოლოდ ისინი.

დამტკიცება

ადვილად გამომდინარეობს ლემა1.1.3 -დან და ლემა 1.1.5-დან.

თეორემა 1.1.6 ამოწურავს შემთხვევებს, როდესაც f ბიექციაა.

<u>პარაგრაფი 1.2</u>

განვიხილოთ რამდენიმე შემთხვევა, როდესაც f ბიექციური ფუნქცია არ არის.

შევნიშნოთ, რომ ჭეშმარიტია შემდეგი ლემები:

თეორემა 1.2.1

თუ (A, f) უსასრულო ნაწილობრივ მონო-უნარული ალგებრის გრაფი შედგება: $\boldsymbol{\omega}^*$-ჯაჭვებისაგან (ფიგ. 3), მაშინ (A, f^m) ნაწილობრივ მონო-უნარული ალგებრის გრაფში კომპონენტების ტიპები უცვლელი დარჩება.

დამტკიცება

ვთქვათ:

$$(A, f) = \bigcup_{i \in I} (A_i, f_i)$$

თუ (A, f) ნაწილობრივ მონო-უნარული ალგებრის გრაფი შედგება: $\boldsymbol{\omega}^*$-ჯაჭვებისაგან ნიშნავს, რომ $\forall x \in A_i$, A_i შეიძლება წარმოვიდგინოთ, როგორც

$$\{f^{-k}(x), k \in \omega\}.$$

ხოლო, თუ განვიხილავთ (A, f^m) ნაწილობრივ მონო-უნარულ ალგებრას, მისი კომპონენტი, რომელიც შეიცავს x შეიძლება წარმოვადგინოთ შემდეგნაირად:

$$\{(f^m)^{-k}(x), k \in \omega\}.$$

შესაბამისად, (A, f) ნაწილობრივ მონო-უნარული ალგებრის გრაფის თითოეული (A_i, f_i) ბმული კომპონენტი წარმოქმნის m-ცალ $\boldsymbol{\omega}^*$-ჯაჭვს (A, f^m) ნაწილობრივ მონო-უნარული ალგებრის გრაფში.

$$(A, f) \quad \cdots\ f^{-4}(x) \longrightarrow f^{-3}(x) \longrightarrow f^{-2}(x) \longrightarrow f^{-1}(x) \longrightarrow x$$

$$(A, f^m) \quad \cdots\ f^{-4m}(x) \longrightarrow f^{-3m}(x) \longrightarrow f^{-2m}(x) \longrightarrow f^{-m}(x) \longrightarrow x$$

ფიგ.3

აქედან მართებულია შემდეგი:

შედეგი 1.2.2

თუ (A, f) უსასრულო ნაწილობრივ მონო-უნარული ალგებრის გრაფი შედგება უსასრულო რაოდენობა $\boldsymbol{\omega}^*$-ჯაჭვებისაგან, მაშინ ნებისმიერი $i -$ სა და $j -$ ისათვის მარტებულია შემდეგი ფორმუალა

$$\left(A, f^i\right) \cong \left(A, f^j\right).$$

თეორემა 1.2.3

თუ (A, f) უსასრულო მონო-უნარული ალგებრის გრაფი შედგება: $\boldsymbol{\omega}$-ჯაჭვებისაგან (ფიგ. 3), მაშინ (A, f^m) მონო-უნარული ალგებრის გრაფში კომპონენტების ტიპები უცვლელი დარჩება.

დამტკიცება

მტკიცდება თეორემა 1.2.1-ის ანალოგიურად.

აქედან მართებულია შემდეგი:

შედეგი 1.2.4

თუ (A, f) უსასრულო მონო-უნარული ალგებრის გრაფი შედგება უსასრულო რაოდენობა $\boldsymbol{\omega}$-ჯაჭვებისაგან მაშინ ნებისმიერი $i -$ სა და $j -$ ისათვის მართებულია შემდეგი ფორმულა

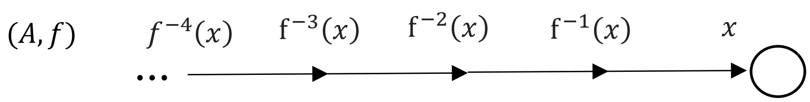
$$\left(A, f^i\right) \cong \left(A, f^j\right).$$

თეორემა 1.2.5

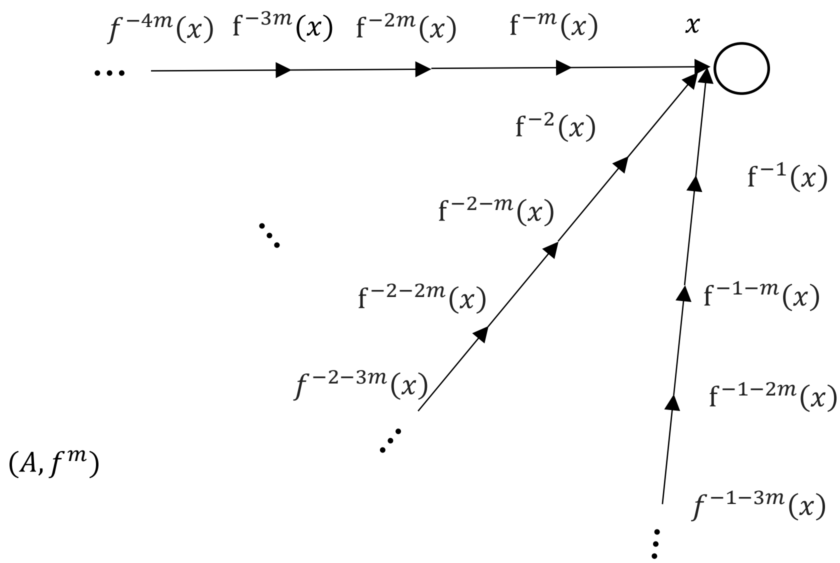
თუ (A, f) უსასრულო მონო-უნარული ალგებრის გრაფი შედგება კომპონენტებისაგან, რომელთაგან თითოეული წარმოადგენს მარყუჟით დაბოლოებულ ω^* ჯაჭვს (ფიგ.4), მაშინ ნებისმიერი $m \geq 2 -$თვის (A, f^m) მონო-უნარული ალგებრის გრაფი შედგება ერთმანეთის

იზომორფული კომპონენტებისაგან, რომელთაგან თითოეული წარმოადგენს ერთი საერთო წვეროს, მარყუჟის, მქონე m ცალი ω^* ჯაჭვისაგან შექმნილ ფესვიან ხეს (ფიგ.5).

ბმულობის კომპონენტების სიმრავლის სიმძლავრე კი (A, f) და (A, f^m) ალგებრებში ერთმანეთის ტოლია.



ფიგ.4



ფიგ.5

დამტკიცება

ვთქვათ:

$$(A, f) = \bigcup_{i \in I} (A_i, f_i)$$

თეორემა 1.2.5-ის მიხედვით თითოეული (A_i, f_i) წარმოადგენს ფესვიან ჯაჭვს (ფიგ.4). ამიტომ ნებისმიერი i-თვის

$$A_i = \{f^{-k}(x), k \in \omega\}.$$

ადვილი დასანახია, რომ მართებულია ტოლობები:

$$f^m(f^{-k})(x) = x, \text{როცა } k \in \{0,1, \dots, m\}.$$

$$f^m\left(f^{-k}(x)\right) = f^{-k+m}(x), \text{ როცა } k > m$$

აქედან ცხადია, რომ (A, f^m) ალგებრაში, უძრავი წერტილების ხარისხი $m+1$-ის ტოლია და თითოეულ ბმულ კომპონენტს აქვს (ფიგ.5)-ზე ნაჩვენები სახე.

თეორემა1.2.5-ის გათვალისწინებით მართებულია

შედეგი 1.2.6

თუ (A, f) უსასრულო მონო-უნარული ალგებრის გრაფი შედგება თეორემა1.2.5-ში დახასიათებული ბმული კომპონენტებისაგან და $i \neq j$, მაშინ $\left(A, f^i\right)$ და $\left(A, f^j\right)$ მონო-უნარული ალგებრები არაიზომორფულია.

