ივანე ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტი

ზუსტ და საბუნებისმეტყველო მეცნიერებათა ფაკულტეტი

მათემატიკის დეპარტამენტი

ნიკა არეშიძე

დირიხლეს ინტეგრალების კრებადობის ზოგიერთი საკითხი

(საბაკალავრო ნაშრომი)

ხელმძღვანელი: თსუ-ს ასოცირებული პროფესორი,

ფიზიკა-მათემატიკის მეცნიერებათა დოქტორი,

თეიმურაზ ახობაძე.

თბილისი 2022

ს ა რ ჩ ე ვ ი

ანოტაცია

ნაშრომი კვლევითი ხასიათისაა, შესწავლილია რ.ტაბერსკის ([3], [4]) მიერ შემოღებული დირიხლეს განზოგადოებული ინტეგრალების წერტილოვანი და თანაბრად კრებადობის საკითხები, კერძოდ დამტკიცებულია ლებეგის კრიტერიუმის [1] ანალოგი დირიხლეს განზოგადოებული ინტეგრალებისთვის, აგრეთვე დამტკიცებულია ა.ზახაროვის [5] თეორემის ანალოგი ტაბერსკის გაწარმოებული კერძო ჯამების წერტილოვანი და თანაბარი კრებადობის შესახებ.

Abstract

This work is of a research nature. Problems of point convergence and uniform convergence of generalized Dirichlet’s integrals introduced by R. Taberski ([3], [4]) are studied. In particular, an analogue of the Lebesgue criterion [1] for generalized Dirichlet’s integrals is proved. We also prove an analog of A. Zakharov's theorem [5] on convergence at a point and uniform convergence of differentiated partial sums of the Taberski series.

§1 შესავალი

კარგად არის ცნობილი რამდენად მნიშვნელოვან როლს თამაშობს ტრიგონომეტრიულ მწკრივთა თეორია არამხოლოდ მათემატიკის სხვადასხვა დარგში, არამედ ფიზიკაში, ინჟინერიაში, სიგნალებისა და სურათების დამუშავებაში, ელექტრონიკასა თუ ეკონომიკაში. ფუნქციათა მწკრივების თეორიის ერთ-ერთი ძირითადი ამოცანაა იმ მინიმალური პირობების დადგენა რომელსაც უნდა აკმაყოფილებდეს ფუნქცია, რომ იგი წარმოდგებოდეს ფუნქციათა მწკრივის საშუალებით. წარმოდგენაში იგულისხმება მისკენ წერტილოვანი ან თანაბარი კრებადობა ან რომელიმე მეთოდით შეჯამებადობა. მწკრივთა თეორია, როგორც ზემოთ ვახსენეთ თავისი პრაქტიკული ღირებულების გამო, აქტიური შესწავლის საგანია, მასზე იწერება უამრავი სტატია თუ მონოგრაფია.

რ.ტაბერსკიმ ([3], [4]) განიხილა ნამდვილი ცვლადის ლებეგის აზრით ლოკალურად ინტეგრებად ფუნქციათა კლასი, რომელიც ყოველი ფიქსირებული $c > 0$-სთვის აკმაყოფილებს შემდეგ პირობებს:

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{T}^{T+c}|f(t)|dt = 0 = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-T-c}^{-T}|f(t)|dt$$

მან მოცემული ფუნქციათა კლასისთვის განსაზღვრა ფურიეს მწკრივი და შესაბამისი ფურიეს კოეფიციენტები. ტაბერსკიმ ([3], [4]) შეისწავლა მოცემული მწკრივის წერტილოვანი და თანაბარი კრებადობის საკითხები და აგრეთვე მისი $(C,1)$ საშუალოებით შეჯამებადობა.

ტაბერსკის მიერ შემოღებულ მწკრივთან დაკავშირებული საკითხები შეისწავლა შ.ზვიადაძემ [6]. კერძოდ, მან დაამტკიცა ლუკაჩის [2] ერთ-ერთი თეორემის ანალოგი ტაბერსკის მიერ განხილული მწკრივებისთვის.

მოცემულ ნაშრომში დამტკიცებულია ლებეგის კრიტერიუმის [1] ანალოგი დირიხლეს განზოგადოებული ინტეგრალებისთვის და აგრეთვე დამტკიცებულია ა.ზახაროვის [4] თეორემის ანალოგი ტაბერსკის გაწარმოებული კერძო ჯამების წერტილოვანი და თანაბარი კრებადობის შესახებ.

ლებეგის კრიტერიუმს [1], რომლის ანალოგი დირიხლეს განზოგადოებული ინტეგრალებისთვის მოყვენილია §3 თავში, 2π-პერიოდული, ლებეგის აზრით $[-\pi,\pi]$ - შუალედზე, ინტეგრებადი ფუნქციისთვის აქვს სახე:

(1.1) თეორემა: $S[f]$ კრებადია $f(x)$-სკენ ყველა ისეთ x წერტილში, რომლისთვისაც შესრულებულია შემდეგი პირობები:

$$\Phi(h)=\int_0^h|\phi_x(t)|dt=o(h),\quad \int_\eta^\pi\frac{|\phi(t)-\phi(t+\eta)|}{t}dt\to 0,\quad \eta=\frac{\pi}{n}\to 0, \tag{1.1}$$

სადაც $\phi(t)=\phi_x(t)=\frac{1}{2}\{f(x+t)+f(x-t)-2f(x)\}$. და კრებადობა თანაბარია ყოველ ჩაკეტილ ინტერვალზე სადაც f უწყვეტია და (1.1)-ს მეორე პირობა შესრულებულია თანაბრად.

ა.ზახაროვის [4] თეორემას რომლის ანალოგიც მოყვანილია §3 თავში, აქვს სახე:

(1.2) თეორემა: ვთქვათ, ფუნქცია $f(x)\in L(0,2\pi)$ და შესრულებულია შემდეგი პირობები:

$$\int_0^t\psi_{x,a}(u)du=o(t)\quad (t\to+0), \tag{1.2}$$

$$\int_0^t\left|\psi_{x,a}(u)\right|du=O(t)\quad (t\to+0), \tag{1.3}$$

$$\int_h^\delta\frac{\left|\psi_{x,a}(u+h)-\psi_{x,a}(u)\right|}{u}du=o(1)\quad (h\to+0), \tag{1.4}$$

სადაც $\psi_{x,a}(t)=f(x+t)-f(x-t)-a$. მაშინ

$$\lim_{n\to\infty}\frac{S_n'(x;f)}{n}=\frac{a}{\pi}.$$

§2 აღნიშვნები და დამხმარე დებულებები

განსაზღვრება 2.1: ვთქვათ, E არის ისეთი f ნამდვილი ცვლადის, ლებეგის აზრით ისეთ ლოკალურად ინტეგრებად ფუნქციათა კლასი, რომელთათვისაც შესრულებულია შემდეგი პირობები: ყოველი ფიქსირებული $c > 0$-სთვის.

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{T}^{T+c}|f(t)|dt = 0 = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-T-c}^{-T}|f(t)|dt. \tag{2.1}$$

შენიშვნა 2.1: თუ f არის ნამდვილი ცვლადის, ლოკალურად ინტეგრებადი ფუნქცია და პერიოდულია (უმცირესი დადებითი პერიოდით m) მაშინ (2.1) პირობა ავტომატურად სრულდება. მართლც, არსებობს $k > 0$ ისეთი, რომ $c \leq k \cdot m$, მაშინ გვექნება.

$$\frac{1}{T}\int_{T}^{T+c}|f(t)|dt \leq \frac{1}{T}\int_{T}^{T+km}|f(t)|dt = \frac{1}{T}\cdot k\int_{T}^{T+m}|f(t)|dt = \frac{1}{T}\cdot k\cdot M \to 0,$$

როცა $T \to +\infty$. M არის ინტეგრალი $|f|$-დან m სიგრძის ინტერვალზე. ანალოგიურად ვაჩვენებთ მეორე თანაფარდობის სამართლიანობას.

მოცემული $f \in E$ ფუნქციისთვის და დადებითი l რიცხვისთვის განვიხილოთ

$$a_k^l = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(t)\cos\frac{k\pi t}{l}dt, \quad b_k^l = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(t)\sin\frac{k\pi t}{l}dt,$$

$$S_n^l(x;f) = \frac{a_0^l}{2} + \sum_{k=1}^{n}\left(a_k^l\cos\frac{k\pi x}{l} + b_k^l\sin\frac{k\pi x}{l}\right),$$

სადაც $x \in (-\infty,\infty)$, $n = 0,1,2 \dots$.

ვთქვათ, $f \in E$, მაშინ ადგილი აქვს შემდეგ ტოლობას:

$$S_n^l(x;f) - f(x) = J_n^l(x) + o(1), \text{ როცა } l \longrightarrow +\infty,$$

თანაბრად $x \in [a;b]$ $(-\infty < a \leq b < +\infty), n = 0,1,2, \dots$, სადაც $f(t)$ შემოსაზღვრულია $[a;b]$-ში. ზემოთ განხილულ გამოსახულებაში

$$J_n^l(x) = \frac{1}{l}\int_0^l \phi_x(t) D_n^l(t) dt$$

და

$$\phi_x(t) = \{f(x+t) + f(x-t) - 2f(x)\}, \;\; D_n^l(t) = \frac{\sin\frac{(2n+1)\pi t}{2l}}{2\sin\frac{\pi t}{2l}}.$$

თუ გავითვალისწინებთ, რომ $D_n^l(t) = \frac{1}{2}\left(\cot\frac{\pi t}{2l}\sin\frac{n\pi t}{l} + \cos\frac{n\pi t}{l}\right)$ გვექნება:

$$J_n^l(x) = \frac{1}{l}\int_0^l \phi_x(t)\cdot\frac{1}{2}\,\cot\frac{\pi t}{2l}\sin\frac{n\pi t}{l}\,dt + \frac{1}{l}\int_0^l \phi_x(t)\cdot\frac{1}{2}\,\cos\frac{n\pi t}{l}\,dt.$$

შემოვიღოთ აღნიშვნა: $\chi_l(t) = \phi_x(t)\cdot\frac{1}{2}\,\cot\frac{\pi t}{2l}$, მაშინ გვექნება:

$$J_n^l(x) = \frac{1}{l}\int_0^l \chi_l(t)\sin\frac{n\pi t}{l}\,dt + \frac{1}{l}\int_0^l \phi_x(t)\cdot\frac{1}{2}\,\cos\frac{n\pi t}{l}\,dt = M_n^l(x) + N_n^l(x),$$

სადაც

$$M_n^l(x) = \frac{1}{l}\int_0^l \chi_l(t)\sin\frac{n\pi t}{l}\,dt\,, \qquad N_n^l(x) = \frac{1}{l}\int_0^l \phi_x(t)\cdot\frac{1}{2}\,\cos\frac{n\pi t}{l}\,dt.$$

პირველ ინტეგრალში შემოვიღოთ ცვლადის გარდაქმნა: $t = y + \eta$, $\eta = \frac{l}{n}$, მაშინ

$$M_n^l(x) = \frac{1}{l}\int_{-\eta}^{l-\eta} \chi_l(y+\eta)\sin\frac{n\pi(y+\eta)}{l}\,dy = \frac{1}{l}\int_{-\eta}^{l-\eta} \chi_l(t+\eta)\sin\left(\pi + \frac{n\pi t}{l}\right)dt.$$

თუ გავითვალისწინებთ ტოლობას: $\sin\left(\pi + \frac{n\pi t}{l}\right) = -\sin\frac{n\pi t}{l}$ გვექნება:

$$M_n^l(x) = -\frac{1}{l}\int_{-\eta}^{l-\eta} \chi_l(t+\eta)\sin\frac{n\pi t}{l}\,dt$$

ე.ი

$$2M_n^l(x)=\frac{1}{l}\int_0^l \chi_l(t)\sin\frac{n\pi t}{l}dt-\frac{1}{l}\int_{-\eta}^{l-\eta}\chi_l(t+\eta)\sin\frac{n\pi t}{l}dt=$$

$$=\frac{1}{l}\int_{\eta}^{l-\eta}\{\chi_l(t)-\chi_l(t+\eta)\}\sin\frac{n\pi t}{l}dt+\frac{1}{l}\int_{l-\eta}^{l}\chi_l(t)\sin\frac{n\pi t}{l}dt+$$

$$+\frac{1}{l}\int_0^{\eta}\chi_l(t)\sin\frac{n\pi t}{l}dt-\frac{1}{l}\int_{-\eta}^{\eta}\chi_l(t+\eta)\sin\frac{n\pi t}{l}dt=I_1+I_2+I_3+I_4.$$

