ივანე ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტი

ქეთევან გუჯეჯიანი
ზუსტ და საბუნებისმეტყველო მეცნიერებათა ფაკულტეტი
მათემატიკის დეპარტამენტი

მაღალი რიგის სხვაობიანი განტოლებების ამონახსნების ასიმპტოტური ყოფაქცევის შესახებ

სამაგისტრო პროგრამის დასახელება: მათემატიკა

მისანიჭებელი აკადემიური ხარისხი: მეცნიერებათა მაგისტრი მათემატიკაში

სამეცნიერო ხელმძღვანელი: რომან კოპლატაძე, ფიზიკა-მათემატიკის მეცნიერებათა დოქტორი, ასოცირებული პროფესორი;

თბილისი
2022

შინაარსი

ანოტაცია

სამაგისტრო ნაშრომი ეძღვნება მაღალი რიგის სხვაობიან (დისკრეტულ) განტოლებათა ამონახსნების ასიმპტოტური ყოფაქცევის შესწავლას უსასრულობის მიდამოში.

ნაშრომში წარმოდგენილი საკითხები აქტუალურია. ბოლო წლებში მაღალი რიგის განტოლების შემთხვევაში ანალოგიური საკითხები წარმოდგენილი იყო რ. კოპლატაძის და ნ. ხაჩიძის შრომებში.

კვლევის ობიექტია: მაღალი რიგის სხვაობიანი არაწრფივი განტოლებებისათვის დადგენილი იქნეს საკმარისი პირობები იმისა, რომ მოცემულ განტოლებას გააჩნდეს ე.წ. A ან B თვისება. ფუნქციონალურ დიფერენციალური განტოლების შემთხვევაში ეს საკითხები საკმარისად კარგად არის შესწავლილი. მოცემულ შრომაში მიღებული შედეგი ახალია. გამოყოფილია ახალი, ემდენ-ფაულერის განტოლებებისგან განსხვავებული არაწრფივი დისკრეტულ განტოლებათა კლასები, რომელთათვისაც დადგენილია ეფექტური საკმარისი პირობები იმისა, რომ მოცემულ განტოლებას გააჩნდეს A ან B თვისება. მიღებული შედეგები საინტერესოა და მოსალოდნელია მოცემული შედეგების შემდგომი განვითარება.

Abstract

The diploma work is dedicated to study asymptotic behavior of solutions of higher order difference equations in the neighborhood of infinity.

The problems discussed in the work are actual. In the past few years, similar problems were discussed in cases of higher order difference equations, in works of R. Koplatadze and N. Khachidze.

The subject of research is: to establish sufficient conditions for higher order difference nonlinear equations to have A or B property. The analogical problem is almost well researched for functional differential equations. The results given in the work are original. The deduced classes are different from Emden-Fowler's type nonlinear discrete equations', for the classes mentioned above there are established effective sufficient conditions, in order for such equation to have A or B property. Produced results are interesting and can be further developed.

ძირითადი აღნიშვნები

ყველგან მოცემულ შრომაში გამოყენებული იქნება შემდეგი აღნიშვნები:

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ - ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლე;

ვთქვათ $k \in \mathbb{N}$, მაშინ $N_k^+ = \{k, k+1, \dots\}$;

ვთქვათ $k \in \mathbb{N}$, მაშინ $N_k^- = \{1, 2, \dots, k\}$;

$\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$, $R_+ = [0, +\infty)$;

ვთქვათ, $E \subset \mathbb{R}$, მაშინ $S(N; E)$ აღნიშნავს ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლეზე მოცემულ ფუნქციათა სიმრავლეს, რომლის მნიშვნელობათა სიმრავლე ეკუთვნის E-ს;

ვთქვათ, $u : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$, მაშინ n-ური რიგის სხვაობიანი ოპერატორი $\triangle^{(n)}u(k)$ განიმარტება შემდეგნაირად: $\triangle^{(0)}u(k) = u(k)$, $\triangle^{(1)}u(k) = u(k+1) - u(k)$, $\triangle^{(i)}u(k) = \triangle^{(1)}(\triangle^{(i-1)}u(k)), (i = 1, 2, \dots, n)$;

ვთქვათ, $\tau \in S(N; R_+)$ არაკლებადია და $\lim \tau(k) = +\infty$. $V(\tau)$-თი აღვნიშნოთ სიმრავლე ასახვებისა $F\colon S(N; R) \longrightarrow S(N; R)$ ისეთი, რომ სრულდება პირობა: $F(x)(k) = F(y)(k)$ ყოველი $k \in \mathbb{N}$ და $x, y \in S(N; R)$, რომელიც აკმაყოფილებს პირობას $x(s) = y(s)$, როცა $s \geqslant \tau(k), (s \in N)$.

ნებისმიერი $k_0 \in N$-სთვის, $H_{k_0,\tau}$-თი აღვნიშნოთ სიმრავლე ყოველი $u \in S(N; R)$ ფუნქციისა, რომელიც აკმაყოფილებს პირობას: $u(k) \neq 0$, როცა $k \geqslant \min{(k_0; \tau(k_0))}, (k \in N)$.

შესავალი

კვლევის საგანი და მიღებული შედეგების მოკლე მიმოხილვა:

მოცემული შრომა ეძღვნება შემდეგი სახის დისკრეტული განტოლების

$$\triangle^{(n)}u(k) + F(u)(k) = 0 \tag{0.1}$$

ამონახსნების ყოფაქცევის შესწავლას უსასრულობის მიდამოში, სადაც $n \geqslant 2$, $F \in V(\tau)$, $\triangle^{(n)}$ არის n-ური რიგის სხვაობის ოპერატორი (განმარტება იხილეთ ძირითად აღნიშვნებში).

ვთქვათ, $k_0 \in N$, ქვემოთ ყველგან ვიგულისხმებთ, რომ სრულდება ერთ-ერთი შემდეგი ორი პირობიდან:

$$F(u)(k)u(k) \geqslant 0, \text{ როცა } k \in N^+_{k_0}, u \in H_{k_0,\tau} \tag{0.2}$$

ან

$$F(u)(k)u(k) \leqslant 0, \text{ როცა } k \in N^+_{k_0}, u \in H_{k_0,\tau}. \tag{0.3}$$

ყველგან იგულისხმება, რომ აღნიშვნებში $V(\tau)$ და $H_{k_0,\tau}$, τ ფუნქცია აკმაყოფილებს ზემოთ მოყვანილ პირობებს და სხვა ფორმულებში არ იქნება გამოყენებული.

ვთქვათ $k_0 \in N$. ფუნქციას $u : N^+_{k_0} \to R$ ეწოდება (0.1) განტოლების წესიერი ამონახსნი, თუ

$$\text{sup}\,(|u(s)| : s \in N^+_k) > 0, \text{როცა } \forall k \in N^+_{k_0},$$

და არსებობს ფუნქცია $\bar{u} \in S(N;R)$ ისეთი, რომ $\bar{u}(k) = u(k)$, როცა $k \in N^+_{k_0}$ და სრულდება პირობა

$$\triangle^{(n)}\bar{u}(k) + F(\bar{u})(k) = 0, \text{როცა } k \in N_{k_0^+}.$$

(0.1) განტოლების ამონახსნს $u : N_{k_0^+} \to R$ ეწოდება რხევადი, თუ ნებისმიერი $k \in N_{k_0}$-სთვის მოიძებნება $k_1; k_2 \in N^+_k$ ისეთი, რომ $u(k_1)u(k_2) \leqslant 0$, წინააღმდეგ შემთხვევაში ვიგულისხმებთ, რომ ამონახსნი არარხევადია.

განმარტება 0.1. ვიტყვით, რომ (0.1) განტოლებას გააჩნია A თვისება, თუ მისი ყოველი წესიერი ამონახსნი ლუწი n-ის შემთხვევაში რხევადია, ხოლო კენტი n-ის შემთხვევაში ან რხევადია ან აკმაყოფილებს პირობას:

$$|\triangle^{(i)}u(k)| \downarrow 0, \text{ როცა } k \uparrow +\infty (k \in N), i = 0, 1, \dots n-1. \tag{0.4}$$

განმარტება 0.2. ვიტყვით, რომ (0.1) განტოლებას გააჩნია B თვისება, თუ მისი ყოველი წესიერი ამონახსნი ლუწი n-ის შემთხვევაში ან რხევადია ან აკმაყოფილებს (0.4) პირობას ან:

$$|\triangle^{(i)}u(k)| \uparrow +\infty, \text{ როცა } k \uparrow +\infty (k \in N), i = 0, 1, \dots n-1, \tag{0.5}$$

ხოლო, კენტი n-ის შემთხვევაში ან რხევადია ან აკმაყოფილებს (0.5) პირობას.

ჩვეულებრივ დიფერენციალურ განტოლებათა თვისობრივ თეორიაში ამ მიმართულებით შედეგები მიღებულია დ. სანსონეს [1], ი. კიღურაძის და თ. ჭანტურიას [2] მონოგრაფიებში.

მაღალი რიგის ფუნქციონალურ-დიფერენციალური განტოლების შემთხვევაში შესწავლილია შემდეგ შრომებში [3];

მაღალი რიგის სხვაობიანი განტოლების ((0.1) განტოლების) ემდენ-ფაულერის მინორანტის შემთხვევაში, ანალოგიური საკითხები შესწავლილი იყო [4; 5].

ჩვენს შემთხვევაში (0.1) განტოლების ამონახსნების რხევადობის საკითხი შესწავლილი იქნება, როცა F ოპერატორს გააჩნია ემდენ-ფაულერის მინორანტისაგან განსხვავებული არაწრფივი მინორანტი, რომლის კერძო შემთხვევას წარმოადგენს ემდენ-ფაულერის შემთხვევა. [4; 5] შრომებში მიღებული შედეგები წარმოადგენს ჩვენს მიერ მიღებული შედეგების კერძო შემთხვევას.

1 ზოგიერთი მონოტონური ფუნქციების თვისების შესახებ

ლემა 1.1. ვთქვათ $n \geqslant 2, k_0 \in N, u : N_{k_0^+ \to R}$ და $u(k) > 0, \triangle^{(n)}u(k) \leqslant 0$ ($\triangle^{(n)}u(k) \geqslant 0$), როცა $k \in N_{k_0}^+$, $\triangle^{(n)}u(k) \neq 0$ ნებისმიერი $s \in N_{k_0}^+$ და $k \in N_s^+$, მაშინ არსებობს $k_1 \in n_{k_0}^+$ და $l \in (0, \dots, n)$ ისეთი, რომ $l + n$ კენტია ($l + n$ ლუწია) და

$$\begin{aligned}
&\triangle^{(i)}\, u(k) > 0, \text{ როცა } k \in N_{k_1}^+, (i = 0, \dots, l-1), \\
&(-1)^{j-l} \triangle^{(j)}\, u(k) > 0, \text{ როცა } k \in N_{k_1}^+, (j = 0, \dots, n-1), \\
&(-1)^{n-l} \triangle^{(n)}\, u(k) \geqslant 0, \text{ როცა } k \in N_{k_1}^+, (j = 0, \dots, n-1),
\end{aligned} \tag{1.1}$$

დამტკიცება. ლემის სამართლიანობა გამომდინარეობს იმ მოცემულობიდან, რომ თუ $u(k) > 0$ და $\triangle^{(2)}u(k) \leqslant 0$, როცა $k \in N_{k_0}^+$, მაშინ არსებობს $k_1 \in N_{k_0}$, ისეთი, რომ $\triangle^{(1)}u(k) > 0$, როცა $k \in N_{k_1}$. $\square$

შენიშვნა 1.1. ცხადია, რომ თუ $u; v : N \to R$ და $\triangle^{(i)}u(k_0) = \triangle^{(i)}v(k_0), (i = 0, \dots, n-1)$, $\triangle^{(m)}u(k) = \triangle^{(m)}v(k)$, როცა $k \in N_{k_0^+}(N_{k_0^-})$, მაშინ $u(k) = v(k)$.