დამტკიცება

$\left(A, f^i\right)$ და $\left(A, f^j\right)$ ალგებრებში ხეების ფესვების შემავალი ხარისხები განსხვავებულია.

თეორემა 1.2.7

თუ (A, f) ნაწილობრივ მონო-უნარული ალგებრის გრაფი შედგება n სიგრძის სასრული უმარყუჟო ჯაჭვებისაგან (ფიგ. 6), მაშინ (A, f^m) ნაწილობრივ მონო-უნარული ალგებრის გრაფს ექნება შემდეგი სახე:

შემთხვევა I

თუ $m \geq n$, მაშინ (A, f^m) ნაწილობრივ მონო-უნარული ალგებრის გრაფი შემდგარი იქნება მხოლოდ იზოლირებული წერტილებისაგან, ანუ A სიმრავლის ყოველი წერტილი f^m ფუნქციის განსაზღვრის არის გარეთ მოექცევა.

შემთხვევა II

თუ $m < n$ $(m \geq 2)$ (ვთქვათ $n = pm + q$, სადაც $p, q \in \mathbb{N}$), (A, f)-ის თითოეული კომპონენტი (A, f^m) ნაწილობრივ მონო-უნარული ალგებრის გრაფში:

i. წარმოქმნის m-ცალ p-წვეროიან სასრულ უმარყუჟო ჯაჭვს, თუ $m|n$;

ii. წარმოქმნის $q -$ ცალ $(p+1) -$ წვეროიან სასრულ უმარყუჟო ჯაჭვს, და დანარჩენი წვეროები, $(n-q(p+1))$ $-$ცალი წვერო, გადანაწილდება თანაბრად p $-$წვეროიან $\frac{(n-q(p+1))}{p}$ -ცალ სასრულ უმარყუჟო ჯაჭვში, თუ $m \dagger n$ (ფიგ.7);

$$(A,f) \quad \xrightarrow{x_1} \xrightarrow{x_2} \xrightarrow{x_3} \;\dots\; \xrightarrow{x_{n-1}} \bullet \, x_n$$

ფიგ.6

აქედან ცხადია, რომ მართებულია შემდეგი

შედეგი 1.2.8

თუ (A,f) ნაწილობრივ მონო-უნარული ალგებრა შედგება თეორემა 1.2.7-ში დახასიათებული ბმული კომპონენტებისაგან და

1. თუ $i \geq n$ და $j \geq n$, (A,f^i) და (A,f^j) ალგებრები იზომორფულია;
2. თუ $i \neq j$ და $i < n$ ან $j < n$ (A,f^i) და (A,f^j) ალგებრები არაიზომორფულია;

სადაც $i,j \in \mathbb{N}$.

დამტკიცება

წინადადება 2.-ის დასამტკიცებლად ვთქვათ დებულებაში ჩამოთვლილი პირობები სრულდება და ვთქვათ $(A,f^i)\cong(A,f^j)$, მაშინ რადგან ჭეშმარიტია შემდეგი დამოკიდებულებები:

$$n = pi + q \text{ და } n = p'j + q'$$

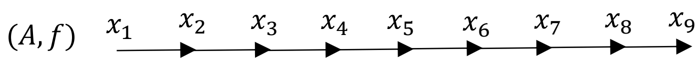
გვექნება, რომ

$$p = p' \text{ და } q = q'.$$

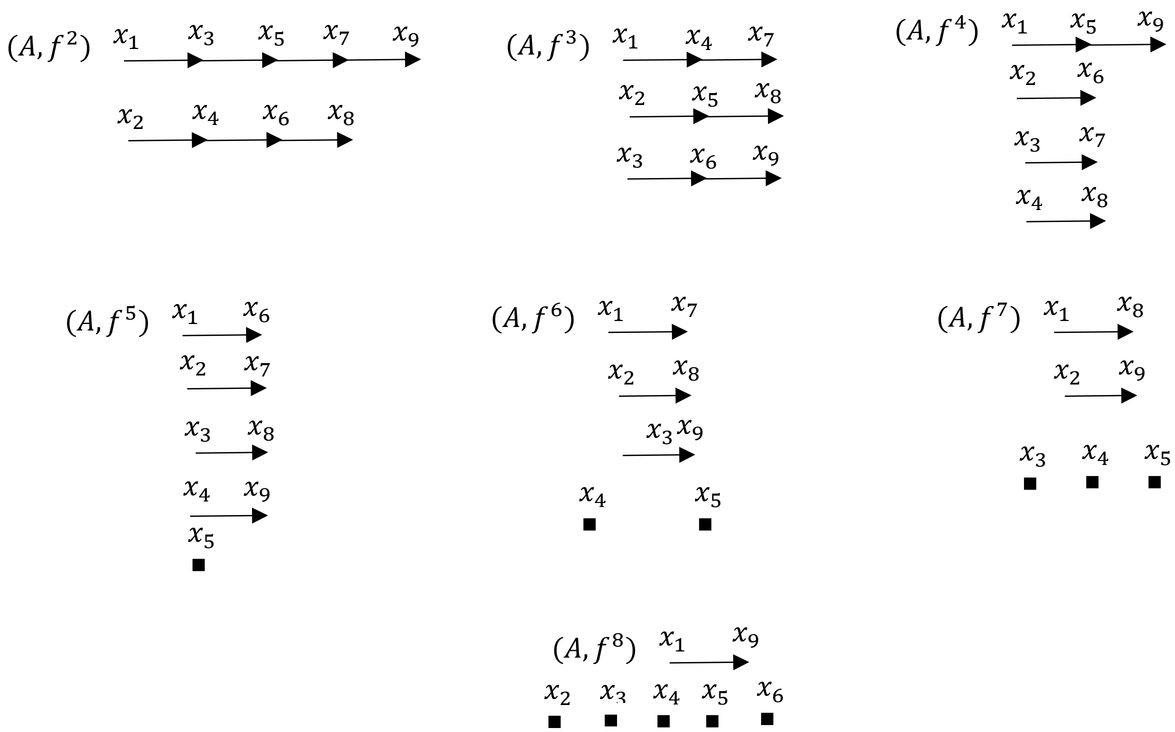
$(p,q,p',q' \in \mathbb{N})$, ე. ი. მივიღეთ წინააღმდეგობა $i \neq j$- თან.

წინანდადება 1. ცხადია თეორემა 1.2.7-ის შემთხვევა I -ის გათვალისწინებით.

ახლა, მოვიყვანოთ $n = 9$ -ის მაგალითი, $m \geq n$ შემთხვევა ტრივიალურია და ფიგ.7 -ზე მოცემული იქნება მხოლოდ: $m < n$- ის დროს (A, f^m) ნაწილობრივ მონო-უნარული ალგებრების გრაფები.



ფიგ.7



თეორემა 1.2.9

ვთქვათ (A, f) მონო-უნარული ალგებრის გრაფი შედგება სასრული ფესვიანი n სიგრძის ჯაჭვებისაგან (ფიგ. 8). მაშინ, (A, f^m) მონო-უნარული ალგებრის გრაფის კომპონენტებს ექნება შემდეგი სახე:

შემთხვევა I

როცა $m \geq n - 1$, $i \in \{1,2, \dots, n-1\}$ და x_i არის (A, f) ალგებრის შესაბამისი გრაფის რომელიმე კომპონენტის წვეროები

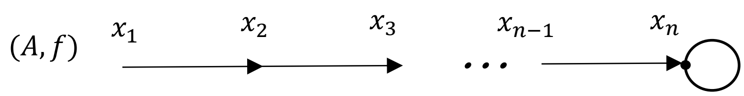
$$f^m(x_i) = x_n$$

მაშინ (A, f^m) მონო-უნარული ალგებრის გრაფი შედგება ფესვიანი ხეებისაგან, თითოეულ მათგანში უძრავი წერტილის შესაბამისი წვეროს შემომავალი ხარისხი იქნება n-ის ხოლო ხეს ექნება მხოლოდ ნულოვანი და პირველი დონე იხ. ფიგ.9.

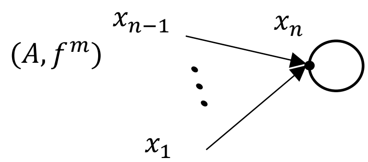
შემთხვევა II

ვთქვათ, $m < n - 1$, მაშინ $(A, f^m) -$ მონო-უნარული ალგებრის გრაფის კომპონენტები ფესვიანი ხეებია, უძრავი წერტილის შესაბამისი წვეროს შემომავალი ხარისხი $(m + 1)$- ია.