ახლა, თუ გავითვალისწინებთ, რომ $\left|\frac{1}{2}\cot\frac{\pi t}{2l}\sin\frac{n\pi t}{l}\right|\le n\pi$, გვექნება:

$$|I_3|+|I_4|=\left|\frac{1}{l}\int_0^{\eta}\chi_l(t)\sin\frac{n\pi t}{l}dt\right|+\left|\frac{1}{l}\int_{-\eta}^{\eta}\chi_l(t+\eta)\sin\frac{n\pi t}{l}dt\right|\le$$

$$\frac{\pi n}{l}\int_0^{\eta}|\phi_x(t)|dt+\frac{\pi n}{l}\int_{-\eta}^{\eta}|\phi_x(t+\eta)|dt.$$

ცხადია,

$$|I_3|+|I_4|\le\frac{\pi n}{l}\int_0^{\eta}|\phi_x(t)|dt+\frac{\pi n}{l}\int_0^{2\eta}|\phi_x(t)|dt\le\frac{2\pi n}{l}\int_0^{2\eta}|\phi_x(t)|dt,$$

ე.ი

$$|I_3|+|I_4|\le\frac{2\pi n}{l}\int_0^{2\eta}|\phi_x(t)|dt.$$

ახლა თუ გავითვალისწინებთ უტოლობას:

$$\left|\chi_l(t)\sin\frac{n\pi t}{l}\right|\le|\phi_x(t)|\text{ როცა } t\in[l-\eta,l],$$

მაშინ ადგილი აქვს შეფასებას

$$|I_2|=\left|\frac{1}{l}\int_{l-\eta}^{l}\chi_l(t)\sin\frac{n\pi t}{l}dt\right|\le\frac{1}{l}\int_{l-\eta}^{l}|\phi_x(t)|dt.$$

ვთქვათ, $x \in [a; b]$ ისეთია, რომ:

$$\Phi(h) = \int_0^h |\phi_x(t)| dt = o(h), \text{ როცა } h \longrightarrow +\infty. \tag{2.2}$$

(2.2)-ის ძალით მივიღებთ:

$$|I_2| \le \frac{1}{l} \int_{l-\eta}^{l} |\phi_x(t)| dt \le \frac{1}{l} \int_0^l |\phi_x(t)| dt = o(1), \text{როცა } l \longrightarrow +\infty.$$

ცხადია,

$$I_1 = \frac{1}{l} \int_\eta^{l-\eta} \{\chi_l(t) - \chi_l(t+\eta)\} \sin\frac{n\pi t}{l} dt =$$

$$\frac{1}{2l} \int_\eta^{l-\eta} \phi_x(t) \cdot \left\{ \frac{1}{\tan\frac{\pi t}{2l}} - \frac{1}{\tan\frac{\pi(t+\eta)}{2l}} \right\} \cdot \sin\frac{n\pi t}{l} dt +$$

$$\frac{1}{2l} \int_\eta^{l-\eta} \frac{\{\phi_x(t) - \phi_x(t+\eta)\}}{\tan\frac{\pi(t+\eta)}{2l}} \cdot \sin\frac{n\pi t}{l} dt.$$

ამის გათვალისწინებით:

$$|I_1| \le \frac{1}{l} \int_\eta^{l-\eta} |\phi_x(t)| \cdot \left\{ \frac{1}{2\tan\frac{\pi t}{2l}} - \frac{1}{2\tan\frac{\pi(t+\eta)}{2l}} \right\} dt + \frac{1}{l} \int_\eta^{l-\eta} \frac{|\phi_x(t) - \phi_x(t+\eta)|}{2\tan\frac{\pi(t+\eta)}{2l}} dt.$$

ახლა, თუ გავითვალისწინებთ, რომ $\tan\frac{t}{2}$ ზრდადი ფუნქციაა $t \in (0; \pi)$, ანალოგიურად, ზრდადი იქნება $\tan\frac{\pi t}{2l}$, $t \in (0; l)$ ინტერვალში. ამის გათვალისწინებით მივიღებთ, რომ

$$|I_1| \le \frac{1}{l} \int_\eta^{l-\eta} |\phi_x(t)| \cdot \left\{ \frac{1}{2\tan\frac{\pi t}{2l}} - \frac{1}{2\tan\frac{\pi(t+\eta)}{2l}} \right\} dt + \frac{1}{l} \int_\eta^{l-\eta} \frac{|\phi_x(t) - \phi_x(t+\eta)|}{2\tan\frac{\pi t}{2l}} dt.$$

ფრჩხილებში მოთავსებული გამოსახულებსთვის გვაქვს:

$$\frac{1}{2\tan\frac{\pi t}{2l}} - \frac{1}{2\tan\frac{\pi(t+\eta)}{2l}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\cos\frac{\pi t}{2l}}{\sin\frac{\pi t}{2l}} - \frac{\cos\frac{\pi(t+\eta)}{2l}}{\sin\frac{\pi(t+\eta)}{2l}}\right) = \frac{\sin\frac{\pi\eta}{2l}}{2\sin\frac{\pi t}{2l}\cdot\sin\frac{\pi(t+\eta)}{2l}}.$$

აქედან, თუ გავითვალისწინებთ, რომ $2\sin\frac{\pi t}{2l} \geq \frac{2t}{l}$, $t \in (0; l)$, გვექნება:

$$\left|\frac{1}{2\tan\frac{\pi t}{2l}} - \frac{1}{2\tan\frac{\pi(t+\eta)}{2l}}\right| = \left|\frac{\sin\frac{\pi\eta}{2l}}{2\sin\frac{\pi t}{2l}\cdot\sin\frac{\pi(t+\eta)}{2l}}\right| \leq \frac{\pi\eta}{2l}\cdot\frac{l}{2t}\cdot\frac{l}{t+\eta} \leq \frac{\pi\eta l}{4t^2}.$$

ამასთან, რადგან $2\tan\frac{\pi t}{2l} \geq \frac{\pi t}{l}$, $t \in (0; l)$, მივიღებთ:

$$|I_1| \leq \frac{1}{l}\int_{\eta}^{l-\eta} |\phi_x(t)|\cdot\frac{\pi\eta l}{4t^2}dt + \frac{1}{l}\int_{\eta}^{l-\eta} \frac{|\phi_x(t)-\phi_x(t+\eta)|}{\frac{\pi t}{l}}dt =$$

$$\frac{\pi\eta}{4}\int_{\eta}^{l-\eta} \frac{|\phi_x(t)|}{t^2}dt + \pi\int_{\eta}^{l-\eta} \frac{|\phi_x(t)-\phi_x(t+\eta)|}{t}dt,$$

ე.ი მივიღეთ, რომ ყოველი $f(t) \in E$-სთვის, რომლისთვისაც შესრულებულია (2.2) პირობა სამართლიანია შემდეგი შეფასება:

$$2\left|M_n^l(x)\right| \leq \frac{\pi\eta}{4}\int_{\eta}^{l-\eta} \frac{|\phi_x(t)|}{t^2}dt + \pi\int_{\eta}^{l-\eta} \frac{|\phi_x(t)-\phi_x(t+\eta)|}{t}dt + \frac{2\pi n}{l}\int_{0}^{2\eta} |\phi_x(t)|dt + o(1),$$

როცა $l \longrightarrow +\infty$. მაშასადამე,

$$2\left|M_n^l(x)\right| \leq \frac{\pi\eta}{4}\int_{\eta}^{l} \frac{|\phi_x(t)|}{t^2}dt + \pi\int_{\eta}^{l} \frac{|\phi_x(t)-\phi_x(t+\eta)|}{t}dt + 2\pi\eta^{-1}\int_{0}^{2\eta} |\phi_x(t)|dt + o(1),$$

როცა $l \longrightarrow +\infty$. აქედან გვაქვს:

$$\left|M_n^l(x)\right| \leq \frac{\pi}{2}\int_{\eta}^{l} \frac{|\phi_x(t)-\phi_x(t+\eta)|}{t}dt + \eta\int_{\eta}^{l} \frac{|\phi_x(t)|}{t^2}dt + \pi\eta^{-1}\int_{0}^{2\eta} |\phi_x(t)|dt + o(1),$$

როცა $l \longrightarrow +\infty$. (2.2) პირობიდან, ცხადია, რომ

$$\left|N_n^l(x)\right| = \left|\frac{1}{l}\int_0^l \phi_x(t)\cdot\frac{1}{2}\cos\frac{n\pi t}{l}dt\right| \le \frac{1}{l}\int_0^l |\phi_x(t)|dt = o(1), \text{როცა } l \longrightarrow +\infty.$$

ვთქვათ, $x \in [a;b]$ ისეთია, რომ შესრულებულია (2.2) პირობა მაშინ ადგილი აქვს შეფასებას:

$$\left|J_n^l(x)\right| \le \frac{\pi}{2}\int_\eta^l \frac{|\phi_x(t)-\phi_x(t+\eta)|}{t}dt + \eta\int_\eta^l \frac{|\phi_x(t)|}{t^2}dt + \pi\eta^{-1}\int_0^{2\eta}|\phi_x(t)|dt + o(1),$$

როცა $l \longrightarrow +\infty$.

ახლა ვთქვათ, $f \in E$ და l მოცემული დადებითი რიცხვია, განვიხილოთ $S_n^l(x;f)$-ის წარმოებული გვაქვს:

$$\left(S_n^l(x;f)\right)' = \left(\frac{a_0^l}{2} + \sum_{k=1}^n\left(a_k^l\cos\frac{k\pi x}{l} + b_k^l\sin\frac{k\pi x}{l}\right)\right)' = \frac{\pi}{l}\sum_{k=1}^n k\left(-a_k^l\sin\frac{k\pi x}{l} + b_k^l\cos\frac{k\pi x}{l}\right),$$

სადაც $x \in (-\infty,\infty), n = 0,1,2\ldots$.

შემოვიღოთ აღნიშვნა $S'_{l,n}(x;f) = \left(S_n^l(x;f)\right)'$ ე.ი

$$S'_{l,n}(x;f) = \frac{\pi}{l}\sum_{k=1}^n k\left(-a_k^l\sin\frac{k\pi x}{l} + b_k^l\cos\frac{k\pi x}{l}\right).$$

ახლა ტოლობაში შევიტანოთ a_k^l-ს და b_k^l-ს მნიშვნელობები, მივიღებთ:

$$\begin{aligned} S'_{l,n}(x;f) &= \frac{\pi}{l}\sum_{k=1}^n k\left(-\frac{1}{l}\int_{-l}^l f(t)\cos\frac{k\pi t}{l}dt\cdot\sin\frac{k\pi x}{l} + \frac{1}{l}\int_{-l}^l f(t)\sin\frac{k\pi t}{l}dt\cdot\cos\frac{k\pi x}{l}\right) \\ &= \frac{1}{l}\int_{-l}^l f(t)\cdot\left\{\frac{\pi}{l}\sum_{k=1}^n k\left(\sin\frac{k\pi t}{l}\cdot\cos\frac{k\pi x}{l} - \cos\frac{k\pi t}{l}\cdot\sin\frac{k\pi x}{l}\right)\right\}dt \\ &= \frac{1}{l}\int_{-l}^l f(t)\cdot\left\{\sum_{k=1}^n\frac{\pi k}{l}\cdot\sin\frac{k\pi(t-x)}{l}\right\}dt. \end{aligned}$$

როგორც ვიცით

$$D_n^l(t) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n\cos\frac{k\pi t}{l}, \;\; D'_{l,n}(t) \equiv \left(D_n^l(t)\right)' = -\sum_{k=1}^n\frac{\pi k}{l}\cdot\sin\frac{k\pi t}{l}.$$

ანუ მივიღეთ, რომ

$$S'_{l,n}(x;f) = -\frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(t)D'_{l,n}(t-x)dt. \tag{2.3}$$

შევნიშნოთ, რომ $D'_{l,n}(t)$ კენტი ფუნქციაა, მართლაც:

$$D'_{l,n}(-t) = -\sum_{k=1}^{n}\frac{\pi k}{l}\cdot\sin\frac{k\pi(-t)}{l} = \sum_{k=1}^{n}\frac{\pi k}{l}\cdot\sin\frac{k\pi t}{l} = -D'_{l,n}(t).$$

