ივანე ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტი

თამარი ჩირგაძე

მარტინგალები დისკრეტული დროით. გამოყენებები ფინანსურ მათემატიკაში.

სამაგისტრო პროგრამის დასახელება: მათემატიკა

მისანიჭებელი აკადემიური ხარისხი: მაგისტრი

სამეცნიერო ხელმძღვანელი:

ბესარიონ დოჭვირი: ფიზიკა -მათემატიკის მეცნიერებათა დოქტორი, პროფესორი, ივანე ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტის ზუსტ და საბუნებისმეტყველო მეცნიერებათა ფაკულტეტი; ასოცირებული პროფესორი.

ზუსტ და საბუნებისმეტყველო მეცნიერებათა ფაკულტეტი,

მათემატიკის დეპარტამენტი

2022

სარჩევი

ა ნ ო ტ ა ც ი ა

წარმოდგენილი ნაშრომი კვლევითი ხასიათისაა. სამაგისტრო ნაშრომში გადმოცემულია დისკრეტულ დროში მარტინგალების თეორიის ზოგიერთი საკითხი და გამოყენებები სტოქასტურ ფინანსურ მათემატიკაში. განხილულია დიდ რიცხვთა კანონი და ზოგიერთი ზღვარითი თეორემა. ასევე, პირობითი მათემატიკური ლოდინი, შემთხვევითი ხეტიალი, გაკოტრების ალბათობები და მონეტის აგდების თამაშის დროის საშუალო ხანგრძლივობა. ნაშრომში მოტანილია მარტინგალების მაგალითები და ზოგიერთი გამოყენება შემთხვევითი ხეტიალის მიმართ. ასევე, სხვადასხვა საწყისი თანხის მქონე ორი მოთამაშის პროცესის აღმწერი მარტინგალი. ნაშრომის კვლევით ნაწილში დამტკიცებულია სტოქასტური ფინანსური მათემატიკის ერთ-ერთი ფუნდამენტური თეორემა მარტინგალური ზომის კრიტერიუმის შესახებ, მრავალაქტივიანი ფინანსური ბაზრის ბინომური მოდელის შემთხვევაში. ნაშრომი შედგება შესავლის, 5 პარაგრაფისა და გამოყენებული ლიტერატურისგან.

S u m m e r y

The MSc thesis is a research nature. In this work we describe the issues of martingale theory in stochastic financial mathematics in the case of discrete time. The law of large numbers and some limit theorems are also discussed in this work. There are random walk, probability and the average duration of the coin construction game. The work gives examples of martingales and some examples of random walks. Also, the martingale describes the process of two players with different starting amounts. The part of work is the fundamental theorems of stochastic financial mathematics, which is about the martingale measure criterion, that is proved, in case of the binomial model of the multi-asset financial market. The work consists an introduction, 6 paragraphs and the reference.

შ ე ს ა ვ ა ლ ი

ალბათობის თეორიას საფუძველი ადრეულ პერიოდში ჩაეყარა. თავიდან იყო მონეტა ორი შესაძლო ხდომილობით, „გერბი“ ან „საფასური“, რის კვლევამაც საფუძველი ჩაუყარა ისეთი ცნებების ჩამოყალიბებას, როგორიცაა „სამართლიანი“ აგდება, „წესიერი“ მონეტა, „დამოუკიდებლობა“ და სხვა. „შემთხვევითობის“ რაოდენობრივი მახასიათებლების შესწავლა კი დაიწყო მას შემდეგ, რაც ნათლად იქნა გაწერილი ალბათური მოდელის ცნება და შეიქმნა აქსიომატიკა.