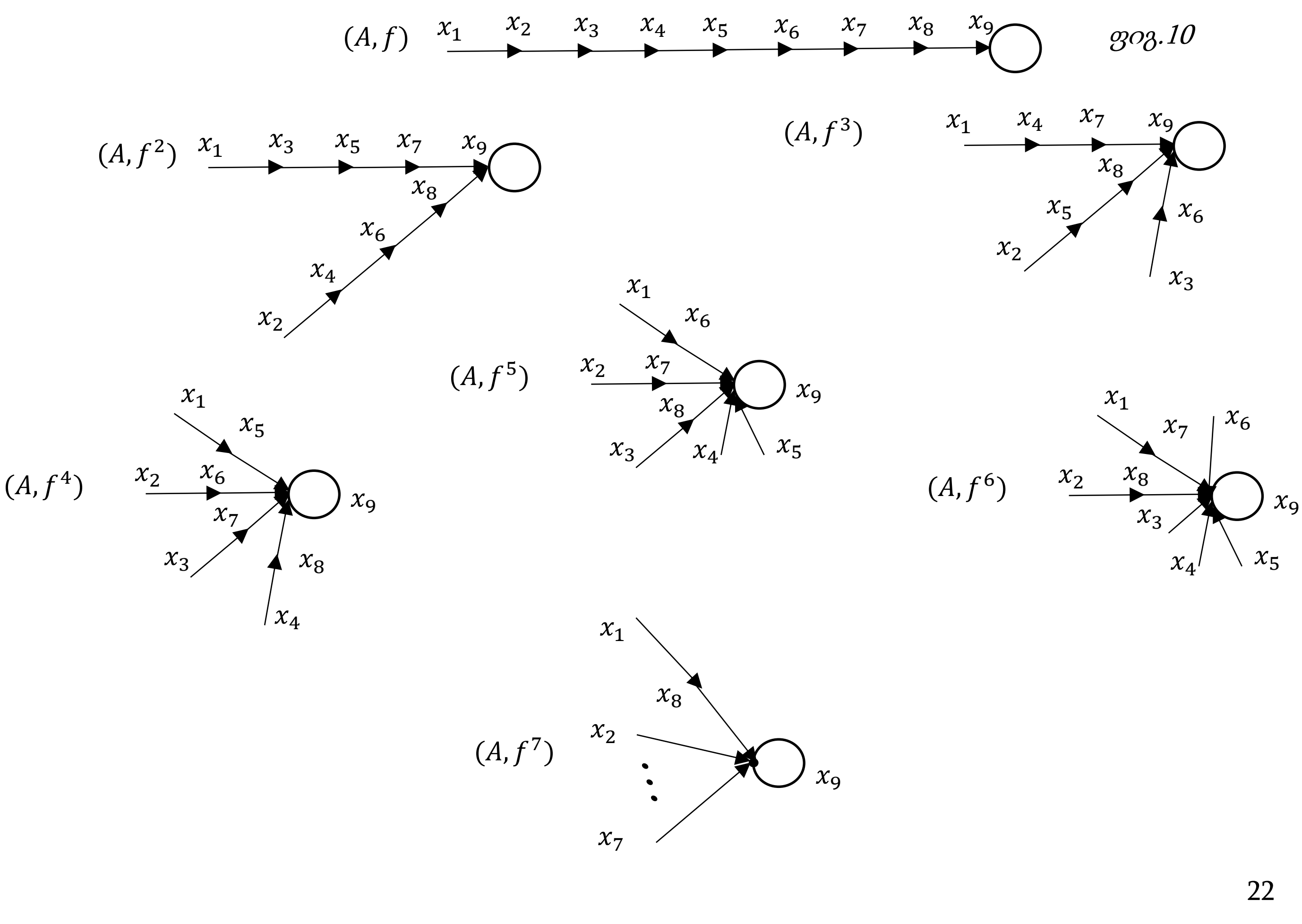
მოვიყვანოთ $n = 9$- ის მაგალითი იხ. ფიგ. 10.



ფიგ.8



ფიგ.9



ფიგ.10

თეორემა 1.2.9 -დან მარტივია იმის ჩვენება, რომ მართებულია შემდეგი

შედეგი 1.2.10

ვთქვათ $i, j \in \mathbb{N}$ და

1. თუ $i \geq n-1$ და $j \geq n-1$ $\left(A, f^i\right)$ და $\left(A, f^j\right)$ მონო-უნარული ალგებრების შესაბამისი გრაფები ერთმანეთის იზომორფულები იქნებიან.
2. თუ $i \neq j$ და $i < n-1$ ან $j < n-1$ $\left(A, f^i\right)$ და $\left(A, f^j\right)$ მონო-უნარული ალგებრების გრაფები არაიზომორფულები იქნებიან.

დამტკიცება

წინადადება 1. ცხადია თეორემა 1.2.9- ის **შემთხვევა I**-დან გამომდინარე.

წინადადება 2. მართებულია რადგან უძრავი წერტილების შემომავალი ხარისხი ერთმანეთისაგან განსხვავებული აქვთ $\left(A, f^i\right)$ და $\left(A, f^j\right)$ მონო-უნარული ალგებრების შესაბამისი გრაფების ყოველ კომპონენტს, როცა i −სა და j −ზე ზემოთ მოცემული შეზღუდვები გვაქვს.

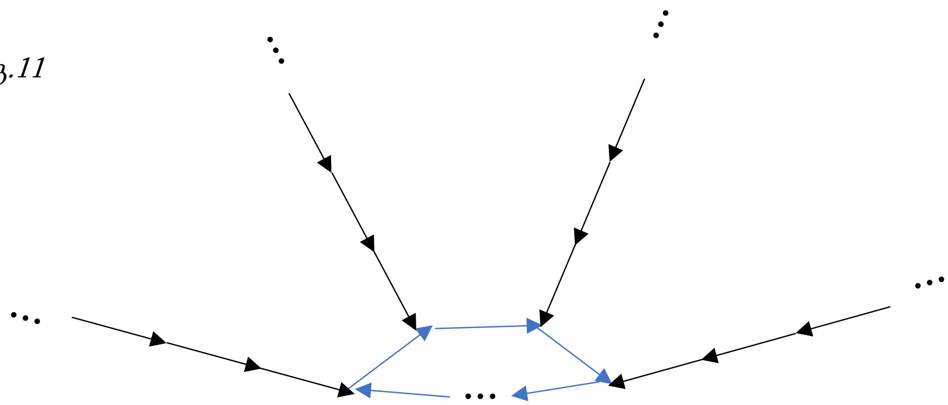
ადვილად მტკიცდება შემდეგი თეორემის მართებულობა:

თეორემა 1.2.11

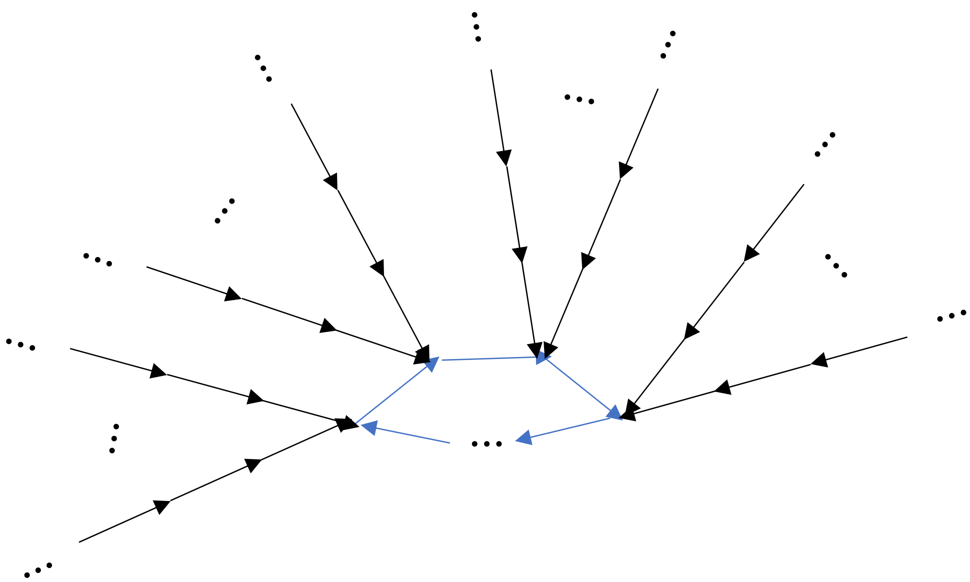
თუ (A, f) უსასრულო მონო-უნარული ალგებრის გრაფი შედგება ისეთი n -ციკლიანი კომპონენტებისაგან, რომელშიც ციკლის ყოველ წვეროში შემოდის თითო ω^*- ჯაჭვი (ფიგ. 11). მაშინ (A, f^m) მონო-უნარული ალგებრის გრაფის კომპონენტები იქნება ისეთი $\frac{n}{d}$ - ციკლიანი კომპონენტები, რომელშიც ციკლის ყოველ წვეროში შემოდის m-ცალი ω^*- ჯაჭვი (ფიგ. 12). აქ $d = უსგ(n, m)$, $i \in \{1, \dots d\}$, ხოლო $n, m \in \mathbb{N}$.

ფიგ.11

(A, f)



(A, f^m)



ფიგ.12

პარაგრაფი 2

ჯგუფის წარმოდგენა გრაფის ავტომორფიზმების ჯგუფით

ქვემოთ აღწერილია მეთოდი, თუ როგორ უნდა ავაგოთ ნებისმიერი G აბსტრაქტული ჯგუფისა და ნებისმიერი $\aleph_\alpha \geq Card(G)$ კარდინალური რიცხვისათვის $\aleph_\alpha$ სიმძლავრის გრაფი, რომლის ავტომორფიზმების ჯგუფი G ჯგუფის იზომორფულია ($Aut(H) \cong G$).

აღნიშნული მეთოდი, რომელსაც ვიყენებთ თეორემის დამტკიცებაში, როგორც ზემოთ აღვნიშნეთ, ეყრდნობა აკადემიკოს ა. ხარაზიშვილის თეორემის მტკიცების გზას, მისი კონსტრუქციის გარკვეული მოდიფიკაციით. მტკიცებაში არსებითად გამოიყენება ნებისმიერი სიმძლავრის ხისტი ხე, რომელიც ა. ყიფიანის მიერ არის აგებული.

ლემა 2.1

ვთქვათ E არის საწყისი საბაზისო სიმრავლე, G_1 და G_2 ამ სიმრავლის გადანაცვლებათა რაიმე ჯგუფებია. თუ სამართლიანია შემდეგი პირობები:

1. $G_1 \subset G_2$;
2. G_1 ტრანზიტულია E სიმრავლეზე $\big($ანუ $\forall s \in E \ \forall t \in E \Rightarrow \exists g \in G_1 \ s = g(t)\big)$;
3. G_2 თავისუფალია E სიმრავლეზე $\big($ანუ $\forall x \in E \ \forall g \in G_2 (g(x) = x \ \Rightarrow \ g = I)\big)$;

მაშინ სამართლიანია შემდეგი წინადადება: $G_1 = G_2$

დამტკიცება

თუ E ცარიელია დასამტკიცებელი არაფერია, ამიტომაც განვიხილოთ ის შემთხვევა, როცა E არაცარიელია; ვთქვათ $x \in E$ და $g \in G_2$ და სრულდება ლემის 1., 2. 3. პირობები, მაშინ დავრწმუნდეთ, რომ ჭეშმარიტი იქნება მიმართება $g \in G_1$;

$x \in E \Rightarrow g(x) \ \in E$, რადგანაც G_1 ტრანზიტულია E სიმრავლეზე, ამიტომ $\exists h \in G_1$ ისეთი, რომ ადგილი ექნება შემდეგ ტოლობას : $h(x) = g(x)$. 1.-პირობიდან გამოდის რომ, ჭეშმარიტია შემდეგი $h \in G_2$. შესაბამისად გვაქვს შემდეგი დამოკიდებულებები:

$$g \in G_2, h \in G_2, h(x) = g(x)$$

ე.ი. გვაქვს $g^{-1}(h(x)) = x$, რადგან G_2 თავისუფალია E სიმრავლეზე, აქედან გვექნება $g^{-1}h = I$, ანუ $h = g$, ნებისმიერი x -თვის E სიმრავლიდან, ხოლო რადგან h აღებული გვქონდა $G_1 -$ ჯგუფიდან, ცხადია, რომ $g \in G_1$, ხოლო $g -$ს ნებისმიერობიდან გამომდინარეობს, რომ ჭეშმარიტია შემდეგი ტოლობა: $G_1 = G_2$, რითაც ლემა 2.1 დამტკიცებულია.

ლემა 2.2

დავუშვათ $(G,*)$ მოცემული აბსტრაქტული ჯგუფია, I რაიმე საბაზისო სიმრავლეა, რომლისთვისაც არსებობს ურთიერთცალსახა ასახვა:

$$s: G \to I,$$

განვსაზღვროთ s̃ ასახვა

$$\tilde{s}: G \times G \to I$$

შემდეგნაირად:

$$\tilde{s}\big((g,h)\big) = s(g^{-1} * h),$$

სადაც $g \in G, h \in G$, ამგვარად ნებისმიერ (g,h) წყვილს (ისარს) შევუსაბამებთ $i \in I$ ფერს (ინდექსს).

ჭეშმარიტია შემდეგი დებულებები:

ა) თუ $\phi_u: G \to G$ ბიექციაა, რომელსაც აქვს შემდეგი სახე:

$$g \mapsto u * g, g \in G,$$

სადაც $u \in G,$ რაიმე ფიქსირებული ელემენტია ჯგუფიდან და თუ Z_i არის i-ფერის

ისართა სიმრავლე,

$$Z_i = \{(g,h)\, \epsilon G \times G |\, \tilde{s}((g,h)) = i\}$$

მაშინ მართებულია შემდეგი ტოლობა: $\hat{\phi}(Z_i) = Z_i,$ სადაც $\hat{\phi}\big((g,h)\big) = (\phi(g), \phi(h)).$

ბ) თუ $\phi: G \to G$ ბიექცია ისეთია, რომ სრულდება შემდეგი ტოლობა: $\hat{\phi}(Z_i) = Z_i$, მაშინ ϕ −ბიექციას ექნება შემდეგი სახე

$$g \mapsto u * g, \quad g \in G,$$

სადაც $u \in G$, რაიმე ფიქსირებული ელემენტია G ჯგუფიდან.

დამტკიცება

განვსაზღვროთ დამხმარე სიმრავლეები :

$$G_1 = \{\phi_u: G \to G | \exists u \in G \forall g \in G(\phi_u(g) = u * g)\};$$

$$G_2 = \left\{\varphi: G \to G | \forall i \ (i \in I) \to \hat{\phi}(Z_i) = Z_i\right\}$$

ლემის დასამტკიცებლად საკმარისია ვაჩვენოთ, რომ $\mathrm{G}_1 = \mathrm{G}_2$;

1. *პირველ რიგში ვაჩვენოთ, რომ $G_1 \cong (G,*)$;*

$G_1 \cong (G,*)$ მარტივად მტკიცდება კელის თეორემის გამოყენებით, ამ იზომორფიზმს დაამყარებს იზომორფიზმი: $\psi : G \to G_1$,რომელიც განისაზღვრება შემდეგნაირად:

$$\psi(u) = \phi_u \ \forall u \in G.$$

2. ვაჩვენოთ, რომ მართებულია შემდეგი ჩადგმა:

$$G_1 \subset G_2$$

ამისათვის საკმარისია ვაჩვენოთ, რომ ნებისმიერი ϕ_u ბიექციისთვის G_1 სიმრავლიდან ჭეშმარიტია შემდეგი ტოლობა

$$\widehat{\phi_u}(Z_i) = Z_i,$$

(სადაც $\widehat{\phi_u}\big((g,h)\big) = \big(\phi_u(g), \phi_u(h)\big)$). მართლაც, ვთქვათ $\phi_u \in G_1$, $\forall (g,h) \,\epsilon Z_i$, $\ i = \tilde{s}\big((g,h)\big) = s(g^{-1} * h) = s(g^{-1} * u^{-1} * u * h) = \tilde{s}\big((u * g, u * h)\big) = \tilde{s}\left(\big(\phi_u(g), \phi_u(h)\big)\right) = i$, ე.ი. $\big(\phi(g), \phi(h)\big) \epsilon Z_i$, საიდანაც ცხადია, რომ $\widehat{\phi_u}(Z_i) = Z_i$, ე. ი. ჭეშმარიტია შემდეგი ჩადგმა

$$G_1 \subset G_2.$$

3. ვაჩვენოთ, რომ G_1 ჯგუფი ტრანზიტულია G სიმრავლეზე;