შემოვიღოთ ცვლადის გარდაქმნა (2.3) ტოლობაში $t-x=y$, მაშინ მივიღებთ:

$$\begin{aligned} S'_{l,n}(x;f) &= -\frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(t)D'_{l,n}(t-x)dt = -\frac{1}{l}\int_{-l-x}^{l-x} f(x+y)D'_{l,n}(y)dy \\ &= -\frac{1}{l}\int_{-l-x}^{l-x} f(x+t)D'_{l,n}(t)dt. \end{aligned} \tag{2.4}$$

აგრეთვე, თუ შემოვიღებთ ცვლადის გარდაქმნას $t-x=-y$, ე.ი $-t+x=y$, მივიღებთ:

$$\begin{aligned} S'_{l,n}(x;f) &= -\frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(t)D'_{l,n}(t-x)dt = -\frac{1}{l}\int_{l+x}^{-l+x} f(x-y)D'_{l,n}(-y)(-dy) \\ &= \frac{1}{l}\int_{-l+x}^{l+x} f(x-y)D'_{l,n}(y)dy = \frac{1}{l}\int_{-l+x}^{l+x} f(x-t)D'_{l,n}(t)dt. \end{aligned} \tag{2.5}$$

მიღებული (2.4) და (2.5) ტოლობებიდან დავასკვნით, რომ

$$\begin{aligned} S'_{l,n}(x;f) &= \frac{1}{2}\left\{-\frac{1}{l}\int_{-l-x}^{l-x} f(x+t)D'_{l,n}(t)dt + \frac{1}{l}\int_{-l+x}^{l+x} f(x-t)D'_{l,n}(t)dt\right\} \\ &= -\frac{1}{2l}\int_{-l-x}^{-l+x} f(x+t)D'_{l,n}(t)dt - \frac{1}{2l}\int_{-l+x}^{l-x} f(x+t)D'_{l,n}(t)dt \\ &+ \frac{1}{2l}\int_{-l+x}^{l-x} f(x-t)D'_{l,n}(t)dt + \frac{1}{2l}\int_{l-x}^{l+x} f(x-t)D'_{l,n}(t)dt. \end{aligned}$$

ანუ

$$S'_{l,n}(x;f) = -\frac{1}{2l}\int_{-l+x}^{l-x}\{f(x+t)-f(x-t)\}D'_{l,n}(t)dt -$$

$$\frac{1}{2l}\int_{-l-x}^{-l+x} f(x+t)D'_{l,n}(t)dt + \frac{1}{2l}\int_{l-x}^{l+x} f(x-t)D'_{l,n}(t)dt.$$

ამის გათვალისწინებით გვექნება:

$$\eta \cdot S'_{l,n}(x;f) = -\frac{1}{2l}\eta\int_{-l+x}^{l-x}\{f(x+t)-f(x-t)\}D'_{l,n}(t)\,dt - \frac{1}{2l}\eta\int_{-l-x}^{-l+x} f(x+t)D'_{l,n}(t)dt$$

$$+\frac{1}{2l}\eta\int_{l-x}^{l+x} f(x-t)D'_{l,n}(t)dt = G'_{l,n}(x) - P'_{l,n}(x) + Q'_{l,n}(x).$$

აქედან

$$\eta \cdot S'_{l,n}(x;f) = -\frac{1}{2}\int_{-l+x}^{l-x}\{f(x+t)-f(x-t)\}\frac{D'_{l,n}(t)}{n}\,dt - \frac{1}{2}\int_{-l-x}^{-l+x} f(x+t)\frac{D'_{l,n}(t)}{n}dt$$

$$+\frac{1}{2}\int_{l-x}^{l+x} f(x-t)\frac{D'_{l,n}(t)}{n}dt = G'_{l,n}(x) - P'_{l,n}(x) + Q'_{l,n}(x);$$

$$G'_{l,n}(x) = -\frac{1}{2}\int_{-l+x}^{l-x}\{f(x+t)-f(x-t)\}\frac{D'_{l,n}(t)}{n}dt = -\int_{0}^{l-x}\{f(x+t)-f(x-t)\}\frac{D'_{l,n}(t)}{n}dt$$

$$= -\int_{0}^{l}\{f(x+t)-f(x-t)\}\frac{D'_{l,n}(t)}{n}dt + \int_{l-x}^{l}\{f(x+t)-f(x-t)\}\frac{D'_{l,n}(t)}{n}dt = M'_{l,n}(x) + W'_{l,n}(x).$$

ე.ი

$$\eta \cdot S'_{l,n}(x;f) = M'_{l,n}(x) + W'_{l,n}(x) - P'_{l,n}(x) + Q'_{l,n}(x).$$

როგორც ვიცით,

$$\frac{D'_{l,n}(t)}{n} = \frac{\pi}{l}\left\{\frac{\cos(2n+1)\frac{\pi t}{2l}}{2\sin\frac{\pi t}{2l}} - \frac{\sin\frac{\pi n t}{l}}{4n\sin^2\frac{\pi t}{2l}}\right\}.$$

აქედან

$$\left|\frac{D'_{l,n}(t)}{n}\right| = \left|\frac{\pi}{l}\left\{\frac{\cos(2n+1)\frac{\pi t}{2l}}{2\sin\frac{\pi t}{2l}} - \frac{\sin\frac{\pi n t}{l}}{4n\sin^2\frac{\pi t}{2l}}\right\}\right| \le \frac{\pi}{l}\left\{\frac{1}{\left|2\sin\frac{\pi t}{2l}\right|} + \frac{1}{4n\sin^2\frac{\pi t}{2l}}\right\}.$$

ვთქვათ, $0 \le a \le x \le b < l$. მაშინ

$$\left|W'_{l,n}(x)\right| = \left|\int_{l-x}^{l}\{f(x+t) - f(x-t)\}\frac{D'_{l,n}(t)}{n}dt\right|$$

$$\le \int_{l-x}^{l}|f(x+t)|\left|\frac{D'_{l,n}(t)}{n}\right|dt + \int_{l-x}^{l}|f(x-t)|\left|\frac{D'_{l,n}(t)}{n}\right|dt$$

$$\le \frac{\pi}{l}\int_{l-x}^{l}|f(x+t)|\left\{\frac{1}{\left|2\sin\frac{\pi t}{2l}\right|} + \frac{1}{4n\sin^2\frac{\pi t}{2l}}\right\}dt$$

$$+ \frac{\pi}{l}\int_{l-x}^{l}|f(x-t)|\left\{\frac{1}{\left|2\sin\frac{\pi t}{2l}\right|} + \frac{1}{4n\sin^2\frac{\pi t}{2l}}\right\}dt$$

$$\le \frac{\pi}{l}\left\{\frac{1}{2\sin\frac{\pi(l-x)}{2l}}\int_{l-x}^{l}|f(x+t)|dt + \frac{1}{4n\sin^2\frac{\pi(l-x)}{2l}}\int_{l-x}^{l}|f(x+t)|dt\right.$$

$$\left.+ \frac{1}{2\sin\frac{\pi(l-x)}{2l}}\int_{l-x}^{l}|f(x-t)|dt + \frac{1}{4n\sin^2\frac{\pi(l-x)}{2l}}\int_{l-x}^{l}|f(x-t)|dt\right\}.$$

ვთქვათ, $-l < a \le x \le b < 0$. მაშინ

$$\left|W'_{l,n}(x)\right| \le \frac{\pi}{l}\left\{\frac{1}{2\sin\frac{\pi(l-x)}{2l}}\left|\int_{l-x}^{l}|f(x+t)|dt\right| + \frac{1}{4n\sin^2\frac{\pi(l-x)}{2l}}\left|\int_{l-x}^{l}|f(x+t)|dt\right|\right.$$

$$\left.+ \frac{1}{2\sin\frac{\pi(l-x)}{2l}}\left|\int_{l-x}^{l}|f(x-t)|dt\right| + \frac{1}{4n\sin^2\frac{\pi(l-x)}{2l}}\left|\int_{l-x}^{l}|f(x-t)|dt\right|\right\}.$$

ე.ი $-l < a \le x \le b < l$,

$$\left|W'_{l,n}(x)\right| \le \frac{\pi}{2\sin\frac{\pi(l-x)}{2l}}\frac{1}{l}\left|\int_{l}^{l+x}|f(u)|du\right| + \frac{\pi}{4n\sin^2\frac{\pi(l-x)}{2l}}\frac{1}{l}\left|\int_{l}^{l+x}|f(u)|du\right|$$

$$+ \frac{\pi}{2\sin\frac{\pi(l-x)}{2l}}\frac{1}{l}\left|\int_{-l+x}^{-l+2x}|f(u)|du\right| + \frac{\pi}{4n\sin^2\frac{\pi(l-x)}{2l}}\frac{1}{l}\left|\int_{-l+x}^{-l+2x}|f(u)|du\right|.$$

თუ განვიხილავთ შემთხვევებს ცალ-ცალკე, როდესაც $x \geq 0$ და $x < 0$. მივიღებთ, რომ

$$\lim_{l,n\to\infty} W'_{l,n}(x) = 0 \text{ თანაბრად } x \in [a,b] - \text{სთვის.}$$

ანალოგიურად მივიღებთ, რომ როცა $-l < a \leq x \leq b < l$

$$\lim_{l,n\to\infty} P'_{l,n}(x) = 0 \text{ თანაბრად } x \in [a,b] - \text{სთვის}$$

და

$$\lim_{l,n\to\infty} Q'_{l,n}(x) = 0 \text{ თანაბრად } x \in [a,b] - \text{სთვის.}$$

აქედან

$$\eta \cdot S'_{l,n}(x;f) = -\int_0^l \{f(x+t) - f(x-t)\} \frac{D'_{l,n}(t)}{n} dt + o(1), \text{ როცა } l,n \to \infty,$$

თანაბრად $x \in [a,b]$-ს მიმართ. განვიხილოთ ინტეგრალი:

$$\int_0^l \frac{D'_{l,n}(t)}{n} dt = \frac{1}{n}\left\{\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos\frac{k\pi t}{l}\right\}\Bigg|_0^l =$$

$$\frac{1}{n}\left\{\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos \pi k\right\} - \frac{1}{n}\left\{\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} 1\right\} =$$

$$\left\{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(-1)^k - 1\right\} = \left\{-1 - \frac{1-(-1)^n}{2n}\right\}.$$

აქედან

$$\eta \cdot S'_{l,n}(x;f) - f(x) = -\int_0^l \{f(x+t) - f(x-t)\} \frac{D'_{l,n}(t)}{n} dt$$

$$+\left(-1 - \frac{1-(-1)^n}{2n} + \frac{1-(-1)^n}{2n}\right) \cdot f(x) + o(1).$$

შემოვიღოთ აღნიშვნა: $\psi_x(t) = f(x+t) - f(x-t) - f(x)$. გვაქვს:

$$\eta \cdot S'_{l,n}(x;f) - f(x) = -\int_0^l \psi_x(t) \frac{D'_{l,n}(t)}{n} dt$$

$$+\frac{1-(-1)^n}{2n} f(x) + o(1).$$

ცხადია,

$$\eta \cdot S'_{l,n}(x;f) - f(x) = -\int_0^l \psi_x(t)\frac{D'_{l,n}(t)}{n}dt + o(1), \tag{2.6}$$

როცა $n \to \infty$. (2.6) $x \in [a;b]$-ს მიმართ თანაბარი აზრით გაიგება, ამასთან, $f \in E$ შემოსაზღვრულია $x \in [a,b]$ სეგმენტზე.

§3 ძირითადი შედეგების ფორმულირება

ლებეგის ნიშანს დირიხლეს განზოგადოებული ინტეგრალებისთვის აქვს შემდეგი სახე:

(3.1) თეორემა: ვთქვათ, $f \in E$ და $x_0 \in [a;b]$-სთვის შესრულებულია შემდეგი პირობები:

$$\Phi(h) = \int_0^h \left|\phi_{x_0}(t)\right| dt = o(h), \text{ როცა } h \longrightarrow 0, \;\; h \longrightarrow +\infty, \tag{3.1}$$

$$\int_\eta^l \frac{\left|\phi_{x_0}(t) - \phi_{x_0}(t+\eta)\right|}{t} dt \longrightarrow 0, \text{ როცა } \frac{l}{n} \longrightarrow 0, \;\; n \longrightarrow +\infty, \;\; l \longrightarrow +\infty. \tag{3.2}$$

მაშინ $S_n^l(x_0; f)$ კრებადია $f(x_0)$-სკენ, როცა $\frac{l}{n} \longrightarrow 0, n \longrightarrow +\infty, l \longrightarrow +\infty$. კრებადობა თანაბარია $[a;b]$ სეგმენტზე, თუ $f \in E$ ფუნქცია შემოსაზღვრულია $x \in [a;b]$-ზე და (3.1) და (3.2) პირობები შესრულებულია თანაბრად $x \in [a;b]$-ს მიმართ.