განმარტება 1.1. ვთქვათ $s; k \in N, k < s, a_i \in R$, მაშინ

$$\textstyle\sum_{j=s}^{k} a_i = -\sum_{j=k}^{s} a_i.$$

ლემა 1.2. ვთქვათ, $u : N \to R; m, s \in N$, მაშინ თუ $k \in N_s^+ (k \in N_s^-)$ გვაქვს

$$\triangle^{(i)}u(k) = \sum_{j=i}^{m-1} \frac{\triangle^{(j)}u(s)}{(j-i)!} \prod_{r=1}^{j-i}(k-s-r+1) + \frac{1}{(m-i-1)!} \sum_{j=s}^{k} \prod_{r=1}^{m-i-1} (k-j-r+1)\triangle^{?(m)}u(j-1),$$
$$(i = 0, \dots, m-1), \text{ როცა } k \in N, \tag{1.2}$$

სადაც

$$\triangle^{(m)}u(s-1) = 0, \ (\triangle^{(m)}u(s) = 0), \ \prod_{r=1}^{0}(k-j-r+1) = 1. \tag{1.3}$$

დამტკიცება. ვიგულისხმოთ, $k \in N_s^+$. აღვნიშნოთ,

$$u_1(k) = \triangle^{(i)}u(k). \tag{1.4}$$

$$u_2(k) = \sum_{j=i}^{m-1} \frac{\triangle^{(j)}u(s)}{(j-i)!} \prod_{r=1}^{j-i}(k-s-r+1) + \frac{1}{(m-i-1)!} \sum_{j=s}^{k} \prod_{r=1}^{m-i-1} (k-j-r+1)\triangle^{(m)}u(j-1), \ k \in N_s^+. \tag{1.5}$$

რადგან

$$\triangle^{(1)}\prod_{r=1}^{j-i}(k-s-r+1)=\prod_{r=1}^{j-i}(k-s-r+2)-\prod_{r=1}^{j-i}(k-s-r+1)=$$

$$=\prod_{r=0}^{j-i-1}(k-s-r+1)-\prod_{r=1}^{j-i}(k-s-r+1)=(k+1-s)\prod_{r=1}^{j-i-1}(k-s-r+1)-$$

$$-(k+1+i-j-s)\prod_{r=1}^{j-i-1}(k-s-r+1)=(j-i)\prod_{r=1}^{j-i-1}(k-s-r+1),$$

ამიტომ (1.3), (1.4) და (1.5)-ის თანახმად $\triangle^{(j)}u_1(s)=\triangle^{(j)}u_2(s),(j=0,\dots,m-i-1)$ და $\triangle^{(m-i)}u_1(k)=\triangle^{(m-i)}u_2(k),(j=0,\dots,m-i-1)$, როცა $k\in N_s^+$, მაშასადამე სრულდება 1.1 შენიშვნის პირობები, რაც ამტკიცებს (1.2) ტოლობის სამართლიანობას, როცა $k\in N_s^+$.

ანალოგიურად, როცა $k\in N_s^-$, თუ გავითვალისწინებთ განმარტება 1.1-ს, მივიღებთ, რომ სრულდება (1.2) პირობა, როცა $k\in N_s^-$, რაც ამტკიცებს ლემის სამართლიანობას. □

ლემა 1.3. ვთქვათ, $u:N\to R;\ m,s\in N$, მაშინ თუ

$$\triangle^{(m)}u(s)=0\ \ (\triangle^{(m)}u(s+1)=0) \tag{1.6}$$

ადგილი აქვს შემდეგ ტოლობებს:

$$\begin{aligned}\sum_{i=s}^{k} i^{m-j-1}\triangle^{(m)}u(i)=\sum_{i=j}^{m-1}(-1)^{m+i-1}\triangle^{(i)}u(k+1)\triangle^{(m-i-1)}(k+i+1-m)^{m-j-1}-\\ -\sum_{i=j}^{m=1}(-1)^{m+i-1}\triangle^{(i)}u(s+1)\triangle^{(m-i-1)}(s+i+1-m)^{m-j-1},\\ \text{როცა } k\in N_s^+(j=0,\dots,m-1),\end{aligned} \tag{1.7}$$

და

$$\begin{aligned}(-\sum_{i=k}^{s}(i+1)^{m-j-1}\triangle^{(m)}u(i+1)=\sum_{i=j}^{m-1}(-1)^{m+i-1}\triangle^{(i)}u(k+1)\triangle^{(m-i-1)}(k+i+1-m)^{m-j-1}-\\ -\sum_{i=j}^{m-1}(-1)^{m+i-1}\triangle^{(i)}u(s+1)\triangle^{(m-i-1)}(s+i+1-m)^{m-j-1}),\\ \text{როცა } k\in N_s^-(j=0,\dots,m-1),\end{aligned} \tag{1.8}$$

დამტკიცება. ვთქვათ, $u; v : N \to R$, მაშინ ცხადია, რომ

$$\triangle^{(1)}(u(k)v(k)) = v(k+1)\triangle^{(1)} u(k) + u(k)\triangle^{(1)} v(k).$$

თუ ვისარგებლებთ მოცემული ტოლობით, გვექნება:

$$\begin{aligned}\triangle^{(1)}(\sum_{i=j}^{m-1}(-1)^{m+i-1}\triangle^{(i)} u(k+1)\triangle^{(m-i-1)}(k+i+1-m)^{m-j-1}) =\\ = \sum_{i=j}^{m-1}(-1)^{m+i-1}\triangle^{(i+1)} u(k+1)\triangle^{(m-i-1)}(k+i+2-m)^{m-j-1} +\\ + \sum_{i=j}^{m-1}(-1)^{m+i-1}\triangle^{(i)} u(k+1)\triangle^{(m-i)}(k+i-1-m)^{m-j-1}.\end{aligned} \tag{1.9}$$

რადგან

$$\triangle^{(m-j)}(k+j+1-m)^{m-j-1} = 0,$$

(1.9)-დან გვექნება:

$$\begin{aligned}&\triangle^{(1)}(\sum_{i=j}^{m-1}(-1)^{m+i-1}\triangle^{(i)} u(k+1)\triangle^{(m-i-1)}(k+i+1-m)^{m-j-1}) =\\ &= \sum_{i=j}^{m-1}(-1)^{m+i-1}\triangle^{(i+1)} u(k+1)\triangle^{(m-i-1)}(k+i+2-m)^{m-j-1} +\\ &+ \sum_{i=j+1}^{m-1}(-1)^{m+i-1}\triangle^{(i)} u(k+1)\triangle^{(m-i)}(k+i+1-m)^{m-j-1} =\\ &= \sum_{i=j}^{m-2}(-1)^{m+i-2}\triangle^{(i)} u(k+1)\triangle^{(m-i)}(k+i+1-m)^{m-j-1} +\\ &+ \triangle^{(m)}u(k+1)(k+1)^{m-j-1} -\\ &- \sum_{i=j}^{m-2}(-1)^{m+i-1}\triangle^{(i)} u(k+1)\triangle^{(m-i)}(k+i+1-m)^{m-j-1} =\\ &= \triangle^{(m)}u(k+1)(k+1)^{m-j-1}.\end{aligned}$$

მეორეს მხრივ:

$$\triangle^{(1)}(\sum_{i=s}^{k} i^{m-i-1}\triangle^{(m)} u(i)) = \triangle^{(m)}u(k+1)(k+1)^{m-j-1}.$$

ამიტომ თუ გავითვალისწინებთ (1.6)-ის პირველ პირობას და 1.1. შენიშვნას, ცხადია, რომ სრულდება (1.7) პირობა. (1.6)-ის მეორე პირობის გამოყენებით, ანალოგიურად ვაჩვენებთ,

რომ ადგილი აქვს (1.8) ტოლობას, რაც ამტკიცებს ლემის სამართლიანობას. $\square$

ლემა 1.4. ვთქვათ, $u : N \to R;\ k_0; n \in N$ და

$$(-1)^i \triangle^{(i)} u(k) > 0 \ (i = 0, \dots, n-1), \ \ (-1)^n \triangle^{(n)} u(k) \geqslant 0, \text{ როცა } k \in N_k^+. \tag{1.10}$$

მაშინ:

$$\sum_{k=1}^{+\infty} k^{n-1} | \triangle^{(n)} u(k)| < +\infty, \tag{1.11}$$

$$| \triangle^{(i)} u(k)| \geqslant \frac{1}{(n-i-1)!} \sum_{i=k}^{+\infty} \prod_{r=1}^{n-i-1} (j-k+r-1) | \triangle^{(n)} u(i)|, \text{ როცა } k \in N_{k_0}^+ \ (i = 0, \dots, n-1), \tag{1.12}$$

$$u(k) \geqslant u(s) + \sum_{j=1}^{n-1} \frac{| \triangle^{(j)} u(s)|}{j!} \prod_{r=1}^{j} (j-k+r-1), \text{ როცა } s \geqslant k. \tag{1.13}$$

დამტკიცება. ვთქვათ, $k_0 \leqslant k \leqslant s$. ზოგადობის შეუზღუდავად ვიგულისხმოთ, რომ $\triangle^{(n)} u(s) = 0$. ვთქვათ, $m = n$. (1.10)-ის თანახმად (1.2)-დან, რადგან $k \leqslant s$, გვექნება

$$| \triangle^{(i)} u(k)| = (-1)^i \triangle^{(i)} u(k) = \sum_{j=i}^{n-1} \frac{(-1)^j \triangle^{(j)} u(s)}{(j-i)!} \prod_{r=1}^{j-i} (k-s-r+1) -$$
$$- \frac{1}{(n-i-1)!} \sum_{j=k}^{s} (-1)^i \prod_{r=1}^{m-i-1} (k-j-r+1) \triangle^{(n)} u(j).$$

მაშასადამე:

$$\begin{aligned} | \triangle^{(i)} u(k)| &= \sum_{j=i}^{n-1} \frac{(-1)^{j+i-1} \triangle^{(j)} u(s)}{(j-i)!} \prod_{r=1}^{j-i} (s+r-k-1) - \\ &- \frac{1}{(n-i-1)!} \sum_{j=k}^{s} (-1)^{n-i-1+i} \prod_{r=1}^{n-i-1} (j+r-k-1) \triangle^{(n)} u(j) = \\ &= \sum_{j=i}^{n-1} \frac{| \triangle^{(j)} u(s)|}{(j-i)!} \prod_{r=1}^{j-i} (s+r-k-1) + \\ &+ \frac{1}{(n-i-1)!} \sum_{j=k}^{s} (-1)^n \triangle^{(n)} u(j) \prod_{r=1}^{n-j-1} (j+r-k-1). \end{aligned} \tag{1.14}$$

უკანასკნელი ტოლობიდან, თუ გავითვალისწინებთ (1.10)-ს, მივიღებთ:

$$| \triangle^{(i)} u(k)| \geqslant \tfrac{1}{(n-i-1)!} \sum_{j=k}^{s} | \triangle^{(n)} u(j)| \prod_{r=1}^{n-i-1}(j+r-k-1).$$

თუ უკანასკნელ უტოლობაში გადავალთ ზღვარზე, როცა $s \to +\infty$ $(s \in N)$, მივიღებთ, რომ სრულდება (1.11) და (1.12) პირობები.