ალბათობის თეორია, როგორც მეცნიერება, შუასაუკუნეებში(მე-17 საუკუნეში) ჩამოყალიბდა და მის მეცნიერებად ჩამოყალიბებაში დიდი როლი მიუძღვის პასკალს, ფერმასა და ჰიუგენს. ამავე პერიოდს მიეკუთვნება ისეთი მნიშვნელოვანი ცნებების დადგენა და ჩამოყალიბება, როგორიცაა: „მათემატიკური ლოდინი“, ალბათობის შეკრებისა და გამრავლების თეორემები. თუმცა, მოგეხსენებათ, ალბათობის თეორია მჭიდრო კავშირშია აზარტულ თამაშებში „წარმატების“ შანსების გამოთვლასთან, ამიტომ ალბათობის ამოცანებს შუასაუკუნეებამდეც განიხილავდნენ იტალიელი მათემატიკოსები.

ალბათობის თეორიის, როგორც მეცნიერების ისტორია სათავეს იღებს ბერნულის ნაშრომით, სადაც უკვე დამტკიცებული იყო ალბათობის თეორიის პირველი ზღვარითი თეორემა - „დიდ რიცხვთა კანონი“, ბერნულის შემდეგ ისტორია გრძელდება მუავრის „ცენტრალური ზღვარითი თეორემით“. ბერნულისა და მუავრიც დამსახურებაა ალბათობის თეორიაში ფუნდამენტური ტერმინებისა და განმარტებების შემოტანა. მათ სახელს უკავშირდება ხდომილობის ალბათობის კლასიკური განმარტება, „ფარდობითი სიხშირის“ ცნება, „დამოუკიდებლობა“, „მათემატიკური ლოდინი“, „პირობითი ალბათობა“ და სხვა. ასევე აუცილებელია აღინიშნოს ლაპლასის მნიშვნელოვანი წვლილი დაკვირვებათა შეცდომების თეორიაში ალბათური მოდელებისა და მეთოდების გამოყენებაში.

ალბათობის თეორიის განვითარების შემდეგი პერიოდი უკვე უკავშირდება პ.ლ. ჩებიშევის მოღვაწეობას, სადაც მან მნიშვნელოვანი როლი ითამაშა ალბათობის თეორიის, როგორც მეცნიერების განვითარებაში და მან უკვე ცენტრალური ზღვარითი თეორემის დამტკიცებისთვის გამოიყენა ე.წ. მომენტთა მეთოდი, ხოლო ამ თეორემის ზოგადი სახე მახასიათებელი ფუნქციების მეთოდით შეიმუშავა უკვე ლიაპუნოვმა. ამ თეორიის

განვითარებამ საფუძველი ჩაუყარა სხვადასხვა ზღვარითი თეორემების დამტკიცების მძლავრ ანალიზურ მეთოდს.

გასული საუკუნის დასაწყისში განვითარება დაიწყო ალბათობის თეორიის ერთ-ერთმა ახალმა მიმართულებამ, რომელსაც შემთხვევით პროცესთა თეორიის სახელით იცნობენ. ასევე ვითარდება და ძირითადი ყურადღება ეთმობა შემთხვევით პროცესებს დისკრეტულ დროში და შემთხვევითი პროცესების ზოგადი თეორიის შესწავლას.

ალბათობის თეორიაში, როგორც უკვე ვთქვით, დიდი ადგილი უჭირავს შემთხვევით პროცესებს დისკრეტული დროით, ასევე, ძალიან მნიშვნელოვანია აღინიშნოს მარტინგალების თეორიის მნიშვნელოვანი როლი შემთხვევითი პროცესების ზოგად თეორიასა და მის გამოყენებაში. თანამედროვე სამყაროში ისეთმა პრობლემებმა იჩინა თავი, როგორიცაა ფულად-საკრედიტო პოლიტიკა და პრობლემატიკა, რომლის რეგულირებაც პირდაპირ კავშირშია ფასიან ქაღალდებთან, როგორიცაა: აქცია, ობლიგაცია, ფიუჩერსი და სხვა. ფასიანი ქაღალდებით ვაჭრობა ძალიან პოპულარულია მთელს მსოფლიოში და საჭიროებს შესწავლასა და ანალიზს, მასთან დაკავშირებული პრობლემებისა.