(3.1) შენიშვნა: კერძოდ, თუ $f \in E$ ფუნქცია უწყვეტია (a', b') ინტერვალზე, მაშინ ნებისმიერი ჩაკეტილი $[a,b]$ $(a' < a \leq b < b')$ ინტერვალზე (3.1)-ის პირველი პირობა სრულდება თანაბრად $x \in [a,b]$-ს მიმართ.

ა.ზახაროვის თეორემის ანალოგს დირიხლეს განზოგადებული ინტეგრალებისთვის აქვს შემდეგი სახე:

(3.2) თეორემა: ვთქვათ, $f \in E$ და შესრულებულია შემდეგი პირობები:

$$\Psi(t) = \int_0^t |\psi_x(u)| du = o(t) \;\; (t \to +0, \;\; t \to \infty), \tag{3.3}$$

$$\int_\eta^l \frac{|\psi_x(u+h) - \psi_x(u)|}{u} du = o(1) \; \left(\eta = \frac{l}{n} \to 0, \;\; n \to \infty, \;\; l \to \infty\right), \tag{3.4}$$

სადაც $\psi_x(t) = f(x+t) - f(x-t) - f(x)$, მაშინ

$$\eta \cdot S'_{l,n}(x; f) \to f(x), \;\; \eta \to 0, \;\; l, n \to \infty.$$

კრებადობა თანაბარია $[a,b]$ სეგმენტზე, თუ $f \in E$ ფუნქცია შემოსაზღვრულია $x \in [a;b]$-ზე და (3.3) და (3.4) პირობები შესრულებულია თანაბრად $x \in [a,b]$-ს მიმართ.

§4 შედეგების დამტკიცება

(3.1) თეორემის დამტკიცება: თეორემის პირობის ძალით (2.2)-ს პირველი წევრი მიისწრაფის 0-სკენ, მესამე წევრი $\pi\eta^{-1}\Phi(2\eta)=o(1)$, როცა $\eta\longrightarrow 0$. ნაწილობითი ინტეგრებით მე-2 წევრისთვის გვექნება:

$$\eta\int_{\eta}^{l}\frac{\left|\phi_{x_0}(t)\right|}{t^2}dt=\eta\int_{\eta}^{l}\frac{\Phi'(t)}{t^2}dt=\eta\left\{\left[\frac{\Phi(t)}{t^2}\right]_{\eta}^{l}+2\int_{\eta}^{l}\frac{\Phi(t)}{t^3}dt\right\}=\eta\left\{\left[\frac{\Phi(l)}{l^2}-\frac{\Phi(\eta)}{\eta^2}\right]+2\int_{\eta}^{l}\frac{\Phi(t)}{t^3}dt\right\}$$

$$=\eta\frac{\Phi(l)}{l^2}-\frac{\Phi(\eta)}{\eta}+2\eta\int_{\eta}^{l}\frac{\Phi(t)}{t^3}dt=\frac{\Phi(l)}{n\cdot l}-\frac{\Phi(\eta)}{\eta}+2\eta\int_{\eta}^{l}\frac{\Phi(t)}{t^3}dt.$$

ე.ი

$$\eta\int_{\eta}^{l}\frac{\left|\phi_{x_0}(t)\right|}{t^2}dt=\frac{\Phi(l)}{n\cdot l}-\frac{\Phi(\eta)}{\eta}+2\eta\int_{\eta}^{1}\frac{\Phi(t)}{t^3}dt+2\eta\int_{1}^{l}\frac{\Phi(t)}{t^3}dt=K_1-K_2+K_3+K_4.$$

აქედან, ცხადია $K_1=o(1)$, როცა $n\longrightarrow+\infty, l\longrightarrow+\infty$ და $K_2=o(1)$, როცა $\frac{l}{n}\longrightarrow 0$. ახლა რადგან თეორემის პირობის ძალით $\Phi(t)=o(t)$, როცა $t\longrightarrow+0$. $\forall\varepsilon>0$-სთვის არსებობს $\delta>0$ ისეთი, რომ როცა $0<t\leq\delta$, მაშინ $\Phi(t)\leq\varepsilon\cdot t$. ამის გათვალისწინებით გვაქვს:

$$K_3=2\eta\int_{\eta}^{1}\frac{\Phi(t)}{t^3}dt=2\eta\int_{\eta}^{\delta}\frac{\Phi(t)}{t^3}dt+2\eta\int_{\delta}^{1}\frac{\Phi(t)}{t^3}dt\leq 2\eta\varepsilon\int_{\eta}^{\delta}\frac{1}{t^2}dt+\frac{2\eta}{\delta^3}\int_{\delta}^{1}\Phi(t)dt$$

$$=2\eta\varepsilon\left\{\frac{1}{\eta}-\frac{1}{\delta}\right\}+\frac{2\eta}{\delta^3}\int_{\delta}^{1}\Phi(t)dt=2\varepsilon-\frac{2\eta\varepsilon}{\delta}+\frac{2\eta}{\delta^3}\int_{\delta}^{1}\Phi(t)dt\leq 2\varepsilon+\frac{2\eta}{\delta^3}\int_{\delta}^{1}\Phi(t)dt.$$

რადგან $\eta\longrightarrow 0$, როცა $n\longrightarrow+\infty$, $l\longrightarrow+\infty$, ამიტომ არსებობს N ისეთი, რომ როცა $n,l\geq N$, მაშინ

$$\eta\leq\frac{\varepsilon\delta^3}{2\int_{\delta}^{1}\Phi(t)dt}.$$

ამის გათვალისწინებით გვაქვს:

$$K_3\leq 3\varepsilon,$$

როცა n და l საკმარისად დიდია. ε-ის ნებისმიერობის გამო დავასკვნით, რომ $K_3 = o(1)$, როცა $n, l \longrightarrow +\infty$. აგრეთვე, რადგან (2.1) პირობის თანახმად $\Phi(t) = o(t)$, როცა $t \longrightarrow +\infty$, ამიტომ $\forall\varepsilon > 0$-თვის არსებობს $s > 1$ (აქ იგულისხმება, რომ $l > s$) ისეთი, რომ როცა $t \geq s$, მაშინ $\Phi(t) \leq \varepsilon \cdot t$. ამის გათვალისწინებით გვაქვს:

$$K_4 = 2\eta \int_1^l \frac{\Phi(t)}{t^3} dt = 2\eta \int_1^s \frac{\Phi(t)}{t^3} dt + 2\eta \int_s^l \frac{\Phi(t)}{t^3} dt \leq 2\eta \int_1^s \frac{\Phi(t)}{t^3} dt + 2\eta\varepsilon \int_s^l \frac{1}{t^2} dt \leq \varepsilon,$$

როცა n და l საკმარისად დიდია. ε-ის ნებისმიერობის გამო დავასკვნით, რომ $K_4 = o(1)$, როცა $n, l \longrightarrow +\infty$. ამით თეორემის პირველი ნაწილი დამტკიცებულია.

ახლა გადავიდეთ მეორე ნაწილის დამტკიცებაზე. პირველი რიგში შევნიშნოთ, რომ თეორემის პირობების გათვალისწინებით (2.2) შეფასება თანაბარია $x \in [a; b]$-ის მიმართ. თეორემის პირობის ძალით (2.2)-ს პირველი წევრი მიისწრაფის 0-კენ თანაბრად $x \in [a; b]$-ის მიმართ, როცა $\frac{l}{n} \longrightarrow 0, l, n \longrightarrow +\infty$. მესამე წევრი $\pi\eta^{-1}\Phi(2\eta) = o(1)$ თანაბრად $x \in [a; b]$-ის მიმართ, როცა $\frac{l}{n} \longrightarrow 0, l, n \longrightarrow +\infty$, ხოლო მეორე წევრისთვის გვაქვს ტოლობა:

$$\eta \int_\eta^l \frac{|\phi_x(t)|}{t^2} dt = \frac{\Phi(l)}{n \cdot l} - \frac{\Phi(\eta)}{\eta} + 2\eta \int_\eta^1 \frac{\Phi(t)}{t^3} dt + 2\eta \int_1^l \frac{\Phi(t)}{t^3} dt = K_1 - K_2 + K_3 + K_4.$$

ცხადია, $K_1 = o(1)$, $K_2 = o(1)$, $\frac{l}{n} \longrightarrow 0, n \longrightarrow +\infty, l \longrightarrow +\infty$, თანაბრად $x \in [a; b]$-ის მიმართ. ახლა რადგან თეორემის პირობის ძალით $\Phi(t) = o(t)$, როცა $t \longrightarrow +0$, თანაბრად $x \in [a; b]$-ის მიმართ, ამიტომ $\forall\varepsilon > 0$-სთვის არსებობს $\delta > 0$ ისეთი, რომ როცა $0 < t \leq \delta$, მაშინ $\Phi(t) \leq \varepsilon t$, $\forall x \in [a; b]$-თვის, ამის გათვალისწინებით გვაქვს:

$$K_3 = 2\eta \int_\eta^1 \frac{\Phi(t)}{t^3} dt \leq 2\varepsilon + \frac{2\eta}{\delta^3} \int_\delta^1 \Phi(t) dt \leq 2\varepsilon + \frac{2\eta}{\delta^3} \Phi(1).$$

$\Phi(1)$-თვის გვაქვს:

$$\Phi(1) = \int_0^1 |\phi_x(t)| dt \leq \int_0^1 |f(x+t)| dt + \int_0^1 |f(x-t)| dt + 2\int_0^1 |f(x)| dt.$$

პირველ ორ ინტეგრალში შემოვიღოთ ცვლადის გარდაქმნა, შესაბამისად, $x + t = y$, $x - t = z$.

მივიღებთ:

$$\Phi(1) \leq \int_{x}^{x+1} |f(y)|dy + \int_{x-1}^{x} |f(z)|dz + 2|f(x)| \leq \int_{x-1}^{x+1} |f(t)|dt + 2 \max_{x\in[a;b]} |f(x)|.$$

ახლა, თუ გავითვალისწინებთ, რომ $f(t)$ ლოკალურად ინტეგრებადი ფუნქციაა და აგრეთვე შემოსაზღვრულია $[a;b]$ სეგმენტზე (ე.ი $|f(x)| \leq K, \forall x \in [a;b]$), ამიტომ საბოლოოდ მივიღებთ:

$$\Phi(1) \leq \int_{a-1}^{b+1} |f(t)|dt + 2K = M.$$

ე.ი

$$K_3 \leq 2\varepsilon + \frac{2\eta}{\delta^3} M, \forall x \in [a;b].$$

ახლა, რადგან $\eta \longrightarrow 0$, როცა $n \longrightarrow +\infty$, $l \longrightarrow +\infty$, ამიტომ არსებობს N ისეთი, რომ როცა $n, l \geq N$, მაშინ

$$\eta \leq \frac{\varepsilon\delta^3}{2M}.$$

ამის გათვალისწინებით გვაქვს:

$$K_3 \leq 3\varepsilon, \forall x \in [a;b],$$

როცა n და l საკმარისად დიდია. ε-ის ნებისმიერობის გამო დავასკვნით, რომ $K_3 = o(1)$, როცა $n, l \longrightarrow +\infty$ თანაბრად $x \in [a;b]$-ის მიმართ. აგრეთვე, რადგან (2.1) პირობის თანახმად $\Phi(t) = o(t)$, როცა $t \longrightarrow +\infty$. თანაბრად $x \in [a;b]$-ის მიმართ, ამიტომ $\forall\varepsilon > 0$-სთვის არსებობს $s > 1$ (აქ იგულისხმება, რომ $l > s$) ისეთი, რომ როცა $t \geq s$, მაშინ $\Phi(t) \leq \varepsilon \cdot t, \forall x \in [a;b]$-სთვის. ამის გათვალისწინებით გვაქვს:

$$K_4 = 2\eta \int_{1}^{l} \frac{\Phi(t)}{t^3} dt \leq 2\eta \int_{1}^{s} \frac{\Phi(t)}{t^3} dt + 2\eta\varepsilon \int_{s}^{l} \frac{1}{t^2} dt \leq 2\eta \int_{1}^{s} \Phi(t)dt + \frac{2\eta\varepsilon}{s} \leq 2\eta s \cdot \Phi(s) + 2\eta\varepsilon.$$