რადგან $(-1)^n \triangle^{(n)} u(j) \geqslant 0$, ამიტომ (1.13) უშუალოდ გამომდინარეობს (1.14)-დან. ლემა დამტკიცებულია. □

ლემა 1.5. ვთქვათ, $u : N \to R$, რომელიმე $k_0 \in N$ და $l \in \{1, \dots, n-1\}$, სრულდება (1.1) უტოლობები, მაშინ

$$\sum_{k=1}^{+\infty} k^{n-l-1} | \triangle^{(n)} u(k)| < +\infty, \tag{1.15}$$

არსებობს $k_1 \in N_{k_0}^{+}$ ისეთი, რომ

$$| \triangle^{(i)} u(k)| \geqslant \frac{1}{(n-i-1)!} \sum_{j=k}^{+\infty} \prod_{r=1}^{n-i-1} (j+r-k-1) | \triangle^{(n)} u(j)|, \text{ როცა } k \in N_{k_1}^{+} \ (i = l, \dots, n-1), \tag{1.16}$$

$$\begin{aligned} \triangle^{(i)} u(k) \geqslant \triangle^{(i)} u(k_1) + \frac{1}{(l-i-1)!(n-l-1)!} \sum_{s=k_1}^{k-1} \prod_{r=1}^{l-i-1} (k+r-s-1) \times \\ \times \sum_{j=s}^{+\infty} \prod_{r=1}^{n-l-1} (j+r-s-1) | \triangle^{(n)} u(j)|, \text{ როცა } k \in N_{k_1}^{+} \ (i = 0, \dots, l-1). \end{aligned} \tag{1.17}$$

გარდა ამისა, თუ

$$\sum_{k=1}^{+\infty} k^{n-l} | \triangle^{(n)} u(k)| = +\infty, \tag{1.18}$$

მაშინ

$$\frac{\triangle^{(l-i)} u(k)}{\prod_{j=0}^{i-1} (k-j)} \downarrow, \quad \frac{\triangle^{(l-i)} u(k)}{\prod_{j=1}^{i-1} (k-j)} \uparrow, \tag{1.19}$$

საკმარისად დიდი k-სთვის,

$$u(k) \geqslant \frac{1+O(1)}{l!} k^{l-1} \triangle^{(l-1)} u(k) \tag{1.20}$$

და

$$\triangle^{(l-1)} u(k) \geqslant \frac{k}{(n-l)!} \sum_{i=k}^{+\infty} i^{n-l+1} \triangle^{(n)} u(k) + \frac{1}{(n-l)!} \sum_{i=k_2}^{k} i^{n-l} \triangle^{(n)} u(i), \text{ როცა } k \in N_{k_2}^{+}, \tag{1.21}$$

სადაც k_2 საკმარისად დიდი რიცხვია.

დამტკიცება. ვთქვათ, $u : N \to R$, სრულდება (1.1) პირობა და $k_j \in N^+_{k_1}$. ვიგულისხმოთ, რომ სრულდება (1.6)-ის პირველი პირობა. (1.1)-ის თანახმად, (1.7) ტოლობიდან

$$\begin{aligned}\sum_{i=s}^{k}(-1)^{n-l}i^{n-l-1} \triangle^{(n)} u(i) = \sum_{i=l}^{n-1}(-1)^{l+i} \triangle^{(i)} u(s+1) \triangle^{(n-i-1)} (s+i+1-n)^{n-l-1}- \\ -\sum_{i=l}^{n-1}(-1)^{i+l} \triangle^{(i)} u(k+1) \triangle^{(n-i-1)} (k+i+1-n)^{n-l-1}.\end{aligned} \tag{1.22}$$

ამიტომ, რადგან $(-1)^{n-l} \triangle^{(n)} u(i) \geqslant 0$ და $(-1)^{i+l} \triangle^{(i)} u(k) > 0$ $(i = l, \dots, n-1)$, (1.22) ტოლობიდან მივიღებთ

$$\sum_{i=s}^{k} i^{n-l-1}| \triangle^{(n)} u(i)| \leqslant \sum_{i=l}^{n-1} | \triangle^{(i)} u(s+1)| \triangle^{(n-i-1)} (s+i+1-n)^{n-l-1}, \text{ როცა } k \in N^+_s.$$

თუ უკანასკნელ უტოლობაში გადავალთ ზღვარზე, როცა $k \to +\infty$, მივიღებთ, რომ სრულდება (1.12) უტოლობა. (1.6)-ის მეორე პირობის თანახმად (1.8)-დან ანალოგიურად მივიღებთ, რომ:

$$\sum_{i=l}^{n-1} |\triangle^{(i)} u(k+1)| \triangle^{(n-i-1)} (k+i+1-n)^{n-l-1} \geqslant \sum_{i=k}^{+\infty} i^{n-l-1}|\triangle^{(n)} u(i+1)|, \text{ როცა } k \in N^+_{k_1}. \tag{1.23}$$

(1.1) და (1.12)- ის გათვალისწინებით (1.2)-დან მივიღებთ (1.13). ანალოგიურად, (1.2) ტოლობიდან, როცა $s = k$ და $m = l$ მივიღებთ

$$\triangle^{(i)}u(k) \geqslant \triangle^{(i)}u(k) + \frac{1}{(l-i-1)!} \sum_{j=k_2}^{k} \prod_{r=1}^{l-i-1} (k-j+r-1) \triangle^{(l)} u(j-1), \ (i = 0, \dots, l-1)$$

როცა $k \in N^+_{k_1}$.

ამრიგად, (1.13)-ის თანახმად მივიღებთ (1.14). თუ ვისარგებლებთ (1.1), მაშინ (1.7)-დან, როცა $j = l-1$ და $m = n$, როცა $s = k$, გვექნება:

$$\begin{aligned}\triangle^{(l-1)} u(k) = \frac{1}{(n-l)!} \sum_{i=k_1}^{k} i^{n-l}| \triangle^{(n)} u(i)| + \frac{1}{(n-l)!} \sum_{i=l}^{n-1} | \triangle^{(i)} u(k+1)| \times \\ \times \triangle^{(m-i-1)}(k+i+1-n)^{n-l} + \frac{1}{(n-l)!} \sum_{i=l-1}^{n-1} (-1)^{n+i-1} \triangle^{(i)} u(k_1+1) \triangle^{(n-i-1)} (k_1+i+1-n)^{n-l}.\end{aligned}$$

მაშასადამე, (1.18)-ის ძალით არსებობს $k_* \in N_{k_1}^+$ ისეთი, რომ

$$\triangle^{(l-1)}u(k) \geqslant \frac{1}{(n-l)!}\sum_{i=k_*}^{k} i^{n-l}|\triangle^{(n)} u(i)|+ \\ \frac{1}{(n-l)!}\sum_{i=l}^{n-1}|\triangle^{(i)} u(k+1)|\triangle^{(n-i-1)} (k+i+1-n)^{n-l}, \ \text{როცა} \ k\in N_{k_*}^+. \tag{1.24}$$

უკანასკნელი უტოლობიდან (1.18)-ის ძალით გვაქვს

$$\triangle^{(l-1)}u(k+1)-(k+l+1-n)\triangle^{(l)} u(k+1)\to+\infty, \text{როცა } k\to+\infty. \tag{1.25}$$

და (1.18)-ის თანახმად სრულდება (1.21) უტოლობა.
ვთქვათ, $k_0\in N$ და როცა $k\in N_{k_0}^+$ და $i\in\{1,\dots,l\}$ აღვნიშნოთ:

$$\rho_i(k)=i\triangle^{(l-i)} u(k)-(k+1-i)\triangle^{(l-i+1)} u(k), \tag{1.26}$$

$$\gamma_i(k)=(k-i)\triangle^{(l-i+1)} u(k)-(i-1)\triangle^{(l-i)} u(k). \tag{1.27}$$

თუ ვისარგებლებთ ლოპიტალის წესით (1.25)-ის თანახმად გვაქვს:

$$\lim_{k\to\infty}\frac{\triangle^{(l-i)}u(k)}{\prod_{j=1}^{i-1}(k-j)}=+\infty,\ (i=1,\dots,l). \tag{1.28}$$

(აქ იგულისხმება, რომ $\prod_{j=1}^{0}(k-j)=1$).
რადგან:

$$\triangle^{(1)}(\frac{\triangle^{(l-i)}u(k)}{\prod_{j=1}^{i-1}(k-j-1)})=\frac{\gamma_i(k)}{\prod_{j=0}^{i-1}(k-j-1)} \tag{1.29}$$

ცხადია არსებობს:

$$k_l>\cdots>k_1>k_0,\ \text{ისეთი, რომ } \gamma_i(k_i)>0\ (i=1,\dots,l). \tag{1.30}$$

წინააღმდეგ შემთხვევაში რომელიმე $i\in\{1,\dots,l\}$-სთვის არსებობს $k_0\in N$, გვაქვს:

$$\triangle^{(1)}(\frac{\triangle^{(l-i)}u(k)}{\prod_{j=1}^{l-1}(k-j)})\leqslant 0,\ \text{როცა } k\in N_k.$$

ამიტომ:

$$\lim_{k\to+\infty}\frac{\triangle^{(l-1)}u(k)}{\prod_{j=1}^{i-1}(k-j)}<+\infty.$$

ეს კი ეწინააღმდეგება (1.28) პირობას, ამიტომ ქვემოთ ვიგულისხმებთ, რომ სრულდება (1.30).

(1.25)-ის თანახმად $\rho_i(k)\to+\infty$ და $\triangle^{(1)}\rho_{i+1}(k)=\rho_i(k),\triangle^{(1)}\gamma_{i+1}(k)=\gamma_i(k)$. რადგან

$\gamma_1(k) = (k-1) \triangle^{(1)} u(k) > 0, k \in N_{k_0}^+$, ამიტომ (1.30)-ის ძალით საკმარისად დიდი k-სთვის გვექნება $\gamma_i(k) > 0$ $(i = 1, \ldots, l)$.

მეორეს მხრივ:

$$\triangle^{(1)}\left(\frac{\triangle^{(l-i)}u(k)}{\prod_{j=0}^{i-1}(k-j)}\right) = \frac{-\rho_i(k)}{\prod_{j=0}^{i-1}(k-j)} \leqslant 0. \tag{1.31}$$

(1.29) და (1.31)-ის თანახმად სრულდება (1.19) პირობები.