ანუ უნდა ვაჩვენოთ რომ $\left(\forall s \in G\ \forall t \in G\ \exists \lambda_u \in G_1\ s = \lambda_u(t)\right)$; მართლაც $\forall s \in G\ \forall t \in G, u -$თი აღვნიშნოთ $G -$ სიმრავის ელემენტი, რომლისთვისაც სამართლიანია შემდეგი ტოლობა $u = s * t^{-1}$, სწორედ λ_u იქნება საძიებელი ფუნქცია G_1 ჯგუფიდან (მართლაც $\lambda_u(t) = u * t = s$).

4. ვაჩვენოთ, რომ G_2 ჯგუფი თავისუფალია G სიმრავლეზე;

თუ $g \in G\ \phi \in G_2$ და $(\phi(g) = g\ )$ მაშინ უნდა მივიღოთ, რომ $\phi = I;$ მართლაც დავუშვათ, რომ $g \in G\ \phi \in G_2$ და სამართლიანია შემდეგი ტოლობა

$$\phi(g) = g\ ,$$

ნებისმიერი $h -$ თვის, რადგან დაშვებით $\phi \in G_2$, ჭეშმარიტია შემდეგი ტოლობა

$$\tilde{s}\big((g,h)\big) = \tilde{s}((\phi(g), \phi(h))) = \tilde{s}((g, \phi(h))),$$

ე.ი. მართებულია შემდეგი ტოლობა:

$$s(g^{-1} * h) = s\big(g^{-1} * \phi(h)\big),$$

$s -$ასახვის ბიექციურობის გამო, გამოდის, რომ $g^{-1} * h = g^{-1} * \phi(h)$, საიდანაც გამოდის:

$$h = \phi(h)$$

$h -$ის ნებისმიერობის გამო $G -$სიმრავლიდან გამოდის რომ:

$$\phi = I.$$

აქედან კი, ლემა 2.1-ის გამოყენებით, ნათელია, რომ $G_1 = G_2$. რითიც ლემა 2.2-ის დამტკიცება დასრულებულია.

მოვიყვანოთ თეორემა ხისტი ხეების აგებისა და თვისებების შესახებ და რამდენიმე ფაქტი,

თეორემა 2.3 (ყიფიანი).

ვთქვათ ω_α რაიმე საწყისი ორდინალური (რიგობრივი) რიცხვია და $\leq$ წარმოადგენს სავსებით დალაგების მიმართებას ω_α სიმრავლეზე (ანუ $\leq \subset \omega_\alpha \times \omega_\alpha$).

არსებობს $T \subseteq \omega_\alpha \times \omega_\alpha$ ისეთი, რომ (ω_α, T) სტრუქტურას აქვს შემდეგი თვისებები:

1. $T \subseteq \leq$;

2. T არის ორიენტირებული ფესვიანი ხე;
3. T –ს პირველი და მეორე პროექციები ω_α – ს ემთხვევა;
4. $Aut(\omega_\alpha, T) = 1$.

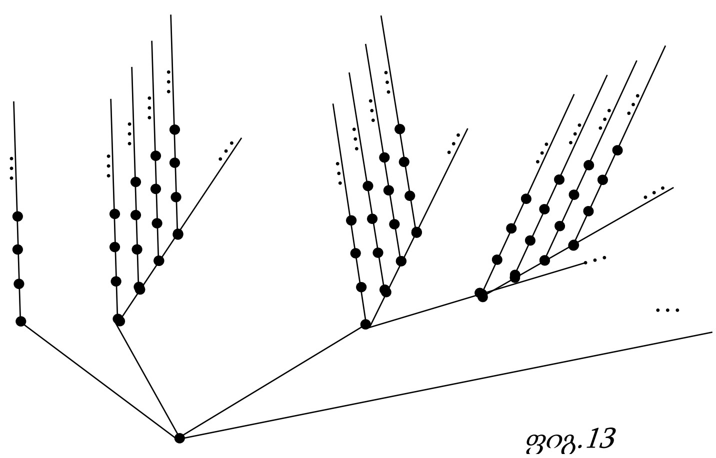
$\alpha = 0$ –თვის; $T = \cup\{(n, n+1): n\epsilon\omega\}$ – ს აქვს ზემოთ ჩამოთვლილი თვისებები, ხოლო, როცა $\alpha > 0$, T შეგვიძლია ავაგოთ შემდეგნაირად:

$$A_1 = \{(0, \omega^{\xi_1}): \xi_1 < \omega_\alpha\};$$

$$A_{n+1} = \{(\omega^{\xi_1} + \cdots + \omega^{\xi_n}, \omega^{\xi_1} + \cdots + \omega^{\xi_n} + \omega^{\xi_{n+1}}): \omega_\alpha > \xi_1 \geq \xi_2 \geq \cdots \geq \xi_{n+1}\};$$

$(n\epsilon\{\omega - \{0\}\})$,

$$T = \cup\left\{A_n: n\epsilon\{\omega - \{0\}\}\right\}$$



ფიგ.13

ნებისმიერი ξ ორდინალური (რიგობრივი) რიცხვის ω ფუძით წარმოდგენის ერთდერთობის გამო, აგებულ T – სიმრავლეს აქვს ზემოთ ჩამოთვლილი (1) ... (4) თვისება.

ნებისმიერი ω^ξ ორდინალური რიცხვისათვის T_{ω^ξ} -ით აღვნიშნოთ ω^ξ-ის შესაბამისი ხისტი ხე, რომელიც განსაზღვრულია შემდეგნაირად:

$$T_{\omega^\xi} = \{(\omega^\xi + \omega^{\xi_1} + \cdots + \omega^{\xi_n}, \omega^\xi + \omega^{\xi_1} + \cdots + \omega^{\xi_n} + \omega^{\xi_{n+1}}) : \xi \geq \xi_1 \geq \xi_2 \geq \cdots \geq \xi_{n+1}\};$$

ამ ხეებში თითოეული ორიენტირებული წიბო შევცვალოთ არაორიენტირებულით. ცხადია, რომ მიღებული არაორიენტირებული ხე ასევე ხისტი იქნება.

ვაჩვენოთ, რომ მართებულია შემდეგი:

თეორემა 2.4

ვთქვათ $(G,*)$ რაიმე ჯგუფია და $Card(G) \leq \aleph_\alpha$, მაშინ არსებობს (V,H) გრაფი, ისეთი რომ ჭეშმარიტია შემდეგი წინადადებები:

1. $Aut(V,H) \cong (G,*)$;
2. $Card(V) = \aleph_\alpha$;

დამტკიცება

რადგანაც $Card(G) = \aleph_\alpha$, ცხადია, რომ არსებობს ბიექციური ასახვა

$$\Psi: G \to \{\omega^\xi : 0 < \xi < \omega_\alpha\}$$

განვსაზღვროთ

$$\widetilde{\Psi} : G \times G \setminus \Delta G \to \{\omega^\xi : 0 < \xi < \omega_\alpha\},$$

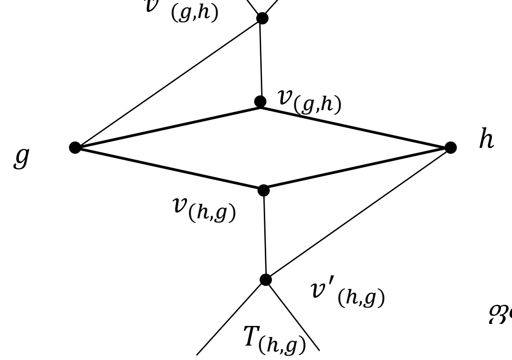
შემდეგნაირად:

$$\widetilde{\Psi}\big((g,h)\big) = \Psi(g^{-1} * h).$$

ყოველ წყვილს $(g,h) \in G \times G \setminus \Delta G$ შევუსაბამოთ $\boldsymbol{T_{\Psi(g^{-1}*h)}}$-ის იზომორფული ხე $\boldsymbol{T_{(g,h)}}$, წვეროების სიმრავლით $\boldsymbol{V_{(g,h)}}$ ისე, რომ $V_{(g,h)} \cap G = \emptyset$ და თუ $(g,h) \neq (g',h')$, მაშინ მართებულია

$$V_{(g,h)} \cap V_{(g',h')} = \emptyset.$$

ყოველი $(g,h) \in G \times G \setminus \Delta G -$ თვის, $T_{(g,h)}$ ხის წვერო აღვნიშნოთ $\boldsymbol{v'_{(g,h)}}$.