$\Phi(s)$-სთვის გვაქვს:

$$\Phi(s) = \int_{0}^{s} |\phi_x(t)|dt \leq \int_{0}^{s} |f(x+t)|dt + \int_{0}^{s} |f(x-t)|dt + 2\int_{0}^{s} |f(x)|dt.$$

პირველ ორ ინტეგრალში შემოვიღოთ ცვლადის გარდაქმნა, შესაბამისად, $x+t=y,\ x-t=z$. მივიღებთ:

$$\Phi(s) \leq \int_{x}^{x+s} |f(y)|dy + \int_{x-s}^{x} |f(y)|dy + 2s|f(x)| \leq \int_{a-s}^{b+s} |f(t)|dt + 2sK = L(s).$$

აქედან გვაქვს:

$$K_4 \leq 2\eta s \cdot L(s) + \frac{2\eta\varepsilon}{s}, \forall x \in [a;b].$$

ახლა რადგან რადგან $\eta \longrightarrow 0$, როცა $n \longrightarrow +\infty$, $l \longrightarrow +\infty$, ამიტომ არსებობს N ისეთი, რომ როცა $n, l \geq N$, მაშინ

$$\eta \leq \min\left[\frac{\varepsilon}{2sL(s)}; \frac{1}{2}\right].$$

ამის გათვალისწინებით

$$K_4 \leq 2\varepsilon, \forall x \in [a;b],$$

როცა n და l საკმარისად დიდია. ε-ის ნებისმიერობის გამო დავასკვნით, რომ $K_4 = o(1)$, როცა $n, l \longrightarrow +\infty$, თანაბრად $x \in [a;b]$-ის მიმართ. ე.ი საბოლოოდ

$$\eta \int_{\eta}^{l} \frac{|\phi_x(t)|}{t^2} dt = o(1), \text{როცა } \frac{l}{n} \longrightarrow 0, n \longrightarrow +\infty, l \longrightarrow +\infty,$$

თანაბრად $x \in [a;b]$-ის მიმართ, ამით თეორემა დამტკიცებულია.

(3.2) თეორემის დამტკიცება: როგორც ვიცით

$$\eta \cdot S'_{l,n}(x;f) - f(x) = -\int_{0}^{l} \psi_x(t) \frac{D'_{l,n}(t)}{n} dt + o(1). \tag{4.1}$$

განვიხილოთ ინტეგრალი

$$\left| \int_{0}^{\eta} \psi_x(t) \frac{D'_{l,n}(t)}{n} dt \right| = \left| \frac{D'_{l,n}(t)}{n} \int_{0}^{\eta} \psi_x(u) du \right|_{0}^{\eta} - \int_{0}^{\eta} \frac{D''_{l,n}(t)}{n} \left(\int_{0}^{t} \psi_x(u) du \right) dt \right|$$

$$\left|\int_0^\eta \psi_x(t)\frac{D'_{l,n}(t)}{n}dt\right| \le \left|\frac{D'_{l,n}(\eta)}{n}\int_0^\eta \psi_x(u)du\right| + \left|\int_0^\eta \frac{D''_{l,n}(t)}{n}\left(\int_0^t \psi_x(u)du\right)dt\right|$$
$$\le \left|\frac{\pi n}{l}\int_0^\eta \psi_x(u)du\right| + \left|\int_0^\eta \frac{D''_{l,n}(t)}{n}\left(\int_0^t \psi_x(u)du\right)dt\right|.$$

შევნიშნოთ, რომ

$$\left|\frac{D''_{l,n}(t)}{n}\right| \le \frac{\pi^2 n^2}{l^2}.$$

ახლა რადგან თეორემის პირობის ძალით $\Psi(t) = o(t)$, როცა $t \to +0$. ამიტომ $\forall\varepsilon > 0$-სთვის არსებობს $\delta > 0$ ისეთი, რომ როცა $0 < t \le \delta$, მაშინ $\Psi(t) \le \varepsilon \cdot t$. ზემოაღნიშნულისა და ამის გათვალისწინებით მივიღებთ:

$$\left|\int_0^\eta \psi_x(t)\frac{D'_{l,n}(t)}{n}dt\right| \le \frac{\pi}{\eta}\int_0^\eta |\psi_x(u)|du + \frac{\pi^2 n^2}{l^2}\int_0^\eta \varepsilon \cdot t\, dt \le$$

$$\pi\varepsilon + \varepsilon\frac{\pi^2}{2} \le \pi^2\varepsilon.$$

ε-ის ნებისმიერობის გამო დავასკვნით, რომ

$$\left|\int_0^\eta \psi_x(t)\frac{D'_{l,n}(t)}{n}dt\right| = o(1), \quad \text{როცა} \quad n, l \to +\infty. \tag{4.2}$$

ამის გათვალისწინებით გვაქვს:

$$\begin{aligned}\eta \cdot S'_{l,n}(x; f) - f(x) &= -\int_\eta^l \psi_x(t)\frac{D'_{l,n}(t)}{n}dt + o(1)\\ &= -\frac{\pi}{l}\int_\eta^l \psi_x(t)\left\{\frac{\cos(2n+1)\frac{\pi t}{2l}}{2\sin\frac{\pi t}{2l}} - \frac{\sin\frac{\pi n t}{l}}{4n\sin^2\frac{\pi t}{2l}}\right\}dt + o(1).\end{aligned} \tag{4.3}$$

აქედან თუ გავითვალისწინებთ, რომ

$$\frac{1}{\sin^2\frac{\pi t}{2l}} \le \frac{l^2}{t^2}\ , \text{როცა}\ t \in [0, l],$$

გვექნება:

$$\left|\frac{\pi}{l}\int_\eta^l \psi_x(t)\frac{\sin\frac{\pi n t}{l}}{4n\sin^2\frac{\pi t}{2l}}dt\right| \le \frac{\pi}{4}\eta\int_\eta^l \frac{|\psi_x(t)|}{t^2}dt =$$

$$\frac{\pi}{4}\eta\int_0^t|\psi_x(u)|du\cdot\frac{1}{t^2}\Bigg|_\eta^l+\frac{\pi}{2}\eta\int_\eta^l\frac{1}{t^3}\left(\int_0^t|\psi_x(u)|du\right)dt=I_1+I_2.$$

აქედან

$$|I_1|=\left|\frac{\pi}{4}\eta\int_0^t|\psi_x(u)|du\cdot\frac{1}{t^2}\Bigg|_\eta^l\right|\le\frac{\pi}{4}\eta\int_0^l|\psi_x(u)|du\cdot\frac{1}{l^2}+\frac{\pi}{4}\eta\int_0^\eta|\psi_x(u)|du\cdot\frac{1}{\eta^2}$$

$$\le\frac{\pi}{4}\eta C\cdot l\cdot\frac{1}{l^2}+\frac{\pi}{4}\eta\cdot\varepsilon\eta\frac{1}{\eta^2}=\frac{\pi}{4}C\cdot\frac{1}{n}+\frac{\pi}{4}\cdot\varepsilon<\varepsilon,$$

როცა n საკმარისად დიდია. აქედან დავასკვნით, რომ

$$|I_1|=o(1),\ \text{ როცა } n\to\infty, l\to\infty;$$

$$I_2=\frac{\pi}{2}\eta\int_\eta^l\frac{1}{t^3}\Psi(t)dt=$$

$$\frac{\pi}{2}\eta\int_\eta^1\frac{1}{t^3}\Psi(t)dt+\frac{\pi}{2}\eta\int_1^l\frac{1}{t^3}\Psi(t)dt=K_1+K_2.$$

განვიხილოთ პირველი ინტეგრალი, რადგან თეორემის (3.3) პირობის ძალით $\Psi(t)=o(t)$, როცა $t\longrightarrow+0$. ამიტომ $\forall\varepsilon>0$-სთვის არსებობს $\delta>0$ ისეთი, რომ როცა $0<t\le\delta$ მაშინ $\Psi(t)\le\varepsilon\cdot t$. ამის გათვალისწინებით გვაქვს:

$$K_1=\frac{\pi}{2}\eta\int_\eta^1\frac{1}{t^3}\Psi(t)dt\le\frac{\pi}{2}\eta\varepsilon\int_\eta^\delta\frac{1}{t^2}dt+\frac{\pi}{2}\eta\cdot\frac{1}{\delta^3}\int_\delta^1\Psi(t)dt=$$

$$\frac{\pi}{2}\eta\cdot\varepsilon\left(\frac{1}{\eta}-\frac{1}{\delta}\right)+\frac{\pi}{2}\eta\cdot\frac{1}{\delta^3}\int_\delta^1\Psi(t)dt\le\frac{\pi}{2}\ \varepsilon\ +\frac{\pi}{2}\eta\cdot\frac{1}{\delta^3}\int_\delta^1\Psi(t)dt.$$

ახლა, რადგან

$$\int_\delta^1\Psi(t)dt=\int_\delta^1\int_0^t|\psi_x(u)|du\,dt\le(1-\delta)\int_0^1|\psi_x(u)|du\le$$

$$\int_0^1|f(x+u)-f(x-u)-f(x)|du\le\int_0^1|f(x+u)|du+\int_0^1|f(x-u)|du+|f(x)|\le M,$$

მივიღებთ:

$$K_1\le\frac{\pi}{2}\ \varepsilon\ +\frac{\pi}{2}\eta\cdot\frac{M}{\delta^3}<\varepsilon,$$

როცა n და l საკმარისად დიდია. ε-ის ნებისმიერობის გამო დავასკვნით, რომ

$$K_1 = o(1), \text{ როცა } l, n \to \infty.$$

ახლა რადგან თეორემის (3.3) პირობის ძალით $\Psi(t) = o(t)$, როცა $t \longrightarrow +\infty$. ამიტომ არსებობს $s > 1$ ისეთი, რომ როცა $s \le t \le l$, მაშინ $\Psi(t) \le C \cdot t$ ამის გათვალისწინებით გვაქვს:

$$K_2 = \frac{\pi}{2}\eta \int_1^l \frac{1}{t^3}\, \Psi(t)dt = \frac{\pi}{2}\eta \int_1^s \frac{1}{t^3}\, \Psi(t)dt + \frac{\pi}{2}\eta \int_s^l \frac{1}{t^3}\, \Psi(t)dt$$

$$\le \frac{\pi}{2}\eta \int_1^s \Psi(t)dt + \frac{\pi}{2}\eta \cdot C \int_s^l \frac{1}{t^2}dt = \frac{\pi}{2}\eta \int_1^s \Psi(t)dt + \frac{\pi}{2}\eta \cdot C\left(\frac{1}{s} - \frac{1}{l}\right) \le$$

$$\frac{\pi}{2}\eta \int_1^s \Psi(t)dt + C\frac{\pi}{2}\eta \cdot \frac{1}{s} = L\eta = o(1),$$

როცა $n, l \to \infty$. მაშინ (4.3)-ის გათვალისწინებით მივიღებთ

$$\eta \cdot S'_{l,n}(x; f) - f(x) = -\frac{\pi}{l}\int_\eta^l \psi_x(t) \frac{\cos(2n+1)\frac{\pi t}{2l}}{2\sin\frac{\pi t}{2l}}dt + o(1), \tag{4.4}$$

როცა $l, n \to \infty$. ჩვენ დაგვჭირდება შემდეგი უტოლობები:

$$\left|\cos(2n+1)\frac{\pi t}{2l} - \cos\frac{\pi n t}{l}\right| \le \frac{2\pi t}{l}, \tag{4.5}$$

$$\left|\frac{1}{2\sin\frac{\pi t}{2l}} - \frac{l}{\pi t}\right| \le C. \tag{4.6}$$

გვაქვს

$$\eta \cdot S'_{l,n}(x; f) - f(x) = -\int_\eta^l \psi_x(t) \frac{\cos(2n+1)\frac{\pi t}{2l}}{t}dt -$$

$$\frac{\pi}{l}\int_\eta^l \psi_x(t)\cos(2n+1)\frac{\pi t}{2l} \cdot \left\{\frac{1}{2\sin\frac{\pi t}{2l}} - \frac{l}{\pi t}\right\}dt + o(1).$$

აქედან (4.6) უტოლობის გათვალისწინებით მივიღებთ:

$$\left|\frac{\pi}{l}\int_\eta^l \psi_x(t)\cos(2n+1)\frac{\pi t}{2l} \cdot \left\{\frac{1}{2\sin\frac{\pi t}{2l}} - \frac{l}{\pi t}\right\}dt\right| \le$$

$$\frac{\pi}{l} \cdot C\int_\eta^l |\psi_x(t)|dt \le \pi C\frac{1}{l}\int_0^l |\psi_x(t)|dt = o(1),$$