მეორეს მხრივ, რადგან $\rho_i(k) \to +\infty$, (1.26) თანახმად საკმარისად დიდი k-სთვის ,

$$i \triangle^{(l+i)} u(k) > (k+1-i) \triangle^{(l-i+1)} u(k) \; (i = 1, \ldots, l),$$

საიდანაც გამომდინარეობს, რომ დიდი k-სთვის სრულდება (1.20), რაც ამტკიცებს ლემის სამართლიანობას. $\square$

2 (1.1) ტიპის ამონახსნების არსებობის აუცილებელი პირობები

ვთქვათ, $k_0 \in N$ და $l \in \{1, \dots, n-1\}$. U_{l,k_0}-ით აღვნიშნოთ (0.1) განტოლების ამონახსნების სიმრავლე, რომლებიც აკმაყოფილებენ (1.1) პირობას. მოცემულ პარაგრაფში იგულისხმება, რომ სრულდება შემდეგი პირობები:

$$|F(u)(k)| \geqslant p(k)\omega(|u(\sigma(k))|), \text{ როცა } k \in N_{k_0}^+, u \in H_{k_0,\tau}. \tag{2.1}$$

$\omega : (0, +\infty) \to (0, +\infty)$ არაკლებადია და

$$\int_1^{+\infty} \frac{ds}{\omega(s)} < +\infty, \tag{2.2}$$

$$\sigma(k) \leqslant k \text{ როცა } k \in N, \sigma : N \to N, \lim_{k\to+\infty} \sigma(k) = +\infty. \tag{2.3}$$

თეორემა 2.1. ვთქვათ, $k_0 \in N$, სრულდება (0.2) ((0.3)), პირობა, $u : N_{k_0} \to R$ არის (0.1) განტოლების მონახსნი, რომელიც აკმაყოფილებს (1.1) პირობას, $l \in \{1, \dots, n-1\}$, სადაც $l+n$ კენტია ($l+n$ ლუწია). გარდა ამისა სრულდება (2.1)-(2.3) პირობები, $U_{l,k_0} \neq \emptyset, u \in U_{l,k_0}$ და

$$\sum_{k=1}^{+\infty} k^{n-l} | \triangle^{(n)} (u(k))| = +\infty, \tag{2.4}$$

$$\sigma \text{ არაკლებადია და } \lim_{k\to+\infty} \inf \frac{\sigma(k)}{k} > 0. \tag{2.5}$$

მაშინ

$$\sum_{k=1}^{+\infty} k^{n-l} \sigma^{l-1}(k) p(k) < +\infty. \tag{2.6}$$

დამტკიცება. ზოგადობის დაურღვევლად ვიგულისხმოთ, რომ $u(k) > 0$ როცა $k \in N_{k_0}$. (2.4)-ის თანახმად, ცხადია, სრულდება 1.5 ლემის პირობები. ამიტომ, 1.5 ლემის თანახმად, სრულდება (1.19)-(1.21) პირობები. (1.21)-დან, თუ გავითვალისწინებთ (0.1) და (2.1), მივიღებთ:

$$\triangle^{(l-1)} u(k) \geqslant \frac{1}{(n-l)!} \sum_{i=k_0}^{k} i^{n-l} p(i) \omega(u(\sigma(i))).$$

აქედან, რადგან ω არაკლებადია, გვაქვს

$$\triangle^{(l-1)} u(k) \geqslant \frac{1}{(n-l)!} \sum_{i=k_0}^{k} i^{n-l} p(i) \omega(\frac{1}{l!} \sigma^{l-1}(i) \triangle^{(l-1)} u(\sigma(i))). \tag{2.7}$$

(1.19) პირველი პირობის თანახმად, თუ გავითვალისწინებთ, რომ $\sigma(k) \leqslant k$, (2.6)-დან

მივიღებთ

$$\triangle^{(l-1)}u(k) \geqslant \frac{1}{(n-l)!}\sum_{i=k_0}^{k} i^{n-l}p(i)\omega(\frac{1}{l!}\sigma^{l-1}(i)\frac{\sigma(i)}{i}\triangle^{(l-1)}u(i)). \tag{2.8}$$

მეორეს მხრივ, თუ გავითვალისწინებთ (2.5)-ის მეორე პირობას, არსებობს $c > 0$ და $k_1 \in N_{k_0}$ ისეთი, რომ $\sigma(i) > c \cdot i$, როცა $i \in N_{k_1}$. მაშასადამე, (2.8)-დან გვაქვს

$$\triangle^{(l-1)}u(k) \geqslant \frac{1}{(n-l)!}\sum_{i=k_1}^{k} i^{n-l}p(i)\omega(\frac{c}{l!}\sigma^{l-1}(i)\triangle^{(l-1)}u(i)).$$

ე.ი.

$$\frac{c}{l!}\sigma^{l-1}(k)\triangle^{(l-1)}u(k) \geqslant \frac{c\cdot\sigma^{l-1}(k)}{l!(n-l)!}\sum_{i=k_1}^{k} i^{n-l}p(i)\omega(\frac{c}{l!}\sigma^{l-1}(i)\triangle^{(l-1)}u(i)).$$

თუ გავითვალისწინებთ, რომ σ ფუნქცია არაკლებადია, უკანასკნელი უტოლობიდან გვექნება

$$x(k) \geqslant \frac{c}{l!(n-l)!}\sum_{i=k_1}^{k} i^{n-l}\sigma^{l-1}(i)p(i)\omega(x(i)), \tag{2.9}$$

სადაც $x(k) = \frac{c}{l!}\sigma^{l-1}(k)\triangle^{(l-1)}u(k)$. (2.9)-დან გვაქვს

$$\frac{\omega(x(k))}{\omega(\sum_{i=k_1}^{k} p(i)i^{n-l}\sigma^{l-1}(i)\omega(x(i)))} \geqslant \omega(\frac{c}{l!(n-l)!}). \tag{2.10}$$

აღვნიშნოთ

$$a(k) = \sum_{i=k_1}^{k} i^{n-l}\sigma^{l-1}(i)\omega(x(i)). \tag{2.11}$$

(2.10)-დან გვაქვს

$$\frac{p(k)k^{n-l}\sigma^{l-1}(k)\omega(x(k))}{\omega(\sum_{i=k_1}^{k} p(i)i^{n-l}\sigma^{l-1}(i)\omega(x(i)))} \geqslant \omega(\frac{c}{l!(n-l)!})p(k)k^{n-l}\sigma^{l-1}(k).$$

თუ გავითვალისწინებთ (2.11)-ს, უკანასკნელი უტოლობიდან მივიღებთ

$$\frac{(a(k)-a(k-1))}{\omega(a(k))} \geqslant \omega(\frac{c}{l!(n-l)!})p(k)k^{n-l}\sigma^{l-1}(k).$$

თუ უკანასკნელ უტოლობას ავჯამავთ k_1-დან k-მდე, გვექნება

$$\sum_{i=k_1}^{k}\frac{(a(i)-a(i-1))}{\omega(a(i))} \geqslant \omega(\frac{c}{l!(n-l)!})\sum_{i=k_1}^{k} p(i)i^{n-l}\sigma^{l-1}(i).$$

ე.ი.

$$\sum_{i=k_1}^{k} \frac{\int_{a(i-1)}^{a(i)} dt}{\omega(a(i))} \geqslant \omega(\frac{c}{l!(n-l)!}) \sum_{i=k_1}^{k} p(i) i^{n-l} \sigma^{l-1}(i). \tag{2.12}$$

თუ გავითვალისწინებთ, რომ $\frac{1}{\omega(a(i))} \leqslant \frac{1}{\omega(t)}$, როცა $a(i-1) \leqslant t \leqslant a(i)$, (2.12)-დან მივიღებთ

$$\sum_{i=k_1}^{k} \int_{a(i-1)}^{a(i)} \frac{dt}{\omega(t)} \geqslant \omega(\frac{c}{l!(n-l)!}) \sum_{i=k_1}^{k} p(i) i^{n-l} \sigma^{l-1}(i).$$

მაშასადამე

$$\int_{a(k_1-1)}^{a(k)} \frac{dt}{\omega(t)} \geqslant \omega(\frac{c}{l!(n-l)!}) \sum_{i=k_1}^{k} p(i) i^{n-l} \sigma^{l-1}(i).$$

აქედან მივიღებთ

$$\sum_{i=k_1}^{k} i^{n-l} \sigma^{l-1}(i) p(i) \leqslant c_0 \int_{a(k_1-1)}^{a(k)} \frac{dt}{\omega(t)},$$

სადაც

$$c_0 = \frac{1}{\omega(\frac{c}{l!(n-l)!})}.$$

მაშასადამე

$$\sum_{i=k_1}^{k} i^{n-l} \sigma^{l-1}(i) p(i) \leqslant c_0 \int_{a(k_1-1)}^{+\infty} \frac{ds}{\omega(s)} < +\infty.$$

თუ უკანასკნელ უტოლობაში გადავალთ ზღვარზე, როცა $k \to +\infty$, მივიღებთ

$$\sum_{i=k_1}^{+\infty} i^{n-l} \sigma^{l-1}(i) p(i) < +\infty.$$

ე.ი. სრულდება (2.6) პირობა, რაც ამტკიცებს თეორემის სამართლიანობას. □

თეორემა 2.2. ვთქვათ, $k_0 \in N$, სრულდება (0.2) ((0.3)), პირობა, $u : N_{k_0}^{+} \to R$ არის (0.1) განტოლების მონახსნი, რომელიც აკმაყოფილებს (1.1) პირობას, $l \in \{1, \dots, n-1\}$, სადაც $l+n$ კენტია ($l+n$ ლუწია). გარდა ამისა სრულდება (2.1)-(2.3) პირობები, არსებობს $M > 0$, კლებადი ფუნქცია $\omega : (0, +\infty) \to (0, +\infty)$ და $k_1 \in N$ ისეთი, რომ

$$\omega(\frac{1}{l!} \frac{\sigma^{l-1}(k)}{k} y) > \omega_1(\frac{1}{l!} \frac{\sigma^{l-1}(k)}{k}) \omega(y), \text{ როცა } k \in N_{k_1}^{+}, y \geqslant M, \tag{2.13}$$

მაშინ, თუ

$$\lim_{k \to +\infty} \inf \frac{\sigma(k)}{k} > 0, \tag{2.14}$$

გვაქვს

$$\sum_{k=1}^{+\infty} p(i) i^{n-l} \omega_1 (\frac{1}{l!} \frac{\sigma^{l-1}(i)}{i}) < +\infty. \tag{2.15}$$

დამტკიცება. ვთქვათ, $k_0 \in N$ სრულდება (0.2) ((0.3)) და $u : N_{k_0}^+ \to R$ არის (0.1) განტოლების ამონახსნი, რომელიც აკმაყოფილებს (1.1) პირობას, სადაც, $l \in \{1, \ldots, n-1\}$, სადაც $l+n$ კენტია ($l+n$ ლუწია),

$$\sum_{k=1}^{+\infty} k^{n-l} | \triangle^{(n)} u(k)| = +\infty.$$

ამიტომ, ცხადია სრულდება 1.5 ლემის პირობები. ამრიგად, 2.1 თეორემის ანალოგიურად ვაჩვენებთ, რომ u ფუნქცია აკმაყოფილებს უტოლობას

$$\triangle^{(l-1)} u(k) \geqslant \frac{1}{(n-l)!} \sum_{i=k_0}^{k} i^{n-l} p(i) \omega (\frac{1}{l!} \sigma^{l-1}(i) \triangle^{(l-1)} u(\sigma(i))). \tag{2.16}$$

რადგან სრულდება 1.5 ლემის პირბები, ამიტომ, ცხადია, არსებობს $k_2 \in N_{k_1}^+$ ისეთი, რომ $\frac{1}{l!} \triangle^{(n-l)} u(\sigma(k)) \geqslant M$. ამიტომ, (2.8)-ის თანახმად, გვაქვს

$$\triangle^{(l-1)} u(k) \geqslant \frac{1}{(n-l)!} \sum_{i=k_2}^{k} i^{n-l} p(i) \omega_1 (\sigma^{l-1}(i)) \omega (\frac{1}{l!} \triangle^{(l-1)} u(\sigma(i))). \tag{2.17}$$