ფინანსური ბაზარი, ეს ძალიან რთული სქემაა და მისი სტრუქტურა დაკავშირებულია რთულ მათემატიკურ ამოცანებთან, რომლის გადაწყვეტაც, სწორედ რომ, სტოქასტური ფინანსური მათემატიკის ანალიზითაა შესაძლებელი.

სადიპლომო ნაშრომში წარმოდგენილია სამაქტივიანი ფინანსური ბაზარი, რომელიც შედგება ორი ობლიგაციისა და ერთი აქციისგან, ასევე დამტკიცებულია ფინანსური მათემატიკის ერთ-ერთი მნიშვნელოვანი და ბაზისური თეორემა მარტინგალობის კრიტერიუმის შესახებ.

§ 1 ბერნულის სქემა. დიდ რიცხვთა კანონი. ზოგიერთი ზღვარითი თეორემა.

ისეთ სამეულს $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, სადაც

$$\Omega = \{\varpi : \varpi = (a_1, \dots, a_n), \ \ a_i = 0,1\},$$

$$\mathcal{A} = \{A : A \subseteq \Omega\}, \quad P(\{\varpi\}) = P^{\sum a_i} q^{n - \sum a_i} (= P(\varpi))$$

ეწოდება ალბათური მოდელი, ეს ალბათური მოდელი შეესაბამება n დამოუკიდებელ ორშედეგიან ცდას, იგივე ბერნულის სქემა.

ჩებიშევის უტოლობა: ვთქვათ, მოცემული გვაქვს რაიმე ალბათური სივრცე $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ და $\xi = \xi(\varpi)$ არის არაუარყოფითი შემთხვევითი სიდიდე. მაშინ, ყოველი $\varepsilon > 0$ რიცხვისთვის გვექნება

$$P\{\xi \geq \varepsilon\} \leq \frac{E\xi}{\varepsilon}.$$

რომელიც ასევე ცნობილია ი.ბერნულის დიდ რიცხვთა კანონის სახელით. შევნიშნოთ, რომ ი. ბერნულის მიერ წარმოდგენილი დამტკიცება მდგომარეობდა $\sum_{\left\{k | \frac{k}{n} - p | \geq \varepsilon\right\}} P_n(k) \to \infty$ მტკიცებულების დადგენაში, რაც მან მკაცრად დაამტკიცა $P_n(k)$ ბინომური ალბათობების შეფასებების გამოყენებით. ბინომური განაწილების ალბათობების ჯამი, რომელსაც შემდეგი სახე აქვს $\sum_{\left\{k | \frac{k}{n} - p | \geq \varepsilon\right\}} P_n(k)$ დიდი n-ებისთვის საკმაოდ რთულია და ასევე არ აქვს დიდი გამოყენება ალბათობაში. ამიტომ უკვე მოგვიანებით, დიდი მნიშვნელობა შეიძინა მუავრისა და ლაპლასის $P_n(k)$ ალბათობებისთვის მიღებულმა მარტივმა ასიმპტოტურმა ფორმულებმა, რამაც უკვე საშუალება მოგვცა მარტივად დაგვემტკიცებინა დიდ რიცხვთა კანონი, რაც შემდეგ უკვე დაგვეხმარა ე.წ. ლოკალური და ინტეგრალური ზღვარითი თეორემების შემუშავებასა და ჩამოყალიბებაში. ლოკალური და ინტეგრალური ზღვარითი თეორემების ძირითადი შინაარსი ისაა, რომ დიდი n-ებისთვის და $k \sim np$ რიცხვებისთვის გვაძლევს $P_n(k) \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi npq}} e^{-\frac{(k-np)^2}{2npq}}$,

და $\sum_{\left\{k | \frac{k}{n} - p | \leq \varepsilon\right\}} P_n(k) \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\varepsilon\sqrt{n/pq}}^{\varepsilon\sqrt{n/pq}} e^{-x^2/2} dx.$