როცა $l \to \infty$. ანუ გვაქვს:

$$\eta \cdot S'_{l,n}(x; f) - f(x) \ = -\int_{\eta}^{l} \psi_x(t) \frac{\cos(2n+1)\frac{\pi t}{2l}}{t} dt + o(1). \qquad (4.7)$$

(4.5) უტოლობის ძალით მივიღებთ

$$\eta \cdot S'_{l,n}(x; f) - f(x) \ =$$

$$-\int_{\eta}^{l} \psi_x(t) \frac{\cos\frac{\pi n t}{l}}{t} dt - \int_{\eta}^{l} \psi_x(t) \left\{ \frac{\cos(2n+1)\frac{\pi t}{2l}}{t} - \frac{\cos\frac{\pi n t}{l}}{t} \right\} dt + o(1).$$

მეორე ინტეგრალისთვის გვექნება

$$\left| \int_{\eta}^{l} \psi_x(t) \left\{ \frac{\cos(2n+1)\frac{\pi t}{2l}}{t} - \frac{\cos\frac{\pi n t}{l}}{t} \right\} dt \right| \leq$$

$$\int_{\eta}^{l} \frac{|\psi_x(t)|}{t} \cdot \frac{2\pi t}{l} \ dt \leq 2\pi \frac{1}{l} \int_{0}^{l} |\psi_x(t)| dt = o(1), \ \ l \to \infty.$$

(4.7)-ის გათვალისწინებით

$$\eta \cdot S'_{l,n}(x; f) - f(x) = -\int_{\eta}^{l} \psi_x(t) \frac{\cos\frac{\pi n t}{l}}{t} dt + o(1).$$

შემოვიღოთ ცვლადის გარდაქმნა: $t = y + \eta$ მაშინ გვექნება

$$\eta \cdot S'_{l,n}(x; f) - f(x) = -\int_{0}^{l-\eta} \psi_x(y+\eta) \frac{\cos\frac{\pi n}{l}(y+\eta)}{y+\eta} dy + o(1) =$$

$$= -\int_{0}^{l-\eta} \psi_x(y+\eta) \frac{\cos\left(\frac{\pi n y}{l} + \pi\right)}{y+\eta} dy + o(1) = \int_{0}^{l-\eta} \psi_x(t+\eta) \frac{\cos\frac{\pi n t}{l}}{t+\eta} dt + o(1).$$

აქედან

$$\eta \cdot S'_{l,n}(x; f) - f(x) = -\frac{1}{2} \int_{\eta}^{l} \psi_x(t) \frac{\cos\frac{\pi n t}{l}}{t} dt + \frac{1}{2} \int_{0}^{l-\eta} \psi_x(t+\eta) \frac{\cos\frac{\pi n t}{l}}{t+\eta} dt + o(1) =$$

$$= -\frac{1}{2}\int_{\eta}^{l}\left\{\frac{\psi_x(t)}{t} - \frac{\psi_x(t+\eta)}{t+\eta}\right\}\cos\frac{\pi n t}{l}dt + \frac{1}{2}\int_{0}^{\eta}\psi_x(t+\eta)\frac{\cos\frac{\pi n t}{l}}{t+\eta}dt - \frac{1}{2}\int_{l-\eta}^{l}\psi_x(t+\eta)\frac{\cos\frac{\pi n t}{l}}{t+\eta}dt + o(1).$$

ახლა რადგან

$$\left|\frac{1}{2}\int_{0}^{\eta}\psi_x(t+\eta)\frac{\cos\frac{\pi n t}{l}}{t+\eta}dt\right| = \left|-\frac{1}{2}\int_{0}^{\eta}\psi_x(t+\eta)\cdot\frac{\cos\frac{\pi n}{l}(t+\eta)}{t+\eta}dt\right| \le$$

$$\frac{1}{2}\int_{\eta}^{2\eta}\frac{|\psi_x(t)|}{t}dt \le \frac{1}{2\eta}\int_{\eta}^{2\eta}|\psi_x(t)|dt \le \frac{1}{2\eta}\int_{0}^{2\eta}|\psi_x(t)|dt = o(1),\ \ n, l \to \infty,$$

და

$$\left|-\frac{1}{2}\int_{l-\eta}^{l}\psi_x(t+\eta)\frac{\cos\frac{\pi n t}{l}}{t+\eta}dt\right| = \left|\frac{1}{2}\int_{l-\eta}^{l}\psi_x(t+\eta)\frac{\cos\frac{\pi n}{l}(t+\eta)}{t+\eta}dt\right| = \left|\frac{1}{2}\int_{l}^{l+\eta}\psi_x(t)\cdot\frac{\cos t}{t}dt\right| \le$$

$$\frac{1}{2}\int_{l}^{l+\eta}\frac{|\psi_x(t)|}{t}dt \le \frac{1}{2l}\int_{0}^{l+\eta}|\psi_x(t)|dt \le \frac{1}{2l}\int_{0}^{2l}|\psi_x(t)|dt = o(1),\ \ l \to \infty.$$

გვექნება

$$\eta\cdot S'_{l,n}(x;f) - f(x) = -\frac{1}{2}\int_{\eta}^{l}\left\{\frac{\psi_x(t)}{t} - \frac{\psi_x(t+\eta)}{t+\eta}\right\}\cos\frac{\pi n t}{l}dt + o(1).$$

აგრეთვე,

$$\eta\cdot S'_{l,n}(x;f) - f(x) = -\frac{1}{2}\int_{\eta}^{l}\left\{\frac{\psi_x(t)}{t} - \frac{\psi_x(t+\eta)}{t}\right\}\cos\frac{\pi n t}{l}dt +$$

$$\frac{1}{2}\int_{\eta}^{l}\left\{\frac{\psi_x(t+\eta)}{t+\eta} - \frac{\psi_x(t+\eta)}{t}\right\}\cos\frac{\pi n t}{l}dt + o(1).$$

მეორე ინტეგრალისთვის გვაქვს:

$$\left|\frac{1}{2}\int_{\eta}^{l}\left\{\frac{\psi_x(t+\eta)}{t+\eta} - \frac{\psi_x(t+\eta)}{t}\right\}\cos\frac{\pi n t}{l}dt\right| \le$$

$$\frac{1}{2}\eta\int_{\eta}^{l}\frac{|\psi_x(t+\eta)|}{t(t+\eta)}dt \le \frac{1}{2}\eta\int_{\eta}^{l}\frac{|\psi_x(t+\eta)|}{t^2}dt = M_1.$$

აქედან

$$M_1 = \frac{1}{2}\eta\int\limits_{\eta}^{l}\frac{|\psi_x(t+\eta)|}{t^2}dt = \frac{1}{2}\eta\int\limits_{0}^{t+\eta}|\psi_x(u)|du\cdot\frac{1}{t^2}\Bigg|_{\eta}^{l} + \eta\int\limits_{\eta}^{l}\frac{1}{t^3}\left(\int\limits_{0}^{t+\eta}|\psi_x(u)|du\right)dt$$

$$= \left(\frac{1}{2}\eta\int\limits_{0}^{l+\eta}|\psi_x(u)|du\cdot\frac{1}{l^2} - \frac{1}{2}\eta\int\limits_{0}^{2\eta}|\psi_x(u)|du\cdot\frac{1}{\eta^2}\right) + \eta\int\limits_{\eta}^{l}\frac{1}{t^3}\left(\int\limits_{0}^{t+\eta}|\psi_x(u)|du\right)dt.$$

აქედან

$$\left|\frac{1}{2}\eta\int\limits_{0}^{l+\eta}|\psi_x(u)|du\cdot\frac{1}{l^2} - \frac{1}{2}\eta\int\limits_{0}^{2\eta}|\psi_x(u)|du\cdot\frac{1}{\eta^2}\right| \le \frac{1}{2n}\cdot\frac{1}{l}\int\limits_{0}^{l+\eta}|\psi_x(u)|du + \frac{1}{2\eta}\int\limits_{0}^{2\eta}|\psi_x(u)|du$$

$$\le \frac{1}{n}\cdot\frac{1}{2l}\int\limits_{0}^{2l}|\psi_x(u)|du + \frac{1}{2\eta}\int\limits_{0}^{2\eta}|\psi_x(u)|du = o(1), \quad n, l \to \infty,$$

ხოლო მეორე ინტეგრალისთვის გვაქვს:

$$\eta\int\limits_{\eta}^{l}\frac{1}{t^3}\left(\int\limits_{0}^{t+\eta}|\psi_x(u)|du\right)dt = \eta\int\limits_{\eta}^{1}\frac{1}{t^3}\left(\int\limits_{0}^{t+\eta}|\psi_x(u)|du\right)dt + \eta\int\limits_{1}^{l}\frac{1}{t^3}\left(\int\limits_{0}^{t+\eta}|\psi_x(u)|du\right)dt = K_1' + K_2'.$$

თეორემის (3.3)- პირობის ძალით $\forall\varepsilon > 0$-სთვის არსებობს $\delta > 0$ ისეთი, რომ როცა $0 < t \le \delta$, მაშინ $\Psi(t) \le \varepsilon\cdot t$. ამის გათვალისწინებით გვაქვს:

$$K_1' = \eta\int\limits_{\eta}^{1}\frac{1}{t^3}\left(\int\limits_{0}^{t+\eta}|\psi_x(u)|du\right)dt = \eta\int\limits_{\eta}^{\delta}\frac{1}{t^3}\,\Psi(t+\eta)dt + \eta\int\limits_{\delta}^{1}\frac{1}{t^3}\,\Psi(t+\eta)dt$$

$$\le \eta\varepsilon\int\limits_{\eta}^{\delta}\frac{1}{t^3}\,(t+\eta)dt + \eta\frac{1}{\delta^3}\int\limits_{\delta}^{1}\,\Psi(t+\eta)dt,$$

ე.ი

$$K_1' \le \eta\varepsilon\int\limits_{\eta}^{\delta}\frac{1}{t^2}\,dt + \eta^2\varepsilon\int\limits_{\eta}^{\delta}\frac{1}{t^3}dt + \eta\frac{1}{\delta^3}\int\limits_{\delta}^{1}\,\Psi(t+\eta)dt \le$$

$$\varepsilon\; + \eta^2\varepsilon\cdot\frac{1}{2\eta^2} + \eta\frac{1}{\delta^3}\int\limits_{\delta}^{1}\Psi(t+\eta)dt = \varepsilon\; + \frac{\varepsilon}{2} + \eta\frac{1}{\delta^3}\int\limits_{\delta}^{1}\,\Psi(t+\eta)dt.$$

ახლა რადგან

$$\int_{\delta}^{1} \Psi(t+\eta)dt \leq M,$$

მივიღებთ

$$K_1' \leq \varepsilon \ +\frac{\varepsilon}{2}+\eta\frac{M}{\delta^3} \leq 3\varepsilon,$$

როცა n და l საკმარისად დიდია. ε-ის ნებისმიერობის გამო დავასკვნით, რომ

$$K_1' = o(1), \ \ n,l \to \infty.$$

ახლა რადგან თეორემის (3.3) პირობის ძალით $\Psi(t) = o(t)$, როცა $t \longrightarrow +\infty$. ამიტომ არსებობს $s > 1$ ისეთი, რომ როცა $s \leq t \ \leq l$, მაშინ $\Psi(t) \leq \varepsilon \cdot t$ ამის გათვალისწინებით გვაქვს:

$$K_2' = \eta\int_1^l \frac{1}{t^3}\left(\int_0^{t+\eta} |\psi_x(u)|du\right)dt = \eta\int_1^s \frac{\Psi(t+\eta)}{t^3}\ dt + \eta\int_s^l \frac{\Psi(t+\eta)}{t^3}\ dt$$

$$\leq \eta\int_1^s \Psi(t+\eta)\ dt + \eta\int_s^l \frac{\varepsilon(t+\eta)}{t^3}\ dt =$$

$$\eta\int_1^s \Psi(t+\eta)\ dt + \eta\varepsilon\int_s^l \frac{1}{t^2}\ dt + \eta^2\int_s^l \frac{1}{t^3}\ dt \leq$$

$$\eta M_1 + \eta\varepsilon\cdot\frac{1}{\delta} + \varepsilon\eta^2\cdot\frac{1}{2\delta^2} < 3\varepsilon,$$

როცა n და l საკმარისად დიდია. ε-ის ნებისმიერობის გამო დავასკვნით, რომ

$$K_2' = o(1), \ \ n,l \to \infty.$$

ამ ყველაფრის გათვალისწინებით მივიღებთ, რომ

$$\eta\cdot S_{l,n}'(x;f) - f(x) = -\frac{1}{2}\int_{\eta}^{l} \frac{\psi_x(t)-\psi_x(t+\eta)}{t}\cos\frac{\pi nt}{l}dt + o(1),$$

და აქედან თეორემის (3.4) პირობის გათვალისწინებით მივიღებთ თეორემის პირველი ნაწილის დამტკიცებას.