მეორეს მხრივ, თუ გავითვალისწინებთ, რომ $\sigma(k) \leqslant k$, (1.19) პირველი პირობის თანახმად

$$\triangle^{(l-1)} u(k) = k \frac{\triangle^{(l-1)} u(k)}{k} \leqslant \frac{k}{\sigma(k)} \triangle^{(l-1)} u(\sigma(k)).$$

მაშასადამე

$$\triangle^{(l-1)} u(\sigma(k)) \geqslant \frac{\sigma(k)}{k} \triangle^{(l-1)} u(k).$$

ამიტომ (2.17)-დან გვაქვს

$$\triangle^{(l-1)} u(k) \geqslant \frac{1}{(n-l)!} \sum_{i=k_2}^{k} i^{n-l} p(i) \omega_1 (\sigma^{l-1}(i)) \omega (\frac{1}{l!} \frac{\sigma(i)}{i} \triangle^{(l-1)} u(i)). \tag{2.18}$$

(2.14)-ის თანახმად არსებობს $\alpha > 0$ და $k_3 \in N_{k_2}$ ისეთი, რომ

$$\frac{1}{l!}\frac{\sigma(k)}{k} \geqslant \alpha > 0, \text{ როცა} k \in N_{k_3}^{+}.$$

ამიტომ (1.18)-დან გვაქვს

$$\triangle^{(l-1)}u(k) \geqslant \frac{1}{(n-l)!}\sum_{i=k_2}^{k} i^{n-l}p(i)\omega_1(\sigma^{l-1}(i))\omega(\alpha\triangle^{(l-1)}u(i)).$$

აქედან ω ფუნქციის არაკლებადობის გამო

$$\omega(\alpha\triangle^{(l-1)}u(k)) \geqslant \omega(\frac{\alpha}{(n-l)!}\sum_{i=k_2}^{k} i^{n-l}p(i)\omega_1(\sigma^{l-1}(i))\omega(\alpha\triangle^{(l-1)}u(i))).$$

აქედან თუ უტოლობის ორივე მხარეს გავამრავლებთ $k^{n-l}p(k)\omega_1(\sigma^{l-1}(k))$, მივიღებთ

$$\frac{\omega(\alpha\triangle^{(l-1)}u(k))k^{n-l}p(k)\omega_1(\sigma^{l-1}(k))}{\omega(\frac{\alpha}{(n-l)!}\sum_{i=k_0}^{k} i^{n-l}p(i)\omega_1(\sigma^{l-1}(i))\omega(\alpha\triangle^{(l-1)}u(i)))} \geqslant k^{n-l}p(k)\omega_1(\sigma^{l-1}(k)).$$

თუ უტოლობის ორივე მხარეს ავჯამავთ k_0 და k-მდე, გვაქვს:

$$\sum_{s=k_0}^{k}\frac{\frac{\alpha}{(n-l)!}\omega(\alpha\triangle^{(l-1)}u(s))s^{n-l}p(s)\omega_1(\sigma^{l-1}(s))}{\omega(\frac{\alpha}{(n-l)!}\sum_{i=k_0}^{s} i^{n-l}p(i)\omega_1(\sigma^{l-1}(i))\omega(\alpha\triangle^{(l-1)}u(i)))} \geqslant \sum_{s=k_0}^{k}\frac{\alpha}{(n-l)!}s^{n-l}p(s)\omega_1(\sigma^{l-1}(s)). \tag{2.19}$$

აღვნიშნოთ

$$a(s) = \frac{\alpha}{(n-l)!}\sum_{i=k_0}^{s} i^{n-l}p(i)\omega_1(\sigma^{l-1}(i))\omega(\alpha\triangle^{(l-1)}u(i))$$

(2.19)-დან მივიღებთ

$$\frac{(n-l!)}{\alpha}\sum_{s=k_0}^{k}\frac{a(s)-a(s-1)}{\omega(a(s))} \geqslant \sum_{s=k_0}^{k} s^{n-l}p(s)\omega_1(\sigma^{l-1}(s)). \tag{2.20}$$

მეორეს მხრივ

$$\sum_{s=k_0}^{k}\frac{a(s)-a(s-1)}{\omega(a(s))} = \sum_{s=k_0}^{k}\frac{\int_{a(s-1)}^{a(s)}dt}{\omega(a(s))}. \tag{2.21}$$

რადგან $\frac{1}{\omega(s)} \leqslant \frac{1}{\omega(t)}$ როცა $a(s-1) \leqslant t \leqslant a(s)$. ამიტომ (2.21)-დან გვაქვს

$$\sum_{s=k_0}^{k}\frac{a(s)-a(s-1)}{\omega(a(s))} \leqslant \sum_{s=k_0}^{k}\int_{a(s-1)}^{a(s)}\frac{1}{\omega(t)}dt = \int_{a(k_0-1)}^{a(k)}\frac{1}{\omega(t)}dt < \int_{a(k_0-1)}^{+\infty}\frac{dt}{\omega(s)}.$$

ამიტომ თუ (2.20) გადავალთ ზღვარზე, როცა $k \to +\infty$ მივიღებთ

$$\sum_{s=k_0}^{+\infty} s^{n-l} p(s) \omega_1(\sigma^{l-1}(s)) < +\infty.$$

რაც ამტკიცებს თეორემის სამართლიანობას. $\square$

თეორემა 2.3. ვთქვათ, $k_0 \in N$, სრულდება (0.2) ((0.3)) პირობა, $u : N_{k_0}^{+} \to R$ არის (0.1) განტოლების ამონახსნი, რომელიც აკმაყოფილებს (1.1) პირობას, სადაც $l \in \{1, \dots, n-1\}$, $l+n$ კენტია ($l+n$ ლუწია). გარდა ამისა, სრულდება (2.1), (2.3) პირობა, სადაც $\omega : (0, +\infty) \to (0, +\infty)$ არაკლებადია და

$$\int_0^1 \frac{ds}{\omega(s)} < +\infty, \tag{2.22}$$

არსებობს $M > 0$ და არაკლებადი $\omega_1 : (0, +\infty) \to (0, +\infty)$ ისეთი, რომ

$$\omega(\frac{1}{l!}\sigma^{l-1}(k) y) \geqslant \omega_1(\sigma^{l-1}(k))\omega(y), \text{ როცა } k \in N_{k_0}^{+}, 0 < y \leqslant M. \tag{2.23}$$

მაშინ

$$\sum_{i=1}^{+\infty} i^{n-l-1} p(i) \omega_1(\frac{\sigma^l(i)}{l!}) < +\infty. \tag{2.24}$$

დამტკიცება. ვთქვათ, $k_0 \in N$ და $u \in U_{l,k_0}$, რომელიც აკმაყოფილებს (1.1)პირობას, სადაც $l \in \{1, \dots, n-1\}$, $l+n$ კენტია ($l+n$ ლუწია). რადგან სრულდება (2.3) პირობა, ამიტომ 1.5 ლემის თანახმად სრულდება (1.19)-(1.21) პირობები. (1.21) და (1.20)-ის ძალით მივიღებთ

$$\triangle^{(l-1)} u(k) \geqslant \frac{k}{(n-l)!} \sum_{i=k}^{+\infty} i^{n-l-1} p(i) \omega(\frac{\sigma^{l-1}(i)}{l!} \triangle^{(l-1)} u(\sigma(i))), \ k \in N_{k_0}^{+}.$$

აქედან (2.23) თანახმად გვაქვს

$$\triangle^{(l-1)} u(k) \geqslant \frac{k}{(n-l)!} \sum_{i=k}^{+\infty} i^{n-l-1} p(i) \omega_1(\sigma^{l-1}(i)) \omega(\frac{\triangle^{(l-1)} u(\sigma(i))}{i})).$$

თუ ვისარგებლებთ იმ ფაქტით, რომ ω არაკლებადია და $\frac{\triangle^{(l-1)} u(i)}{i}$ კლებადია, უკანასკნელი უტოლობიდან მივიღებთ

$$\frac{\triangle^{(l-1)} u(k)}{k} \geqslant \frac{1}{(n-l)!} \sum_{i=k}^{+\infty} i^{n-l-1} p(i) \omega_1(\sigma^{l}(i)) \omega(\frac{\triangle^{(l-1)} u(i)}{i})).$$

აღვნიშნოთ $x(k) = \frac{\triangle^{(l-1)} u(k)}{k}$. უკანასკნელი უტოლობიდან გვაქვს

$$\omega(x(k)) \geqslant \omega(\frac{1}{(n-l)!}\sum_{i=k}^{+\infty} i^{n-l-1}p(i)\omega_1(\sigma^l(i))\omega(x(i))),\ k \in N_{k_0}.$$

აქედან

$$\frac{\omega(x(k))k^{n-l-1}p(k)\omega_1(\sigma^l(k))}{\omega(\frac{1}{(n-l)!}\sum_{i=k}^{+\infty} i^{n-l-1}p(i)\omega_1(\sigma^l(i))\omega(x(i)))} \geqslant k^{n-l-1}p(k)\omega_1(\sigma^l(k)).$$

თუ ამ უტოლობის ორივე მხარეს ავჯამავთ k_0-დან k-მდე, მივიღებთ

$$\sum_{s=k_0}^{k} \frac{\frac{1}{(n-l)!}\omega(x(s))s^{n-l-1}p(s)\omega_1(\sigma^l(s))}{\omega(\frac{1}{(n-l)!}\sum_{i=s}^{+\infty} i^{n-l-1}p(i)\omega_1(\sigma^l(i))\omega(x(i)))} \geqslant \frac{1}{(n-l)!}\sum_{s=k_0}^{k} s^{n-l-1}p(s)\omega_1(\sigma^l(s)). \tag{2.25}$$

აღვნიშნოთ

$$a(s) = \frac{1}{(n-l)!}\sum_{i=s}^{+\infty} i^{n-l-1}p(i)\omega_1(\sigma^l(i))\omega(x(i)).$$

(2.25)-დან მივიღებთ

$$\sum_{s=k_0}^{k} \frac{a(s)-a(s+1)}{\omega(a(s)} \geqslant \frac{1}{(n-l)!}\sum_{s=k_0}^{k} s^{n-l-1}p(s)\omega_1(\sigma^l(s)).$$

აქედან გვაქვს

$$\sum_{s=k_0}^{k} \frac{\int_{a(s)}^{a(s+1)} dt}{\omega(a(s+1)} \geqslant \frac{1}{(n-l)!}\sum_{s=k_0}^{k} s^{n-l-1}p(s)\omega_1(\sigma^l(s)). \tag{2.26}$$

რადგან $\frac{1}{\omega(a(s))} \leqslant \frac{1}{\omega(a(t))}$ როცა $a(s) \leqslant t \leqslant a(s+1)$, ამიტომ (2.26)-დან მივიღებთ

$$(n-l)!\sum_{s=k_0}^{k} s^{n-l-1}p(s)\omega_1(\sigma^l(s)) \leqslant \sum_{s=k_0}^{k}\int_{a(s+1)}^{a(s)} \frac{dt}{\omega(t)} = \int_{a(k)}^{a(k_0)} \frac{dt}{\omega(t)} < \int_0^1 \frac{dt}{\omega(t)} < +\infty.$$

(2.26) უტოლობაში თუ გადავალთ ზღვარზე, როცა $k \to +\infty$ მივიღებთ

$$\sum_{s=k_0}^{+\infty} s^{n-l-1}p(s)\omega_1(\frac{\sigma^l(s}{l!s}) < +\infty.$$