ზღვარითი თეორემები:

ვთქვათ, მოცემული გვაქვს $S_n = \xi_1 + \cdots + \xi_n$. მაშინ

$$E\frac{S_n}{n} = p \tag{1}$$

$$E\left(\frac{S_n}{n}-p\right)^2=\frac{pq}{n}. \tag{2}$$

$$\left|\frac{S_n}{n}-p\right|\sim\sqrt{\frac{pq}{n}} \tag{3}$$

$$P\left\{\left|\frac{S_n-ES_n}{\sqrt{DS_n}}\right|\le x\right\}=\sum_{\left\{k:\left|\frac{k-np}{\sqrt{npq}}\right|\le x\right\}}P_n(k). \tag{4}$$

ლოკალური ზღვარითი თეორემა. ვთქვათ, მოცემულია $0<p<1$, მაშინ ისეთი k-ებისთვის, რომ $|k-np|=o(npq)^{\frac{2}{3}}$, გვექნება

$$P_n(k)\sim\frac{1}{\sqrt{2\pi npq}}e^{-\frac{(k-np)^2}{2npq}}, \tag{5}$$

მაშინ, როცა $n\to\infty$

$$sup_{\{k:|k-np|\le\varphi(n)\}}\left|\frac{P_n(k)}{\frac{1}{\sqrt{2\pi npq}}e^{-\frac{(k-np)^2}{2npq}}}-1\right|\to 0, \tag{6}$$

სადაც $\varphi(n)$ წარმოადგენს ნებისმიერ არაუარყოფით ფუნქციას, სადაც $\varphi(n)=o(npq)^{\frac{2}{3}}$.

მუავრ-ლაპლასის ინტეგრალური თეორემა. ვთქვათ, მოცემულია $0<p<1$,

$P_n(k)$=$C_n^k p^k q^{n-k}$, $\quad P_n(a,b]=\sum_{a<x\le b}P_n\left(np+x\sqrt{npq}\right)$.

$$\text{მაშინ } sup_{-\infty\le a<b\le\infty}\left|P_n(a,b]-\frac{1}{2\pi}\int_a^b e^{-\frac{x^2}{2}}dx\right|\to 0, n\to\infty. \tag{7}$$

პუასონის თეორემა. ვთქვათ, მოცემულია, რომ $p(n)\to 0, n\to\infty,\ np(n)\to\lambda$, სადაც $\lambda>0$. მაშინ ვიტყვით, რომ ნებისმიერი $k=0,1,\ldots$-სთვის

$$P_n(k)\to\pi_k,\qquad n\to\infty, \tag{8}$$

საიდანაც განვსაზღვროთ, რომ

$$\pi_k=\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!},\qquad k=0,1,\ldots. \tag{9}$$

§ 2. პირობითი ალბათობები და მათემატიკური ლოდინები დაყოფის მიმართ.

ვთქვათ, მოცემულია სასრული ალბათური სივრცე $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ და $\mathcal{D} = \{D_1, \ldots, D_k\}$ Ω სივრცის რაიმე დაყოფა $\mathcal{D} = \{D_1, \ldots, D_k\}$, სადაც ($D_i \epsilon \mathcal{A}, P(D_i) > 0, i = 1, \ldots, k$ და $D_i + \cdots + D_k = \Omega$).

ვთქვათ, A არის ხდომილება აღებული $\mathcal{A}$-დან და A ხდომილების პირობითი ალბათობა $P(A|D_i)$ მოცემულია D_i ხდომილების მიმართ.