ახლა გადავიდეთ მეორე ნაწილის დამტკიცებაზე. ვთქვათ, $f \in E$ შემოსაზღვრულია $x \in [a,b]$ სეგმენტზე და თეორემის (3.3) და (3.4) პირობები შესრულებულია თანაბრად $x \in [a,b]$-ს მიმართ. როგორც ზემოთ აღვნიშნეთ, თუ $f \in E$ შემოსაზღვრულია $x \in [a,b]$ სეგმენტზე, მაშინ (4.1) ტოლობა შესრულებულია თანაბრად. ე.ი

$$\eta\cdot S_{l,n}'(x;f) - f(x) = -\int_0^l \psi_x(t)\frac{D_{l,n}'(t)}{n}dt + o(1) \qquad (4.1)$$

თანაბარად $x \in [a;b]$-ის მიმართ, როცა $n \to \infty$. ახლა რადგან თეორემის პირობის ძალით $\Psi(t) = o(t),\ t \to +0$, თანაბრად $x \in [a,b]$-ის მიმართ. ამის გათვალისწინებით მივიღებთ, რომ (4.2) სრულდება თანაბარად $x \in [a,b]$-ის მიმართ. აქედან კი (4.3)-ის თანაბრობას მივიღებთ $x \in [a,b]$-ის მიმართ. ე.ი ადგილი აქვს ტოლობას:

$$\eta \cdot S'_{l,n}(x;f) - f(x) = -\int_\eta^l \psi_x(t)\frac{D'_{l,n}(t)}{n}dt + o(1) =$$
$$-\frac{\pi}{l}\int_\eta^l \psi_x(t)\left\{\frac{\cos(2n+1)\frac{\pi t}{2l}}{2\sin\frac{\pi t}{2l}} - \frac{\sin\frac{\pi n t}{l}}{4n\sin^2\frac{\pi t}{2l}}\right\}dt + o(1), \tag{4.3}$$

თანაბარად $x \in [a,b]$-ის მიმართ. ახლა როგორც ზემოთ ვაჩვენეთ,

$$\left|\frac{\pi}{l}\int_\eta^l \psi_x(t)\frac{\sin\frac{\pi n t}{l}}{4n\sin^2\frac{\pi t}{2l}}dt\right| \le \frac{\pi}{4}\eta\int_\eta^l \frac{|\psi_x(t)|}{t^2}dt =$$

$$\frac{\pi}{4}\eta\int_0^t |\psi_x(u)|du \cdot \frac{1}{t^2}\Bigg|_\eta^l + \frac{\pi}{2}\eta\int_\eta^l \frac{1}{t^3}\left(\int_0^t |\psi_x(u)|du\right)dt = I_1 + I_2.$$

ახლა რადგან თეორემის (3.3) პირობის ძალით $\Psi(t) = o(t)$, როცა $t \longrightarrow +0, t \to \infty$, თანაბრად $x \in [a,b]$-ის მიმართ

$$|I_1| = \left|\frac{\pi}{4}\eta\int_0^t |\psi_x(u)|du \cdot \frac{1}{t^2}\Bigg|_\eta^l\right| \le \frac{\pi}{4}\eta\int_0^l |\psi_x(u)|du \cdot \frac{1}{l^2} + \frac{\pi}{4}\eta\int_0^\eta |\psi_x(u)|du \cdot \frac{1}{\eta^2}$$

$$\le \frac{\pi}{4}\eta C \cdot l \cdot \frac{1}{l^2} + \frac{\pi}{4}\eta \cdot \varepsilon\eta\frac{1}{\eta^2} = \frac{\pi}{4}C \cdot \frac{1}{n} + \frac{\pi}{4} \cdot \varepsilon < \varepsilon,$$

როცა n საკმარისად დიდია. აქედან დავასკვნით, რომ

$$|I_1| = o(1), \text{ როცა } n \to \infty, l \to \infty,$$

თანაბრად $x \in [a,b]$-ის მიმართ. I_2-სთვის გვაქვს:

$$I_2 = \frac{\pi}{2}\eta\int_\eta^l \frac{1}{t^3}\Psi(t)dt =$$

$$\frac{\pi}{2}\eta\int_\eta^1 \frac{1}{t^3}\Psi(t)dt + \frac{\pi}{2}\eta\int_1^l \frac{1}{t^3}\Psi(t)dt = K_1 + K_2.$$

განვიხილოთ პირველი ინტეგრალი, რადგან თეორემის (3.3) პირობის ძალით $\Psi(t)=o(t)$, როცა $t\longrightarrow +0$, თანაბრად $x\in[a,b]$-ს მიმართ. ამიტომ $\forall\varepsilon>0$-სთვის არსებობს $\delta>0$ ისეთი, რომ როცა $0<t\leq\delta$, მაშინ $\Psi(t)\leq\varepsilon\cdot t, \forall x\in[a,b]$-თვის. ამის გათვალისწინებით გვაქვს:

$$K_1=\frac{\pi}{2}\eta\int_{\eta}^{1}\frac{1}{t^3}\Psi(t)dt\leq\frac{\pi}{2}\eta\varepsilon\int_{\eta}^{\delta}\frac{1}{t^2}dt+\frac{\pi}{2}\eta\cdot\frac{1}{\delta^3}\int_{\delta}^{1}\Psi(t)dt=$$

$$\frac{\pi}{2}\eta\cdot\varepsilon\left(\frac{1}{\eta}-\frac{1}{\delta}\right)+\frac{\pi}{2}\eta\cdot\frac{1}{\delta^3}\int_{\delta}^{1}\Psi(t)dt\leq\frac{\pi}{2}\ \varepsilon\ +\frac{\pi}{2}\eta\cdot\frac{1}{\delta^3}\int_{\delta}^{1}\Psi(t)dt.$$

ახლა, რადგან

$$\int_{\delta}^{1}\Psi(t)dt=\int_{\delta}^{1}\int_{0}^{t}|\psi_x(u)|du\,dt\leq(1-\delta)\int_{0}^{1}|\psi_x(u)|du\leq$$

$$\int_{0}^{1}|f(x+u)-f(x-u)-f(x)|du\leq\int_{0}^{1}|f(x+u)|du+\int_{0}^{1}|f(x-u)|du+|f(x)|\leq M,$$

$\forall x\in[a,b]$-თვის. მივიღებთ:

$$K_1\leq\frac{\pi}{2}\ \varepsilon\ +\frac{\pi}{2}\eta\cdot\frac{M}{\delta^3}<\varepsilon,$$

როცა n და l საკმარისად დიდია. ε-ის ნებისმიერობის გამო დავასკვნით, რომ

$$K_1=o(1),\ \text{როცა}\ l,n\to\infty,$$

თანაბრად $x\in[a,b]$-ის მიმართ.

ახლა რადგან თეორემის (3.3) პირობის ძალით $\Psi(t)=o(t)$, როცა $t\longrightarrow+\infty$, თანაბრად $x\in[a,b]$-ის მიმართ. ამიტომ არსებობს $s>1$ ისეთი, რომ როცა $s\leq t\ \leq l$ მაშინ $\Psi(t)\leq C\cdot t$, $\forall x\in[a,b]$-თვის. ამის გათვალისწინებით გვაქვს:

$$K_2=\frac{\pi}{2}\eta\int_{1}^{l}\frac{1}{t^3}\ \Psi(t)dt=\frac{\pi}{2}\eta\int_{1}^{s}\frac{1}{t^3}\ \Psi(t)dt+\frac{\pi}{2}\eta\int_{s}^{l}\frac{1}{t^3}\ \Psi(t)dt$$

$$\leq\frac{\pi}{2}\eta\int_{1}^{s}\Psi(t)dt+\frac{\pi}{2}\eta\cdot C\int_{s}^{l}\frac{1}{t^2}dt=\frac{\pi}{2}\eta\int_{1}^{s}\Psi(t)dt+\frac{\pi}{2}\eta\cdot C\left(\frac{1}{s}-\frac{1}{l}\right)\leq$$

$$\frac{\pi}{2}\eta\int_{1}^{s}\Psi(t)dt+C\frac{\pi}{2}\eta\cdot\frac{1}{s}=L\eta=o(1),$$

როცა $n,l\to\infty$, თანაბრად $x\in[a,b]$-ის მიმართ.

მაშინ (4.3)-ის გათვალისწინებით მივიღებთ

$$\eta \cdot S'_{l,n}(x;f) - f(x) \ = -\frac{\pi}{l}\int_{\eta}^{l} \psi_x(t)\frac{\cos(2n+1)\frac{\pi t}{2l}}{2\sin\frac{\pi t}{2l}}dt + o(1), \tag{4.4}$$

როცა $l, n \to \infty$, თანაბრად $x \in [a,b]$-ის მიმართ.

$$\eta \cdot S'_{l,n}(x;f) - f(x) = -\int_{\eta}^{l} \psi_x(t)\frac{\cos(2n+1)\frac{\pi t}{2l}}{t}dt -$$

$$\frac{\pi}{l}\int_{\eta}^{l} \psi_x(t)\cos(2n+1)\frac{\pi t}{2l}\cdot\left\{\frac{1}{2\sin\frac{\pi t}{2l}} - \frac{l}{\pi t}\right\}dt + o(1).$$

აქედან (4.6) უტოლობის გათვალისწინებით მივიღებთ:

$$\left|\frac{\pi}{l}\int_{\eta}^{l} \psi_x(t)\cos(2n+1)\frac{\pi t}{2l}\cdot\left\{\frac{1}{2\sin\frac{\pi t}{2l}} - \frac{l}{\pi t}\right\}dt\right| \leq$$

$$\frac{\pi}{l}\cdot C\int_{\eta}^{l}|\psi_x(t)|dt \leq \pi C\frac{1}{l}\int_{0}^{l}|\psi_x(t)|dt = o(1),$$

როცა $l \to \infty$, თანაბრად $x \in [a,b]$-ის მიმართ. ანუ გვაქვს:

$$\eta \cdot S'_{l,n}(x;f) - f(x) \ = -\int_{\eta}^{l} \psi_x(t)\frac{\cos(2n+1)\frac{\pi t}{2l}}{t}dt + o(1). \tag{4.7}$$

ცხადია, სამართლიანია შემეგი ტოლობა

$$\eta \cdot S'_{l,n}(x;f) - f(x) \ =$$

$$-\int_{\eta}^{l} \psi_x(t)\frac{\cos\frac{\pi n t}{l}}{t}dt - \int_{\eta}^{l} \psi_x(t)\left\{\frac{\cos(2n+1)\frac{\pi t}{2l}}{t} - \frac{\cos\frac{\pi n t}{l}}{t}\right\}dt + o(1).$$

(4.5) უტოლობის გათვალისწინებით მეორე ინტეგრალისთვის გვექნება

$$\left|\int_{\eta}^{l} \psi_x(t)\left\{\frac{\cos(2n+1)\frac{\pi t}{2l}}{t} - \frac{\cos\frac{\pi n t}{l}}{t}\right\}dt\right| \leq$$

$$\int_{\eta}^{l}\frac{|\psi_x(t)|}{t}\cdot\frac{2\pi t}{l}\ dt \leq 2\pi\frac{1}{l}\int_{0}^{l}|\psi_x(t)|dt = o(1),\ \ l \to \infty,$$

თანაბრად $x \in [a,b]$-ის მიმართ. (4.7)-ის გათვალისწინებით

$$\eta\cdot S'_{l,n}(x;f)-f(x)=-\int_{\eta}^{l}\psi_x(t)\frac{\cos\frac{\pi nt}{l}}{t}dt+o(1).$$

შემოვიღოთ ცვლადის გარდაქმნა: $t=y+\eta$, მაშინ გვექნება

$$\eta\cdot S'_{l,n}(x;f)-f(x)=-\int_{0}^{l-\eta}\psi_x(y+\eta)\frac{\cos\frac{\pi n}{l}(y+\eta)}{y+\eta}dy+o(1)=$$

$$=-\int_{0}^{l-\eta}\psi_x(y+\eta)\frac{\cos\left(\frac{\pi ny}{l}+\pi\right)}{y+\eta}dy+o(1)=\int_{0}^{l-\eta}\psi_x(t+\eta)\frac{\cos\frac{\pi nt}{l}}{t+\eta}dt+o(1).$$