ფიგ.14

$\boldsymbol{v}_{(\boldsymbol{g},\boldsymbol{h})}$ –ით აღვნიშნოთ ყველასაგან განსხვავებული წვერო, რომელსაც შევაერთებთ g, h და $v'_{(g,h)}$ წვეროებთან. (ფიგ.14)

შემოვიტანოთ **აღნიშვნები:**

$$E_i = \{(g,h) \,\epsilon G \times G \backslash \Delta G \mid \widetilde{\Psi}((g,h)) = i\};$$

$$V_0 = \left\{ v_{(g,h)} \mid (g,h) \,\epsilon G \times G \backslash \Delta G \right\}.$$

$$V'_0 = \left\{ v'_{(g,h)} \mid (g,h) \,\epsilon G \times G \backslash \Delta G \right\}.$$

შევნიშნოთ, რომ $V_0 \cap (\mathrm{G} \cup V_0) = \emptyset$.

V –თი აღვნიშნოთ შემდეგი სიმრავლე:

$$\mathrm{V} = \mathrm{G} \cup V_0 \cup \Big(\bigcup_{(g,h)\in \mathrm{G}\times\mathrm{G} \,\backslash \Delta\mathrm{G}} \mathrm{V}_{(g,h)} \Big)$$

$$H_{(g,h)} = \bigcup_{(g,h)\in G\times G \,\backslash \Delta G} \left\{\left[g, v_{(g,h)}\right]\right\} \cup \left\{\left[\, v_{(g,h)}, v'_{(g,h)}\right]\right\} \cup T_{(g,h)} \cup \left\{\left[g, v'_{(g,h)}\right]\right\} \cup \left\{\left[v_{(g,h)}, h\right]\right\}$$

$\boldsymbol{H}_{(\boldsymbol{g},\boldsymbol{h})} \cup \boldsymbol{H}_{(\boldsymbol{h},\boldsymbol{g})}$ კომპონენტი აგებულია (ფიგ.14)- ნახაზზე.

$\boldsymbol{H}$ გრაფი განვსაზღვროთ შემდეგნაირად:

$$H = \bigcup_{(g,h)\in G\times G \,\backslash \Delta G} H_{(g,h)}$$

ვაჩვენოთ, რომ ამგვარად აგებული V სიმრავლე და $(V, H\,)$ გრაფი საძიებელი ობიექტებია.

V სიმრავლის აგებიდან გამომდინარე ცხადია, რომ $Card(V) = \aleph_\alpha$.

საჩვენებელი დაგვრჩა შემდეგი წინადადების მართებულობა:

$$Aut(V,H) \cong (G,*);$$

ლემა 2.5

შევნიშნოთ, რომ მართებულია შემდეგი წინადადებები:

$$\text{ა)} f \,\epsilon\, Aut(V,H) \rightarrow\; f(G) = G;$$

$$ბ) f \in Aut(V,H) \to \hat{f}(E_i) = E_i,\ \ i\epsilon I;$$

$$გ) f \in Aut(V,H) \to f(V_0) = V_0;$$

$$დ) f \in Aut(V,H) \to f(V'_0) = V'_0.$$

სადაც $\hat{f}\big((g,h)\big) = \big(f(g), f(h)\big)$.

დამტკიცება

ა) დამოკიდებულება ჭეშმარიტია, რადგან მხოლოდ G −ს ელემენტები წარმოადგენენ ელემენტებს, რომლებიც 3 და 4 ელემენტიან მარტივ ციკლებში არიან ჩართულები და თან მათი შესაბამისი წვეროს ხარისხი $\aleph_\alpha$ −ს ტოლია.

ბ) ვთქვათ მართებულია შემდეგი წინადადებები:

i. $f \in Aut(V,H)$

ii. $(g,h)\ \epsilon E_i$,

პირობა ii.- დან გამომდინარეობს $\widetilde{\Psi}((g,h)) = i$, ე.ი. $T_{(g,h)} \cong T_i$, i. -დან $f \in Aut(V,H)$ და ლემა 2.2-ის ა. პუნქტის გათვალისწინებით, ასახვა -$\hat{f}$ ამ (g,h) წყვილს გადაიყვანს $(g',h')\ \epsilon G \times G \backslash \Delta G$ წყვილში, ეს კიდევ მოხდება მაშინ და მხოლოდ მაშინ, თუ $T_{(g,h)} \cong T_{(g',h')}$, მეორე მხრივ კი გვქონდა $T_{(g,h)} \cong T_i$ ე.ი. $T_{(g',h')} \cong T_i$, საიდანაც $\widetilde{\Psi}\big((g',h')\big) = i$. ე.ი. $(g',h')\ \epsilon E_i$ (ანუ $T_i \cong T_{(g,h)} \cong T_{(g',h')}$). აქედან გამოდის, რომ

$$\hat{f}(E_i) = E_i$$

გ) დამოკიდებულება ჭეშმარიტია, რადგან მხოლოდ V_0 − ის ელემენტები არიან უშუალოდ შეერთებულები იმ ელემენტებთან, რომლებიც ციკლებში არიან ჩაზმულები და V_0 − ის ყოველი ელემენტის შესაბამისი წვეროს ხარისხი სასრულია (3-ის ტოლია).

დ) დამოკიდებულება ჭეშმარიტია, რადგან მხოლოდ V'_0 − ის ელემენტები არიან ელემენტები, რომლებიც 3 ელემენტიანი მარტივი ციკლის და უსასრულო ხეების წვეროებს წარმოადგენენ.

ლემა 2.6

ვაჩვენოთ, რომ $Aut(V,H)$ ჯგუფი თავისუფალია V –ზე.

დამტკიცება

1. $\varphi \in Aut(V,H)$, ვთქვათ $g \in G$ მაშინ $\forall h \in G$ არსებობს i, ისეთი რომ

$$\widetilde{\Psi}\big((g,h)\big) = i$$

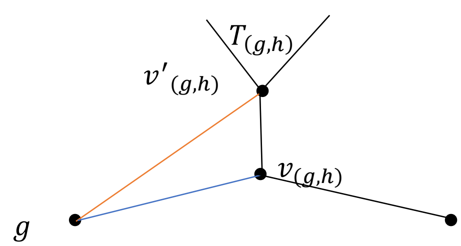
დავუშვათ $\varphi(g) = g$ **ლემა 2.5.** -დან გამომდინარეობს შემდეგი დამოკიდებულების მართებულობა:

$$\hat{\varphi}(E_i) = E_i \Rightarrow i = \widetilde{\Psi}\big((g,h)\big) = \widetilde{\Psi}\big((\varphi(g),\varphi(h))\big) = \widetilde{\Psi}\big((g,\varphi(h))\big) \Leftrightarrow \Psi(g^{-1}h) = \Psi(g^{-1}\varphi(h)) \Leftrightarrow$$
$$(\Psi - \text{ის ბიექციურობის გამო})\ g^{-1}h = g^{-1}\varphi(h) \Leftrightarrow h = \varphi(h)$$

ყოველი h თვის, ე.ი. $\varphi = I, G -$ ზე. ე.ი. $Aut(V,H)$ ჯგუფი თავისუფალია G სიმრავლეზე, ახლა ვაჩვენოთ, რომ იგი თავისუფალია მთელს V სიმრავლეზე.