ე.ი. სრულდება (2.22), რაც ამტკიცებს თეორემის სამართლიანობას. $\square$

3 (1.1) ტიპის ამონახსნების არ არსებობის საკმარისი პირობები

თეორემა 3.1. ვთქვათ, სრულდება (0.2) ((0.3)), პირობა, $l \in \{1,\dots,n-1\}$, სადაც $l+n$ კენტია ($l+n$ ლუწია), სრულდება (2.1)-(2.4) პირობები. მაშინ იმისათვის, რომ ნებისმიერი $k_0 \in N$-სთვის $U_{l,k_0} = \emptyset$, საკმარისია

$$\sum_{k=1}^{+\infty} k^{n-l}\sigma^{l-1}(k)p(k) = +\infty. \tag{3.1}$$

დამტკიცება. დავუშვათ საწინააღმდეგო. ვთქვათ, არსებობს $k_0 \in N$ ისეთი, რომ $U_{l,k_0} \neq \emptyset$. ამრიგად, (0.1) განტოლებას გააჩნია წესიერი ამონახსნი $u : N_{k_0}^{+} \to R$, რომელიც აკმაყოფილებს (1.1) პირობას. მეორეს მხრივ, სრულდება 2.1 თეორემის პირობები

$$\sum_{k=1}^{+\infty} k^{n-l-1}\sigma^{l-1}(k)p(k) < +\infty.$$

ეს კი ეწინააღმდეგება (3.1) პირობას, მიღებული წინააღმდეგობა ამტკიცებს თეორემის სამართლიანოაბას. □

შედეგი 3.1. ვთქვათ, სრულდება (0.2) ((0.3)), პირობა, $l \in \{1,\dots,n-1\}$, სადაც $l+n$ კენტია ($l+n$ ლუწია),

$$|F(u)(k)| \geqslant p(k)|u(\sigma(k))|^{\lambda}, \text{ როცა} k \in N_{k_0}^{+}, u \in H_{k_0,l}, \tag{3.2}$$

სადაც

$$\lambda > 1, p : N \to R_{+}, \sigma(k) \leqslant k, \sigma \text{ ფუნქცია არაკლებადია და } \lim_{k\to+\infty} \sigma(k) = +\infty. \tag{3.3}$$

მაშინ იმისათვის, რომ ნებისმიერი $k_0 \in N$-სთვის $U_{l,k_0} = \emptyset$, საკმარისია

$$\sum_{k=1}^{+\infty} k^{n-l}p(k)\sigma^{l-1}(k) = +\infty. \tag{3.4}$$

დამტკიცება. (3.2)-(3.4) პირობების თანახმად, ცხადია სრულდება 3.1 თეორემის პირობები, სადაც $\omega(s) = s^{\lambda}$. რაც ამტკიცებს შედეგის სამართლიანობას. □

თეორემა 3.2. ვთქვათ, სრულდება (0.2) ((0.3)), (2.1)-(2.3), (2.9), (2.10) პირობები, სადაც $l \in \{1,\dots,n-1\}$, $l+n$ კენტია ($l+n$ ლუწია). მაშინ იმისათვის, რომ ნებისმიერი $k_0 \in N$-სთვის,

$U_{k_0,l} = \emptyset$, საკმარისია

$$\sum_{k=1}^{+\infty} p(i) i^{n-l} \omega_1(\frac{1}{l!}\sigma^{l-1}(i)) = +\infty. \tag{3.5}$$

დამტკიცება. დავუშვათ საწინააღმდეგო. ვთქვათ, არსებობს $k_0 \in N$ ისეთი, რომ $U_{k_0,l} \neq \emptyset$. მაშასადამე, (0.1) განტოლებას გააჩნია წესიერი ამონახსნი $u : N^+_{k_0} \to R$, რომელიც აკმაყოფილებს (1.1) პირობას.

მეორეს მხრივ, რადგან სრულდება 2.2 თეორემის პირობები, გვაქვს

$$\sum_{k=1}^{+\infty} p(i) i^{n-l} \omega_1(\frac{1}{l!}\sigma^{l-1}(i)) < +\infty.$$

ეს კი ეწინააღმდეგება (3.5) პირობას. მიღებული წინააღმდეგობა ამტკიცებს თეორემის სამართლიანობას. □

შედეგი 3.2. ვთქვათ, სრულდება (0.2) ((0.3)), პირობა, $l \in \{1, \dots, n-1\}$, $l+n$ კენტია ($l+n$ ლუწია),

$$|F(u)(k)| \geqslant p(k)|u(\sigma(k))||\ln u(\sigma(k))|^{\lambda}, \text{ როცა } u \in H_{k_0,\tau}, k \in N^+_{k_0}, \tag{3.6}$$

სადაც

$$\lambda > 1, \sigma(k) \leqslant k, \lim_{k \to +\infty} \sigma(k) = +\infty, p : N \to R_+, \liminf \frac{\sigma(k)}{k} > 0. \tag{3.7}$$

მაშინ იმისათვის, რომ ნებისმიერი $k_0 \in N$-სთვის, $U_{k_0,l} = \emptyset$, საკმარისია

$$\sum_{k=1}^{+\infty} p(i) i^{n-l} \sigma^{l-1}(i) = +\infty. \tag{3.8}$$

დამტკიცება. შედეგის დასამტკიცებლად საკმარისია შევნიშნოთ, რომ (3.6)-(3.8) თანახმად ფუნქციები $\omega(s) = s \ln^{\lambda} s, \omega_1(s) = s$ აკმაყოფილებენ 3.2 თეორემის პირობებს, რაც ამტკიცებს შედეგის სამართლიანობას. □

თეორემა 3.3. ვთქვათ, სრულდება (0.2) ((0.3)), (2.1)-(2.3), პირობები, სადაც ω და ω_1 არაკლებადი ფუნქციებია, რომლებიც აკმაყოფილებენ პირობებს

$$\omega(\frac{1}{l!}\sigma^{l-1}(k)y) \geqslant \omega_1(\sigma^{l-1}(k)\omega(y)), \text{ როცა } k \in N^+_{k_0}, y = M, \tag{3.9}$$

სადაც $M > 0$ საკმარისად დიდი რიცხვია,

$$\int_0^1 \frac{ds}{\omega(s)} < +\infty. \tag{3.10}$$

მაშინ იმისათვის, რომ ნებისმიერი $k_0 \in N, l \in \{1, \dots, n-1\}$,, $l+n$ კენტია, ($l+n$ ლუწია), $U_{l,k_0} = \emptyset$, საკმარისია

$$\sum_{k=1}^{+\infty} i^{n-l-1} p(i) \omega_1 (\frac{\sigma^l(i)}{l!}) = +\infty. \tag{3.11}$$

დამტკიცება. დავუშვათ საწინააღმდეგო. ვთქვათ, არსებობს $k_0 \in N$ და $l \in \{1, \dots, n-1\}$, სადაც $l+n$ კენტია, ($l+n$ ლუწია) ისეთი, რომ $U_{k_0,l} \neq \emptyset$. ე.ი. (0.1) განტოლებას გააჩნია წესიერი ამონახსნი $u : N_{k_0}^+ \to R$, რომელიც აკმაყოფილებს (1.1) პირობას. რადგან (3.9) და (3.10) თანახმად სრულდება 3.2 თეორემის პირობები, ამიტომ

$$\sum_{k=1}^{+\infty} i^{n-l-1} p(i) \omega_1 (\frac{\sigma^l(i)}{l!}) < +\infty,$$

ეს კი ეწინააღმდეგება (3.11) პირობას. მიღებული წინააღმდეგობა ამტკიცებს თეორემის სამართლიანობას. □

შედეგი 3.3. ვთქვათ, სრულდება (0.2) ((0.3)) პირობა, სადაც $l \in \{1, \dots, n-1\}$, $l+n$ კენტია ($l+n$ ლუწია),

$$|F(u)(k)| \geqslant p(k)|u(\sigma(k))|^{\lambda} \tag{3.12}$$

სადაც

$$p : N \to R_+, \sigma(k) \leqslant k, \lim_{k \to +\infty} \sigma(k) = +\infty, 0 < \lambda < 1. \tag{3.13}$$

მაშინ იმისათვის, რომ ნებისმიერი $k_0 \in N$-სთვის, $U_{k_0,l} = \emptyset$, საკმარისია

$$\sum_{k=1}^{+\infty} i^{n-l-1} p(i) \sigma^{\lambda l}(i) = +\infty. \tag{3.14}$$

დამტკიცება. შედეგის დასამტკიცებლად საკმარისია შევნიშნოთ, რომ (3.12)-(3.14) ძალით ცხადია სრულდება 3.3 თეორემის პირობები, სადაც $\omega(s) = \omega, (s) = s^{\lambda}$. □

შედეგი 3.4. ვთქვათ, სრულდება (0.2) ((0.3)) პირობა, სადაც $l \in \{1, \dots, n-1\}$, $l+n$ კენტია ($l+n$ ლუწია),

$$|F(u)(k)| \geqslant p(k)|u(\sigma(k))| \ln^{\lambda}(1+|u(\sigma(k))|) \tag{3.15}$$

სადაც
$$p : N \to R_{+}, \sigma(k) \leqslant k, \lim_{k\to+\infty} \sigma(k) = +\infty, 0 < \lambda < 1. \tag{3.16}$$

მაშინ იმისათვის, რომ ნებისმიერი $k_0 \in N$-სთვის, $U_{k_0,l} = \emptyset$, საკმარისია

$$\sum_{k=1}^{+\infty} i^{n-l-1} p(i) \sigma^{l}(i) = +\infty. \tag{3.17}$$

დამტკიცება. შედეგის სამართლიანობა, (3.15)-(3.17)-ის თანახმად, გამომდინარეობს 3.3 თეორემიდან, სადაც $\omega(s) = s \ln^{\lambda}(1+s), \omega_1(s) = s$ □

4 მაღალი რიგის სხვაობიანი განტოლებები A თვისებით

მესამე პარაგრაფში მოყვანილი შედეგების გამოყენებით, მე-4 და მე-5 პარაგრაფებში მოყვანილი იქნება საკმარისი პირობები იმისა, რომ (0.1) განტოლებას გააჩნდეს A და B თვისება.

თეორემა 4.1. ვთქვათ, სრულდება (0.2), (2.1)-(2.3) პირობები, ნებისმიერი $l \in \{1, \dots, n-1\}$-სთვის, სადაც $l+n$ კენტია,

$$\sum_{k=1}^{+\infty} k^{n-l} \sigma^{l-1}(k) p(k) = +\infty, \tag{4.1}$$

და კენტი n-ის შემთხვევაში

$$\sum_{k=1}^{+\infty} k^{n-1} p(k) = +\infty. \tag{4.2}$$

გარდა ამისა, თუ σ არაკლებადია, $\lim_{k\to+\infty} \inf \frac{\sigma(k)}{k} > 0$,

$$\sum_{k=1}^{+\infty} k^{n-l} \omega(c\sigma^{l-1}(k)) p(k) = +\infty, \tag{4.3}$$

ნებისმიერი $c > 0$-სთვის, $l \in \{1, \dots, n-1\}, (l+n)$ კენტია, მაშინ (0.1) განტოლებას გააჩნია A თვისება.

დამტკიცება. ვთქვათ, $u : N_{k_0}^+ \to R$ არის (0.1) განტოლების არარხევადი ამონახსნი. მაშინ 1.1 ლემის თანახმად არსებობს $l \in \{1, \dots, n-1\}$ ისეთი, რომ $l+n$ კენტია და სრულდება (0.1) პირობა.