აქედან

$$\eta\cdot S'_{l,n}(x;f)-f(x)=-\frac{1}{2}\int_{\eta}^{l}\psi_x(t)\frac{\cos\frac{\pi nt}{l}}{t}dt+\frac{1}{2}\int_{0}^{l-\eta}\psi_x(t+\eta)\frac{\cos\frac{\pi nt}{l}}{t+\eta}dt+o(1)=$$

$$=-\frac{1}{2}\int_{\eta}^{l}\left\{\frac{\psi_x(t)}{t}-\frac{\psi_x(t+\eta)}{t+\eta}\right\}\cos\frac{\pi nt}{l}dt+\frac{1}{2}\int_{0}^{\eta}\psi_x(t+\eta)\frac{\cos\frac{\pi nt}{l}}{t+\eta}dt-\frac{1}{2}\int_{l-\eta}^{l}\psi_x(t+\eta)\frac{\cos\frac{\pi nt}{l}}{t+\eta}dt+o(1).$$

ახლა რადგან

$$\left|\frac{1}{2}\int_{0}^{\eta}\psi_x(t+\eta)\frac{\cos\frac{\pi nt}{l}}{t+\eta}dt\right|=\left|-\frac{1}{2}\int_{0}^{\eta}\psi_x(t+\eta)\cdot\frac{\cos\frac{\pi n}{l}(t+\eta)}{t+\eta}dt\right|\le$$

$$\frac{1}{2}\int_{\eta}^{2\eta}\frac{|\psi_x(t)|}{t}dt\le\frac{1}{2\eta}\int_{\eta}^{2\eta}|\psi_x(t)|dt\le\frac{1}{2\eta}\int_{0}^{2\eta}|\psi_x(t)|dt=o(1),\ \ n,l\to\infty,$$

თანაბრად $x\in[a,b]$-ის მიმართ და აგრეთვე,

$$\left|-\frac{1}{2}\int_{l-\eta}^{l}\psi_x(t+\eta)\frac{\cos\frac{\pi nt}{l}}{t+\eta}dt\right|=\left|\frac{1}{2}\int_{l-\eta}^{l}\psi_x(t+\eta)\frac{\cos\frac{\pi n}{l}(t+\eta)}{t+\eta}dt\right|=\left|\frac{1}{2}\int_{l}^{l+\eta}\psi_x(t)\cdot\frac{\cos t}{t}dt\right|\le$$

$$\frac{1}{2}\int_{l}^{l+\eta}\frac{|\psi_x(t)|}{t}dt\le\frac{1}{2l}\int_{0}^{l+\eta}|\psi_x(t)|dt\le\frac{1}{2l}\int_{0}^{2l}|\psi_x(t)|dt=o(1),\ \ l\to\infty,$$

თანაბრად $x\in[a,b]$-ის მიმართ. გვექნება

$$\eta\cdot S'_{l,n}(x;f)-f(x)=-\frac{1}{2}\int_{\eta}^{l}\left\{\frac{\psi_x(t)}{t}-\frac{\psi_x(t+\eta)}{t+\eta}\right\}\cos\frac{\pi nt}{l}dt+o(1),$$

როცა $n, l \to \infty$, თანაბრად $x \in [a,b]$-ის მიმართ. აგრეთვე, რადგან

$$\eta \cdot S'_{l,n}(x;f) - f(x) = -\frac{1}{2}\int_{\eta}^{l}\left\{\frac{\psi_x(t)}{t} - \frac{\psi_x(t+\eta)}{t}\right\}\cos\frac{\pi n t}{l}dt +$$

$$\frac{1}{2}\int_{\eta}^{l}\left\{\frac{\psi_x(t+\eta)}{t+\eta} - \frac{\psi_x(t+\eta)}{t}\right\}\cos\frac{\pi n t}{l}dt + o(1).$$

მეორე ინტეგრალისთვის გვაქვს:

$$\left|\frac{1}{2}\int_{\eta}^{l}\left\{\frac{\psi_x(t+\eta)}{t+\eta} - \frac{\psi_x(t+\eta)}{t}\right\}\cos\frac{\pi n t}{l}dt\right| \le$$

$$\frac{1}{2}\eta\int_{\eta}^{l}\frac{|\psi_x(t+\eta)|}{t(t+\eta)}dt \le \frac{1}{2}\eta\int_{\eta}^{l}\frac{|\psi_x(t+\eta)|}{t^2}dt = M_1.$$

აქედან

$$M_1 = \frac{1}{2}\eta\int_{\eta}^{l}\frac{|\psi_x(t+\eta)|}{t^2}dt = \frac{1}{2}\eta\int_{0}^{t+\eta}|\psi_x(u)|du \cdot \frac{1}{t^2}\Bigg|_{\eta}^{l} + \eta\int_{\eta}^{l}\frac{1}{t^3}\left(\int_{0}^{t+\eta}|\psi_x(u)|du\right)dt$$

$$= \left(\frac{1}{2}\eta\int_{0}^{l+\eta}|\psi_x(u)|du \cdot \frac{1}{l^2} - \frac{1}{2}\eta\int_{0}^{2\eta}|\psi_x(u)|du \cdot \frac{1}{\eta^2}\right) + \eta\int_{\eta}^{l}\frac{1}{t^3}\left(\int_{0}^{t+\eta}|\psi_x(u)|du\right)dt.$$

ამასთან

$$\left|\frac{1}{2}\eta\int_{0}^{l+\eta}|\psi_x(u)|du \cdot \frac{1}{l^2} - \frac{1}{2}\eta\int_{0}^{2\eta}|\psi_x(u)|du \cdot \frac{1}{\eta^2}\right| \le \frac{1}{2n}\cdot\frac{1}{l}\int_{0}^{l+\eta}|\psi_x(u)|du + \frac{1}{2\eta}\int_{0}^{2\eta}|\psi_x(u)|du$$

$$\le \frac{1}{n}\cdot\frac{1}{2l}\int_{0}^{2l}|\psi_x(u)|du + \frac{1}{2\eta}\int_{0}^{2\eta}|\psi_x(u)|du = o(1), \quad n, l \to \infty,$$

თანაბრად $x \in [a,b]$-ის მიმართ. ხოლო მეორე ინტეგრალისთვის გვაქვს:

$$\eta\int_{\eta}^{l}\frac{1}{t^3}\left(\int_{0}^{t+\eta}|\psi_x(u)|du\right)dt = \eta\int_{\eta}^{1}\frac{1}{t^3}\left(\int_{0}^{t+\eta}|\psi_x(u)|du\right)dt + \eta\int_{1}^{l}\frac{1}{t^3}\left(\int_{0}^{t+\eta}|\psi_x(u)|du\right)dt = K'_1 + K'_2.$$

თეორემის (3.3) პირობის ძალით $\forall\varepsilon > 0$-სთვის არსებობს $\delta > 0$ ისეთი, რომ როცა $0 < t \le \delta$, მაშინ $\Psi(t) \le \varepsilon \cdot t$, $\forall x \in [a,b]$-სთვის. ამის გათვალისწინებით გვაქვს:

$$K_1' = \eta \int_\eta^1 \frac{1}{t^3}\left(\int_0^{t+\eta} |\psi_x(u)|du\right)dt = \eta \int_\eta^\delta \frac{1}{t^3}\ \Psi(t+\eta)dt + \eta \int_\delta^1 \frac{1}{t^3}\ \Psi(t+\eta)dt$$

$$\leq \eta\varepsilon \int_\eta^\delta \frac{1}{t^3}\ (t+\eta)dt + \eta \frac{1}{\delta^3} \int_\delta^1 \Psi(t+\eta)dt,$$

ე.ი

$$K_1' \leq \eta\varepsilon \int_\eta^\delta \frac{1}{t^2}\ dt + \eta^2\varepsilon \int_\eta^\delta \frac{1}{t^3} dt + \eta \frac{1}{\delta^3} \int_\delta^1\ \Psi(t+\eta)dt \leq$$

$$\varepsilon\ + \eta^2\varepsilon \cdot \frac{1}{2\eta^2} + \eta \frac{1}{\delta^3} \int_\delta^1\ \Psi(t+\eta)dt = \varepsilon\ + \frac{\varepsilon}{2} + \eta \frac{1}{\delta^3} \int_\delta^1\ \Psi(t+\eta)dt.$$

ახლა რადგან

$$\int_\delta^1\ \Psi(t+\eta)dt \leq M,$$

მივიღებთ

$$K_1' \leq \varepsilon\ + \frac{\varepsilon}{2} + \eta \frac{M}{\delta^3} \leq 3\varepsilon,$$

როცა n და l საკმარისად დიდია. ε-ის ნებისმიერობის გამო დავასკვნით, რომ

$$K_1' = o(1),\ \ n, l \to \infty,$$

თანაბრად $x \in [a, b]$-ის მიმართ.

ახლა რადგან თეორემის (3.3) პირობის ძალით $\Psi(t) = o(t)$, როცა $t \longrightarrow +\infty$, თანაბრად $x \in [a, b]$-ის მიმართ. ამიტომ არსებობს $s > 1$ ისეთი, რომ როცა $s \leq t\ \leq l$, მაშინ $\Psi(t) \leq \varepsilon \cdot t, \forall\ x \in [a, b]$-სთვის. ამის გათვალისწინებით გვაქვს:

$$K_2' = \eta \int_1^l \frac{1}{t^3}\left(\int_0^{t+\eta} |\psi_x(u)|du\right)dt = \eta \int_1^s \frac{\Psi(t+\eta)}{t^3}\ dt + \eta \int_s^l \frac{\Psi(t+\eta)}{t^3}\ dt$$

$$\leq \eta \int_1^s \Psi(t+\eta)\ dt + \eta \int_s^l \frac{\varepsilon(t+\eta)}{t^3}\ dt =$$

$$\eta \int_1^s \Psi(t+\eta)\ dt + \eta\varepsilon \int_s^l \frac{1}{t^2}\ dt + \eta^2 \int_s^l \frac{1}{t^3}\ dt \leq$$

$$\eta M_1 + \eta\varepsilon \cdot \frac{1}{\delta} + \varepsilon\eta^2 \cdot \frac{1}{2\delta^2} < 3\varepsilon,$$

როცა n და l საკმარისად დიდია. ε-ის ნებისმიერობის გამო დავასკვნით, რომ

$$K_2' = o(1), \;\; n, l \to \infty,$$

თანაბრად $x \in [a, b]$-ის მიმართ. ამ ყველაფრის გათვალისწინებით მივიღებთ, რომ

$$\eta \cdot S_{l,n}'(x; f) - f(x) = -\frac{1}{2}\int_{\eta}^{l} \frac{\psi_x(t) - \psi_x(t+\eta)}{t} \cos\frac{\pi n t}{l} dt + o(1),$$

თანაბრად $x \in [a, b]$-ის მიმართ. აქედან თეორემის (3.4) პირობის გათვალისწინებით მივიღებთ დასამტკიცებელს.

დასკვნა

ტაბერსკის მიერ შემოღებული E კლასისა და დირიხლეს განზოგადოებული ინტეგრალებისთვის დამტკიცებულია ლებეგის კრიტერიუმის ანალოგი და აგრეთვე, ა.ზახაროვის თეორემის ანალოგი ტაბერსკის გაწარმოებული კერძო ჯამების წერტილოვანი და თანაბარი კრებადობის შესახებ.

გამოყენებული ლიტერატურა

1. Lebesgue H. Recherches sur la convergence des séries de Fourier. Math. Ann., 61, 1905, 251-280.
2. Lukacs F. Uber die Bestimmung des Sprunges einer Funktion aus ihrer Fourierreihe. J. Reine Angew. Math., 150, 1920, 107-112.
3. Taberski R. Convergence of some trigonometric sums. Demonstratio Mathematica, Vol. 5, 1973, 101-117.
4. Taberski R. On general Dirichlet's integrals. Anales soc. Math Polonae, Series I: Prace mathematyczne. XVII, 1974, 499-512.
5. Zakharov A. A. Strong Summability of Fourier Series. Siberian Mathematical Journal, Vol. 23, No. 5, 1982.
6. Zigmund A. Trigonometric Series, Cambridge University Press., Vol. 1, 1959.
7. Zviadadze Sh. On generalizations of a theorem of Ferenc Lukàcs. Acta Mathematica Hungarica. 122 (1-2), 2009, 105-120.