2. ვთქვათ, $\varphi \in Aut(V,H)$ უძრავად ტოვებს რომელიმე $g \in G$ ელემენტს, მაშინ ეს ასახვა უძრავად დატოვებს მთელს V/G სიმრავლესაც. მართლაც, 1.-ლი პუნქტიდან უკვე ვიცით, რომ თუ $\varphi(g) = g$, რომელიმე $g -$ თვის, მაშინ φ ადგილზე დატოვებს მთელს G სიმრავლეს. ცხადია $\exists h \in G$, რომ

$[g, v'_{(g,h)}]$ და $[g, v_{(g,h)}]$ წიბოები $H_{(g,h)}$ კომპონენტში შედიან (ფიგ. 15).



ფიგ.15

მაშინ, როცა $\varphi(g) = g$ ტოლობა ჭეშმარიტია, შესაბამისად მართებული იქნება შემდეგი დამოკიდებულებებიც:

$$\varphi\big(v'_{(g,h)}\big) = v'_{(g,h)} \text{ და } \varphi\big(v_{(g,h)}\big) = v_{(g,h)}$$

თუ დავუშვებთ, რომ $\varphi\big(\ v'_{(g,h)}\big) \neq\ v'_{(g,h)}$, მაშინ გამოდის $\varphi\big(\ v'_{(g,h)}\big) =\ v'_{(g',h')}$ (ლემა 2.5-ის დ)-პუნქტიდან), სადაც $(g',h')\epsilon G \times G\backslash\Delta G$ და $v'_{(g,h)}\ \neq v'_{(g',h')}$, რადგან $v'_{(g,h)}$ წარმოადგენს $T_{(g,h)}$ ხის ფესვს და $\varphi \in Aut(V,H)$ დაშვება იმისა, რომ $\varphi\big(\ v'_{(g,h)}\big) =\ v'_{(g',h')}$ ტოლობა სრულდება, გამოიწვევს შემდეგი წინადადების ჭეშმარიტებას:

$$T_{(g,h)} \cong T_{(g',h')}.$$

ხოლო თუ დავუშვებთ, რომ φ ავტომორფიზმს $T_{(g,h)}$ და $T_{(g',h')}$ ხეები ერთმანეთში გადაჰყავს ისე, რომ ადგილზე ტოვებს (g,h) წყვილს გვექნება შემდეგი:

$$[g,v'_{(g,h)}] \in H_{(g,h)}$$

და φ ასახვის შემდეგ გვექნება $\big[g,\varphi\big(\ v'_{(g,h)}\big)\big] \notin H_{(\varphi(g),\varphi(h))} = H_{(g,h)}$. (გავიხსენოთ, რომ ჭეშმარიტია შემდეგი ტოლობა: $((g,h) = (\varphi(g),\varphi(h)))$). აქედან

$$\varphi\big(\ v'_{(g,h)}\big) =\ v'_{(g,h)}.$$

ხოლო თუ დავუშვებთ, რომ

$$\varphi\big(\ v_{(g,h)}\big) \neq\ v_{(g,h)}$$

ეს გამოიწვევს, რომ $\varphi\big(\ v'_{(g,h)}\big) \neq\ v'_{(g,h)}$ (და მტკიცება დავა წინა შემთხვევის დამტკიცებაზე). მართლაც სხვა შემთხვევაში გვექნება წინააღმდეგობა $[v_{(g,h)},v'_{(g,h)}] \in H_{(g,h)}$ და φ ასახვის შემდეგ გვექნება $[\varphi(v_{(g,h)}),\varphi(\ v'_{(g,h)})] \notin H_{(\varphi(g),\varphi(h))}$ (აქაც შევნიშნოთ, რომ დაშვებით ჭეშმარიტია შემდეგი ტოლობის სამართლიანობა - $H_{(g,h)} = H_{(\varphi(g),\varphi(h))}$), მაშასადამე, თუ რაიმე $\varphi \in Aut(V,H)$ −თვის სრულდება, რომ $\varphi(g) = g$, მაშინ აუცილებლად ჭეშმარიტია შემდეგი ტოლობები:

$$\varphi\big(\ v_{(g,h)}\big) =\ v_{(g,h)} \text{ და } \varphi\big(\ v'_{(g,h)}\big) =\ v'_{(g,h)}$$

(რადგან ხე ხისტია, წვეროს „გაჩერება“ გამოიწვევს მთელი ხის „გაჩერებას“).

3. ვთქვათ $\varphi \in aut(V,H)$, $a \in V/(G \cup V_0)$ და $\varphi(a) = a$, მაშინ ცხადია, რომ არსებობს ერთადერთი $(g,h) \in G \times G\ \backslash\Delta G$, ისეთი რომ მართებულია შემდეგი:

$$a \in\ T_{(g,h)}.$$

ვაჩვენოთ რომ ამ (g,h) –წყვილს φ ადგილზე დატოვებს, თუ დავუშვებთ საწინააღმდეგოს, ვთქვათ $\varphi(g) = g'$ და $\varphi(h) = h'$, სადაც $h' \neq h$ ან $g' \neq g$, მაშინ გამოდის

$$a \in T_{(g,h)} \text{ და } a \in T_{(g',h')},$$

საიდანაც ნებისმიერ შემთხვევაში ჭეშმარიტია შემდეგი:

$$(g,h) \neq (g',h') \text{ და } V_{(g,h)} \cap V_{(g',h')} = \{a\}.$$

რაც ეწინააღმდეგება აგებას (თუ $(g,h) \neq (g',h')$, მაშინ სამართლიანია $V_{(g,h)} \cap V_{(g',h')} = \emptyset$).

4. ვთქვათ $\varphi \in Aut(V,H)$, $v_{(g,h)} \in V_0$ და $\varphi\big(v_{(g,h)}\big) = v_{(g,h)}$, მაშინ $\varphi\big(\, v'_{(g,h)}\big) = \, v'_{(g,h)}$, მართლაც თუ დავუშვებთ, რომ $\varphi\big(\, v'_{(g,h)}\big) \neq \, v'_{(g,h)}$, მაშინ არსებობს, რაღაც წყვილი $(g',h') \neq (g,h)$ და

$$\varphi\big(\, v'_{(g,h)}\big) = \, v'_{(g',h')}$$

$[v_{(g,h)}, v'_{(g,h)}] \in H_{(g,h)}$ და φ ასახვის შემდეგ გვექნება $\big[\varphi(v_{(g,h)}), \varphi\big(\, v'_{(g,h)}\big)\big] \notin H_{(\varphi(g),\varphi(h))}$.

აქედან გამოდის, რომ $\mathrm{A}ut(V,H)$ ჯგუფი თავისუფალია V –ზე. საიდანაც ლემა 2.6 დამტკიცებულია.

შემოვიტანოთ აღნიშვნა:

$$F = \{f_u : G \to G \mid u \in G \ \& \ \forall g \in G \ (f_u(g) = u * g)\}.$$

ლემა 2.7

ვაჩვენოთ, რომ შემდეგი წინადადება ჭეშმარიტია

$$(F, \circ) \cong Aut(V,H).$$

დამტკიცება

ვთქვათ $f_u \in F$ ანუ

$$\exists u \in G \ \forall g \in G \ (f_u(g) = ug)$$

ლემა 2.2-დან გამომდინარეობს, რომ $f_u \in F \Leftrightarrow \widehat{f_u}(E_i) = E_i$. რადგან, $\forall g \in G$ და $\forall h \in G$, არსებობს i, ისეთი, რომლისთვისაც სამართლიანია $T_i \cong T_{(g,h)}$ და ვიცით, რომ $\widehat{f_u}(E_i) = E_i$, ნათელია, რომ

$$T_{(g,h)} \cong T_{(f_u(g),f_u(h))}$$

საიდანაც გამომდინარეობს შემდეგი წინადადების ჭეშმარიტება:

$$H_{(g,h)} \cong H_{(f_u(g),f_u(h))},$$

აქედან და იმის გათვალისწინებით, რომ $\forall(g,h)$ წყვილის შესაბამისი $T_{(g,h)}$ ხე ხისტია ცალსახად განისაზღვრება $f' \in Aut(V,H)$, თანაც $f'|_G = f_u$. სხვა ავტომორფიზმების არ არსებობა გამომდინარეობს ლემა 2.6 და ლემა 2.5-ის ა) პუნქტიდაგნ.