პირველ რიგში ვაჩვენოთ, რომ თუ $l \in \{0, \dots, n-1\}$ არსებობს $c_1 > 0$ და $k_1 \in N_{k_0}^+$ ისეთი, რომ

$$u(k) \geqslant c_1 k^{l-1}, \text{ როცა } k \in N_{k_1}^+. \tag{4.4}$$

მართლაც, რადგან $\triangle^{(l)} u(k) \geqslant 0$, ამიტომ გვაქვს

$$\triangle^{(l)} u(k) \geqslant c_1, \text{ როცა } k \in N_{k_0}^+.$$

ამიტომ ტოლობიდან

$$\triangle^{(l-2)} u(k) = \sum_{k=k_0}^{k} \triangle^{(l-1)} u(k) + \triangle^{(l-1)} u(k_0).$$

თუ გავითვალისწინებთ (4.4) გვექნება $\triangle^{(l-2)} u(k) = c_1(k-k_0)$, ამიტომ შევარჩიოთ $c_2 > 0$ და $k_2 \in N_{k_0}^+$ ისე, რომ $\triangle^{(l-2)} u(k) = c_2 k, k \in N_{k_2}^+$. თუ ამ მსვლელობას გავაგრძელებთ, მივიღებთ,

რომ არსებობს $c_l > 0$ და $k_l \in N_{k_0}^+$ ისეთი, რომ სრულდება (4.4) პირობა. ამიტომ (0.1), (2.1) და (4.3) თანახმად, მივიღებთ

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \triangle^{(n)} u(i) i^{n-l} = +\infty, \ l \in \{1, \dots, n-1\}, \ l+n \text{ კენტია.} \tag{4.5}$$

ნებისმიერი $l \in \{1, \dots, n-1\}$, სადაც $l+n$ კენტია, (4.1)-ის თანახმად სრულდება 3.1 თეორემის პირობები. ამიტომ, 3.1 თეორემის თანახმად $l \notin \{1, \dots, n-1\}$. მაშასადამე n კენტია და $l = 0$. ამ შემთხვევაში უნდა ვაჩვენოთ, რომ

$$\triangle^{(i)} u(k) \downarrow 0 \ (i = 0, \dots, n-1), \ \text{ როცა } \ k \uparrow +\infty. \tag{4.6}$$

პირველ რიგში ვაჩვენოთ, რომ სამართლიანია შემდეგი ტოლობა

$$\sum_{j=k_0}^{k} j^{n-1} \triangle^{(n)} u(j) = k^{n-1} \triangle^{(n-1)} u(k+1) - (k_0-1)^{n-1} \triangle^{(n-1)} u(k_0) - \sum_{j=k_0}^{k} \triangle^{(n-1)} u(j) \triangle (j-1)^{n-1}, \ k \in N_{k_0}^+. \tag{4.7}$$

აღვნიშნოთ

$$u_1(k) = \sum_{j=k_0}^{k} j^{n-1} \triangle^{(n)} u(j), u_2(k) = k^{n-1} \triangle^{(n-1)} u(k+1) - (k-1)^{n-1} \triangle^{(n-1)} u(k_0) - \sum_{j=k_0}^{k} \triangle^{(n-1)} u(j) \triangle (j-1)^{n-1}, \ k \in N_{k_0}^+. \tag{4.8}$$

გვაქვს

$$\begin{gathered}
u_1(k_0) = k_0^{n-1} \triangle^{(n)} u(k_0), \\
u_2(k_0) = k_0^{n-1} \triangle^{(n-1)} u(k_0+1) - (k_0-1)^{n-1} \triangle^{(n-1)} u(k_0) - \triangle^{(n-1)} u(k_0) \triangle (k_0-1)^{n-1} = \\
= k_0^{n-1} \triangle^{(n-1)} u(k_0+1) - \triangle^{(n-1)} u(k_0) (\triangle (k_0-1)^{n-1} + (k_0-1)^{n-1}) = \\
= k_0^{n-1} \triangle^{(n-1)} u(k_0+1) - \triangle^{(n-1)} u(k_0) k_0^{n-1} = k_0^{n-1} (\triangle^{(n-1)} u(k_0+1) - \triangle^{(n-1)} u(k_0)) = \\
= k_0^{n-1} \triangle^{(n)} u(k_0).
\end{gathered}$$

მაშასადამე

$$u_1(k_0) = u_2(k_0). \tag{4.9}$$

ახლა ვაჩვენოთ $u_1(k)$ და $u_2(k)$ ფუნქციების სხვაობების ტოლობა. მართლაც

$$\triangle^{(1)}u_1(k) = \sum_{i=k_0}^{k+1} i^{n-1} \triangle^{(n)} u(i) - \sum_{i=k_0}^{k} i^{n-1} \triangle^{(n)} u(i) = (k+1)^{n-1} \triangle^{(n)} u(k+1).$$

$$\triangle^{(1)}u_2(k) = \triangle^{(1)}(k^{n-1} \triangle^{(n-1)} u(k+1)) - \triangle^{(1)}(\sum_{j=k_0}^{k} \triangle^{(n-1)}u(j) \triangle (j-1)^{n-1}) =$$

$$= \triangle^{(n)}u(k+1)(k+1)^{n-1} + \triangle^{(n-1)}u(k+1) \triangle^{(1)} k^{n-1} - \triangle^{(n-1)}u(k+1) \triangle^{(1)} k^{n-1} =$$

$$= (k+1)^{n-1} \triangle^{(n)} u(k+1).$$

ე.ი.

$$\triangle^{(1)}u_1(k) = \triangle^{(1)}u_2(k), \ k \in N_{k_0}^{+}. \tag{4.10}$$

(4.9) და (4.10)-დან გამომდინარეობს, რომ $u_1(k) = u_2(k)$. ე.ი. სამართლიანია (4.7) ტოლობა. თუ გამოვიყენებთ (4.7) ტოლობას რამდენჯერმე, გვექნება

$$\sum_{j=k_0}^{k} j^{n-1} \triangle^{(n)} u(j) = \sum_{j=0}^{n-1}(-1)^j \triangle^{(j)} (k-j)^{n-1} \triangle^{(n-j-1)} u(k+1) -$$

$$\sum_{j=0}^{n-1}(-1)^j (k_0-j-1)^{n-j-1} \triangle^{(n-j-1)} u(k_0). \tag{4.11}$$

ახლა ვაჩვენოთ, რომ სრულდება (4.6) პირობა. წინააღმდეგ შემთხვევაში მოიძებნება $c>0$ და $k_0 \in N$ ისეთი, რომ $u(k) \geqslant c$, როცა $k \in N_{k_0}^{+}$. ე.ი. (0.1) და (2.1)-ის თანახმად თუ გვაქვს

$$\sum_{j=k_0}^{k} j^{n-1} \triangle^{(n)} u(j) + \omega(i) \sum_{j=k_0}^{k} j^{n-1} p(j) \leqslant 0, \ k \in N_{k_0}^{+}.$$

ამიტომ (4.11)-ის თანახმად მივიღებთ

$$\omega(i) \sum_{j=k_0}^{k} j^{n-1} p(j) \leqslant \sum_{j=0}^{n-1} (k_0-j-1)^{n-j-1} | \triangle^{(n-j-1)} (k_0)|.$$

აქედან ცხადია

$$\sum_{j=k_0}^{+\infty} j^{n-1} p(j) < +\infty,$$

რაც ეწინააღმდეგება (4.2) პირობას. მიღებული წინააღმდეგობა ამტკიცებს, რომ სრულდება (4.6) პირობა, როცა n კენტია და $l = 0$. მაშასადამე (0.1) განტოლებას გააჩნია A თვისება. თეორემა დამტკიცებულია. $\square$

თეორემა 4.1'. ვთქვათ, სრულდება (0.2), (2.1)-(2.3) პირობები, ნებისმიერი $c > 0$-სთვის არსებობს $c_1 > 0$ ისეთი, რომ საკმარისად დიდი k-სთვის და $l \in \{1, \dots, n-1\}$-სთვის $l+n$ კენტია,

$$\omega(c \cdot \sigma^{l-1}(k)) \geqslant c_1(\omega(\sigma(k)))^{l-1}, \quad \lim_{k\to+\infty} \inf \frac{\omega(\sigma(k))}{k} > 0. \tag{4.12}$$

მაშინ იმისათვის, რომ (0.1) განტოლებას გააჩნდეს A თვისება, საკმარისია:

$$\sum_{k=1}^{+\infty} k\sigma^{n-2}(k)p(k) = +\infty. \tag{4.13}$$

დამტკიცება. პირველ რიგში, შევნიშნოთ, რომ (4.12)-ის თანახმად, რადგან $\sigma(k) \leqslant k$ (4.13)-დან გამომდინარეობს, რომ სრულდება (4.3)-ის ყველა პირობა. მეორეს მხრივ, ცხადია, რომ სრულდება (4.1) ნებისმიერი $l \in \{1, \dots, n-1\}$-სთვის, სადაც $(l+n)$ კენტია. რაც შეეხება (4.2) პირობას, პირდაპირ გამომდინარეობს პირობიდან $\sigma(k) \leqslant k$. მაშასადამე, სრულდება 4.1 თეორემის ყველა პირობა, რაც ამტკიცებს თეორემას. $\square$

შედეგი 4.1. ვთქვათ, სრულდება (0.2) პირობა,

$$|F(u)(k)| \geqslant p(k)|u(\sigma(k))|^{\lambda}, \text{ როცა } k \in N_{k_0}^{+}, u \in H_{k_0,\tau}, \tag{4.14}$$

სადაც

$$\lambda > 0, p : N \to R_+, \sigma(k) \text{ ფუნქცია არაკლებადია}, \sigma(k) \leqslant k, \lim_{k\to+\infty} \sigma(k) = +\infty, \tag{4.15}$$

$$\lim_{k\to+\infty} \inf \frac{\sigma^{\lambda}(k)}{k} > 0, \tag{4.16}$$

მაშინ იმისათვის რომ (0.1) განტოლებას გააჩნდეს A თვისება

$$\sum_{k=1}^{+\infty} k\sigma^{n-2}(k)p(k) = +\infty.$$

დამტკიცება. შედეგის დასამტკიცებლად საკმარისია შევნიშნოთ, რომ (4.14)-(4.16)-ის თანახმად, სრულდება 4.1' თეორემის პირობები, სადაც $\omega(s) = s^{\lambda}$. $\square$

თეორემა 4.2. ვთქვათ, სრულდება (0.2), (2.1)-(2.3) პირობები, მოიძებნება $\omega_l : (0, +\infty) \to (0, +\infty)$, $k_1 \in N$ ისეთი, რომ:

$$\omega(\frac{1}{l!}\frac{\sigma^l(k)}{k}y) \geqslant \omega_l(\frac{1}{l!}\frac{\sigma^l(k)}{k})\cdot\omega(y), \text{როცა } k \in N^+_{k_1}, y \geqslant M, \tag{4.17}$$

$l \in \{1,\dots,n-1\}, (l+n)$ კენტია. თუ $\lim_{k\to+\infty}\inf\frac{\sigma(k)}{k} > 0$ და

$$\sum_{k=1}^{+\infty} p(i)i^{n-l}\omega_l(\frac{1}{l!}\sigma^{l-1}(i)) = +\infty, \tag{4.18}$$

გარდა ამისა, კენტი n-ის შემთხვევაში

$$\sum_{k=1}^{+\infty} k^{n-1}p(k) = +\infty, \tag{4.19}$$

მაშინ (0.1) განტოლებას გააჩნია A თვისება.

დამტკიცება. შევნიშნოთ, რომ (4.17),(4.18)-ის თანახმად, ნებისმიერი $l \in \{1,\dots,n-1\}$-სთვის, $l+n$ კენტია, სრულდება 3.2. თეორემის პირობები. ვთქვათ, $u : N^+_{k_0} \to R$ არის (0.1) განტოლების არარხევადი ამონახსნი. მაშინ, ლემა 1.1-ის თანახმად, არსებობს $l \in \{0,\dots,n-1\}$ ისეთი, რომ $l+n$ კენტია და სრულდება (1.1) პირობა. (4.17),(4.18)-ის თანახმად, თუ გავითვალისწინებთ 3.2 თეორემის მტკიცებას, გვექნება $l \notin \{1,\dots,n-1\}$. მაშასადამე, n კენტია და $l = 0$. (4.19)-ის თანახმად, როგორც ეს ნაჩვენები იყო 4.1. თეორემის დამტკიცების დროს, ვაჩვენებთ, რომ სრულდება (0.4) პირობა. მაშასადამე, (0.1) განტოლებას გააჩნია A თვისება. თეორემა დამტკიცებულია. $\square$

თეორემა 4.2'. ვთქვათ, სრულდება (0.2),

$$|F(u)(k)| \geqslant p(k)|u(\sigma(k))|\ln^\lambda u(\sigma(k)), \text{როცა } u \in H_{k_0,\tau}, k \in N^+_{k_0}, \tag{4.20}$$

სადაც,

$$\lambda > 1, \sigma(k) \leqslant k, \lim_{k\to+\infty}\sigma(k) = +\infty, p : N \to R_+, \liminf\frac{\sigma(k)}{k} > 0, \tag{4.21}$$

მაშინ იმისათვის, რომ (0.1) განტოლებას გააჩნდეს A თვისება, საკმარისია

$$\sum_{k=1}^{+\infty} i(\sigma(i))^{n-2}p(i) = +\infty. \tag{4.22}$$

დამტკიცება. დასამტკიცებლად საკმარისია შევნიშნოთ, რომ სრულდება 4.2. თეორემის

პირობები, სადაც ω და ω_l ფუნქციები მოცემულია ტოლობებით: $\omega(s) = s\ln^\lambda s, s \geqslant 1, \omega_l(s) = s$, $(l \in \{1, \dots, n-1\})$. □

თეორემა 4.3'. ვთქვათ, სრულდება (0.2) პირობა,

$$|F(u)(k)| \geqslant p(k)|u(\sigma(k))|\ln^\lambda(1 + |u(\sigma(k))|), \ u \in H_{k_0,l}, \tag{4.23}$$

სადაც

$$p : N \to R_+, \sigma(k) \leqslant k, \lim_{k\to+\infty} \sigma(k) = +\infty, 0 < \lambda < 1. \tag{4.24}$$

მაშინ, იმისათვის, რომ (0.1) განტოლებას გააჩნდეს A თვისება, საკმარისია

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \sigma^{n-1}(k)p(k) = +\infty. \tag{4.25}$$

დამტკიცება. ვთქვათ, $u : N_{k_0}^+ \to R$ არის (0.1) განტოლების არარხევადი ამონახსნი. მაშინ 1.1 ლემის თანახმად არსებობს $l \in \{0, \dots, n-1\}$ ისეთი, რომ სრულდება (1.1) პირობები, სადაც $l + n$ კენტია. რადგან $\sigma(k) \leqslant k$, ამიტომ (4.25)-ის თანახმად ცხადია, რომ ნებისმიერი $l \in \{1, \dots, n-1\}$ სრულდება (3.17) პირობა. ამიტომ 3.4 შედეგის თანახმად $l \notin \{1, \dots, n-1\}$, სადაც $l + n$ კენტია. მაშასადამე n კენტია და $l = 0$. რადგან (4.25)-დან გამომდინარეობს, რომ სრულდება (4.2) პირობა, ამიტომ 4.1 თეორემაში მოყვანილი დამტკიცების ანალოგიურად ვაჩვენებთ, რომ u ფუნქცია აკმაყოფილებს (0.4) პირობას. ე.ი. (0.1) გააჩნია A თვისება. თეორემა დამტკიცებულია. □

5 სხვაობიანი განტოლებები B თვისებით

თეორემა 5.1. ვთქვათ, სრულდება (0.3), (2.1)-(2.3) პირობები, ნებისმიერი $l \in \{1, \dots, n-2\}$, სადაც $l+n$ ლუწია

$$\sum_{k=1}^{+\infty} k^{n-l} \sigma^{l-1}(k) p(k) = +\infty, \tag{5.1}$$

$$\sum_{k=1}^{+\infty} k^{n-l} \omega(c\sigma^{l-1}(k)) p(k) = +\infty, \text{ ნებისმიერი } c > 0, l \in \{1, \dots, n-2\}, l+n \text{ ლუწია.} \tag{5.2}$$

გარდა ამისა, თუ $\sigma(k)$ არაკლებადია, $\lim_{k\to+\infty} \inf \frac{\sigma(k)}{k} > 0$, და

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \omega(c\sigma^{n-1}(k)) p(k) = +\infty, \tag{5.3}$$

ხოლო ლუწი n-ის შემთხვევაში

$$\sum_{k=1}^{+\infty} k^{n-1} p(k) = +\infty, \tag{5.4}$$

მაშინ (0.1) განტოლებას გააჩნია B თვისება.

დამტკიცება. ვთქვათ, $u : N_{k_0}^{+} \to R$ არის (0.1) განტოლების არარხევადი წესიერი ამონახსნი, მაშინ 1.1 ლემის თანახმად, არსებობს $l \in \{0, 1, \dots, n\}$ ისეთი, რომ $l+n$ ლუწია და სრულდება (1.1) პირობა.

(5.1)-სა და (5.3)-ის თანახმად, როგორც ეს ნაჩვენები იყო 4.1 თეორემის დამტკიცების დროს, ვაჩვენებთ, რომ $l \notin \{1, \dots, n-2\}$. თუ n ლუწია და $l = 0$, 4.1 თეორემის ანალოგიურად შეგვიძლია ვაჩვენოთ, რომ სრულდება (0.4) პირობა.

ახლა ვთქვათ $l = n$. მაშინ (1.1)-ის ძალით, მარტივად ვაჩვენებთ, რომ საკმარისად დიდი k-სთვის გვექნება $u(k) \geqslant ck^{n-1}$, სადაც $c > 0$. ამიტომ, თუ გავითვალისწინებთ (2.1), (0.3), (0.1) განტოლებიდან მივიღებთ

$$\triangle^{(n)} u(k) \geqslant |F(u)(k)| \geqslant p(k)\omega(c\sigma^{n-1}(k)).$$

თუ ავჯამავთ k_0-დან k-მდე მივიღებთ

$$\sum_{i=k_0}^{k} \triangle^{(n)} u(i) \geqslant \sum_{i=k_0}^{k} p(i)\omega(c\sigma^{n-1}(i)),\ k \in N_{k_0}^{+}.$$

ე.ი.

$$\triangle^{(n-1)} u(k+1) \geqslant \triangle^{(n-1)} u(k_0) + \sum_{i=k_0}^{k} p(i)\omega(c\sigma^{n-1}(k)).$$

მაშასადამე, (5.2)-ის თანახმად $\triangle^{(n-1)} u(k) \uparrow +\infty$ როცა $k \uparrow +\infty$. მაშასადამე სრულდება

(0.5) პირობა.

ვთქვათ n ლუწია და $l=0$, მაშინ 4.1 თეორემაში მოყვანილი მსჯელობის ანალოგიურად, ვაჩვენოთ, რომ სრულდება (0.4) პირობა. რაც ამტკიცებს, რომ (0.1) განტოლებას გააჩნია B თვისება. $\square$

შედეგი 5.1. ვთქვათ, სრულდება (0.3), (4.19), (4.21) პირობები. მაშინ იმისათვის, რომ (0.1) განტოლებას გააჩნდეს B თვისება, საკმარისია

$$\sum_{k=1}^{+\infty} p(k)\sigma^{n-1}(k) = +\infty. \tag{5.5}$$

დამტკიცება. ვთქვათ, $u : N \to R$ არის (0.1) განტოლების არარხევადი ამონახსნი. მაშინ 1.1 ლემის თანახმად არსებობს $l \in \{0, \ldots, n\}$ ისეთი, რომ $l+n$ ლუწია და სრულდება (1.1) პირობა. თეორემა 4.2' ანალოგიურად ვაჩვენებთ, რომ $l \notin \{1, \ldots, n-2\}$. თუ $l=n$, (5.5)-ის თანახმად 5.1 თეორემის ანალოგიურად ვაჩვენებთ, რომ სრულდება (0.5) პირობა. თუ $l=0$ და n ლუწია, რადგან $\sigma(k) \leqslant k$, (5.5)-ის თანახმად ვაჩვენებთ, რომ სრულდება (0.4) პირობა. მაშასადამე (0.1) განტოლებას გააჩნია B თვისება. $\square$

თუ გავითვალისწილებთ 4.3' თეორემის დამტკიცებას, ანალოგიურად ვაჩვენებთ შემდეგი შედეგის სამართლიანობას.

შედეგი 5.2. ვთქვათ, სრულდება (0.3), (4.23) პირობები. მაშინ იმისათვის, რომ (0.1) განტოლებას გააჩნდეს B თვისება, საკმარისია შესრულდეს (4.25) პირობა.

დასკვნა

სამაგისტრო ნაშრომში დადგენილია საკმარისი პირობები იმისა, რომ მაღალი რიგის ოპერატორულ სხვაობიან განტოლებას გააჩნდეს ე.წ. A ან B თვისება. მოყვანილია ზოგიერთი მონოტონური დისკრეტული ფუნქციების თვისებები. გარდა ამისა დამტკიცებულია ტეილორის ტიპის ფორმულები სხვაობების შემთხვევაში. დადგენილია მოცემული ოპერატორული სხვაობიანი განტოლების დადებითი წესიერი ამონახსნების არსებობის აუცილებელი პირობები, ასევე საკმარისი პირობები იმისა, რომ მოცემულ განტოლებას არ გააჩნდეს ე.წ. l ტიპის ამონახსნები.

სიახლეს წარმოადგენს ის გარემოება, რომ ნაშრომში განხილულია შემთხვევები, როცა F ოპერატორს გააჩნია ემდენ-ფაულერის ტიპის არაწრფივი მინორატისგან განსხვავებული არაწრფივობა და ამ შემთხვევაში მოყვანილია ეფექტური პირობები იმისა, რომ მოცემულ განტოლებას გააჩნდეს A ან B თვისება.

გამოყენებული ლიტერატურა

1. G. Sansone, Ordinary differential equations (Russia), M, 1971

2. I. T. Kiguradze, T. A. Chanturia, Asymptotic Properties of Solutions of Nonautonomous Ordinary Differential Equations, Boston, MA. Kluwer Academic Publishers, 1993.

3. L. Berezansky, A. Domoshnitsky, R. Koplatadze, Oscillation, nonoscillation, stability and asymptotic properties for second and higher order functional differential equations. Taylor and Fransis Group, 2020.

4. R. Koplatadze, N. Khachidze, Nonlinear difference equations with properties A and B. Functional differential equations, V. 25, N 1-2, 91-95, 2018.

5. R. Koplatadze, N. Khachidze, On Asymptotic Behavior of Solutions of n-th Order Emden–Fowler Type Difference Equations with Advanced Argument, J. Contempor, Mathematical Analysis. 56, 4, 2021, 58-72.