ე.ი. არსებობს ცალსახა თანადობა $(F,\circ)$ და $Aut(V,H)$ ჯგუფებს შორის. რადგან კელის თეორემით $(G,*) \cong (F,\circ)$ სამართლიანია და ასევე ლემა 2.7-ით $(F,\circ) \cong Aut(V,H)$. ამგვარად

$$Aut(V,H) \cong (G,*).$$

რაც ამტკიცებს თეორემას 2.4-ის მართებულობას.

აქედან, მარტივად, შეგვიძლია ვაჩვენოთ, რომ მართებულია შემდეგი:

შენიშვნა 2.8

ჭეშმარიტია შემდეგი წინადადება:

$$T_{(g,h)} \cong T_{(g',h')} \leftrightarrow T_{(h,g)} \cong T_{(h',g')}$$

დამტკიცება

$T_{(g,h)} \cong T_{(g',h')} \leftrightarrow \widetilde{\Psi}(g,h) = \widetilde{\Psi}(g',h') \leftrightarrow \Psi(g^{-1}h) = \Psi\left({g'}^{-1}h'\right) \leftrightarrow g^{-1}h = {g'}^{-1}h'$ (რადგან Ψ ბიექციური ფუნქციაა) $\leftrightarrow ({g'}^{-1}h')^{-1}g^{-1}h = ({g'}^{-1}h')^{-1}{g'}^{-1}h' \leftrightarrow {h'}^{-1}g'g^{-1}h = e \leftrightarrow {h'}^{-1}g'g^{-1}h(g^{-1}h)^{-1} = (g^{-1}h)^{-1} \leftrightarrow {h'}^{-1}g' = h^{-1}g \leftrightarrow$ (რადგან Ψ ბიექციური ფუნქციაა) $\Psi(h^{-1}g) = \Psi\left({h'}^{-1}g'\right) \leftrightarrow \widetilde{\Psi}((h,g)) = \widetilde{\Psi}((h',g')) \leftrightarrow T_{(h,g)} \cong T_{(h',g')}$.

დასკვნა

ნაშრომში აღწერილია (A, f^m) მონო-უნარული ალგებრის გრაფის კომპონენტთა ტიპები, (A, f) მონო-უნარული ალგებრის გრაფის კომპონენტთა ტიპების მიხედვით. აღწერა სრულია ბიექციებისთვის. ხოლო ნაწილობრივი - ფუნქციათა გარკვეული კლასებისათვის.

ასევე, დამტკიცებულია შემდეგი

თეორემა

ვთქვათ $(G,*)$ რაიმე ჯგუფია და $Card(G) \leq \aleph_\alpha$, მაშინ არსებობს (V, H) გრაფი, რომელის ავტომორფიზმების ჯგუფიც მოცემული ჯგუფის იზომორფულია და რომლის სიმძლავრე $\aleph_\alpha$-ს ტოლია.

რაც წარმოადგენს კიონიგის ცნობილი პრობლემის ოპტიმალურ ამოხსნას უსასრულო ჯგუფების შემთხვევაში.

სამაგისტრო ნაშრომში განხილული საკითხები აქტუალურია თანამედროვე მათემატიკაში. ამასთან, მიღებული შედეგები შეიძლება გამოყენებულ იქნას შემდგომ გამოკვლევებში.

ჯგუფისათვის მისი შესაბამისი გრაფის აგების ჩვენს მიერ მოყვანილი მეთოდი იძლევა მინიმალური სიმძლავრის გრაფს ზოგად შემთხვევაში. თუმცა, კერძო შემთხვევებში, ზოგიერთი ჯგუფისთვის, არსებობს ნაკლები სიმძლავრის გრაფიც. იმ უსასრულო ჯგუფების დახასიათება, რომლებისთვისაც არსებობს მასზე ნაკლები სიმძლავრის შესაბამისი გრაფები დღესდღეობით არ არსებობს და შემდგომი კვლევის საგანია.

ლიტერატურა

[1] M. Novotny. Mono-unary algebras in the work of Czechoslovak mathematicians. Archivum Mathematicum, vol. 26 (1990), issue 2, pp. 155-164

[2] D. Jakubíková-Studenovská, On weakly rigid monounary algebras, Math. Slovaca 30 (1980), no. 2, 197–206.

[3] D. Jakubíková-Studenovská Unoriented graphs of monounary algebras Discrete Mathematics 222 (2000) 167–179

[4] S. D. Comer and J. J. Le Tourneau, Isomorphism types of infinite algebras, Proc. Amer. Math. Soc. 21 (1969), 635–639. 10.1090/S0002-9939-1969-0238752-9.

[5] J. Hyman, Automorphisms of 1-unary Algebras, Algebra Universalis 4 (1974), 61–77. 10.1007/BF02485708.

[6]W. Degen, Rigid Unary Functions and the Axiom of Choice, Math. Log. Quart. 47 (2001) 2, 197 – 204

[7] B. Jónsson, Topics in Universal Algebra, Lecture Notes in Mathematics, No. 250, *Springer-Verlag*, Berlin, 1972.

[8] G. Fuhrken, On automorphisms of algebras with a single unary operation, Port. Math. 32 (1973), 49–52.

[9] G. Birkhoff, On groups of automorphisms (in Spanish), *Revista Union, Mat. Argentina* 11(1946), 155-157

[10] D. König. Theorie der endlichen und unendlichen Graphen. Band 6, mit einer abhandlung von L. Euler. *BSB B.G. Teubner Verlagsgeselschaft*, Leipzip, 1986.

[11] R. Frucht. Herstellung von Graphen mit vorgegebener abstrakter Gruppe*. Compositio Mathematica*, tome 6 (1936), p. 239-250. Herstellung von Graphen mit vorgegebener abstrakter Gruppe (numdam.org).

[12] G. Sabidussi, Graphs with given infinite group. *Canadian Journal of Mathematics*, Volume 9, 1957, pp. 515-525. https://doi.org/10.4153/CJM-1957-060-7.

[13] GS Staller, Three problems of SM Ulam with solutions and generalizations. Colloquium Mathematicum (1976).

[14] Kharazishvili A.B. Elements of Combinatorial Theory of Infinite Sets, *Tbil. Univ. Press*, Tbilisi, 1981 (in Russian).

[15] A. B. Kharazishvili, Π-isomorphisms of binary relations (in Russian), Soobshch. Akad. Nauk Gruzin. SSR 87 (1977), no. 3, 541–544.

[16] Z. Hedrlín and A. Pultr, On full embeddings of categories of algebras, Illinois J. Math. 10 (1966), 392–406. 10.1215/ijm/1256054991

[17] A. Kipiani. "Automorphism groups of mono-unary algebras and CH" *Georgian Mathematical Journal*, vol. 26, no. 4, 2019, pp. 599-610. https://doi.org/10.1515/gmj-2019-2048

[18] A. Kipiani, Some combinatorial problems, connected with product-isomorphisms of binary relations, Acta Univ. Carolin. Math. Phys. 29 (1988), no. 2, 23–25.

[19] A. Kipiani, Uniform sets and isomorphisms of trees, preprint no. 107, Mathematical Institute, University of Wrocław, 1989.

[20] A. Kipiani, One abstract characterization of intervals of cardinal numbers, Acta Univ. Lodz. Folia Math. 9 (1997), 55–61.

[21] A. Kipiani, A uniform subset in $\omega_\alpha \times \omega_\alpha$ (in Russian), Soobshch. Akad. Nauk Gruzin. SSR 135 (1989), no. 2, 253–256.

[22] A. Kipiani, On automorphism groups of ω-trees, Georgian Math. J. 15 (2008), no. 1, 93–97. 10.1515/GMJ.2008.93

[23] A. Kipiani, M. Gobronize, The directed graphs of some functions, Transaction of A. Razmadze Mathematical Institute, Vol. 174 (2020), issue 1, 61-69. http://www.rmi.ge/transactions/TRMI-volumes/174-1/v174(1)-8.pdf