პირობითი ხდომილებების ერთობლიობასთან $\{P(A|D_i),\ i = 1, \ldots, k\}$ დავაკავშიროთ შემდეგი შემთხვევითი სიდიდე

$$\pi(\varpi) = \sum_{i=1}^{k} P(A|D_i) I_{D_i}(\varpi) \tag{1}$$

ეს სიდიდე დაყოფის D_i ატომებზე იღებს მნიშვნელობას $P(A|D_i)$. ეს შემთხვევითი სიდიდე დაკავშირებულია $\mathcal{D}$ დაყოფასთან. ეს ჩაიწერება როგორც

$$P(A|\mathcal{D}) \text{ ან } P(A|\mathcal{D})(\varpi)$$

და უწოდებენ A ხდომილების პირობით ალბათობას $\mathcal{D}$ დაყოფის მიმართ.

ამ ცნებებსა და პირობითი ალბათობების ზოგადი ცნებებს σ-ალგებრების მიმართ, დიდი და მნიშვნელოვანი ადგილი უჭირავს ალბათობის თეორიაში.

პირობით ალბათობებს თავისი თვისებები აქვს, მაგალითად:

$$P(A + B|\mathcal{D}) = P(A|\mathcal{D}) + P(B|\mathcal{D}) \tag{2}$$

ამ შემთხვევაში თუ დავუშვებთ, რომ $\mathcal{D}$ ტრივიალური დაყოფაა რომელიც Ω სიმრავლისგან შედგება, მაშინ

$$P(A|\mathcal{D}) = P(A) \tag{3}$$

$P(A|\mathcal{D})$ პირობითი ალბათობება განისაზღვრა როგორც შემთხვევითი სიდიდე, რამაც საშუალება მოგვცა მათემატიკური ლოდინის გამოყენებით ჩაგვეწერა სრული ალბათობის ფორმულა:

$$EP(A|\mathcal{D}) = P(A). \tag{4}$$

$$P(A|\mathcal{D})(\varpi) = \sum_{i=1}^{k} P(A|D_i) I_{D_i}(\varpi),$$

მათემატიკური ლოდინის განმარტებიდან გამომდინარე

$$EP(A|\mathcal{D}) = \sum_{i=1}^{k} P(A|D_i)P(D_i) = \sum_{i=1}^{k} P(AD_i) = P(A).$$

ვთქვათ გვაქვს შემთხვევითი სიდიდე $\eta = \eta(\varpi)$, რომლის მნიშვნელობებია $y_1, \dots, y_k$ დადებითი ალბათობებით:

$$\eta(\varpi) = \sum_{j=1}^{k} y_j I_{D_i}(\varpi),$$

აქიდან, $D_j = \{\varpi : \eta(\varpi) = y_j\}$. ხოლო დაყოფას $\mathcal{D}_\eta = \{D_1, \dots, D_k\}$ ეწოდება η შემთხვევითი სიდიდით წარმოქმნილი დაყოფა. $P(A|\mathcal{D}_\eta)$ პირობით ალბათობას აღვნიშნოთ: $P(A|\eta)$ ან $P(A|\eta)(\varpi)$ და მას დავარქვათ A ხდომილების პირობითი ალბათობა η შემთხვევითი სიდიდის მიმართ.

ამ მსჯელობის მსგავსად, მაგალითად, თუ მოცემული გვაქვს $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_m$ შემთხვევითი სიდიდეები და $\mathcal{D}\eta_{1,}\eta_2, \dots, \eta_m - \eta_1, \eta_2, \dots, \eta_m$ არის შემთხვევითი სიდიდეებით წარმოქმნილი დაყოფა, შემდეგი ატომებით

$$\mathcal{D}_{y_1, y_2, \dots, y_m} = \{\varpi : \eta_1(\varpi) = y_1, \eta_2(\varpi) = y_2, \dots, \eta_m(\varpi) = y_m\},$$

მაშინ $P(A|\mathcal{D}_{\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_m})$ შეგვიძლია ჩავწეროთ $P(A|\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_m)$ სიმბოლოთი და ვუწოდოთ A ხდომილების პირობითი ალბათობა $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_m$ შემთხვევითი სიდიდეების მიმართ.

მაგალითი 1. ვთქვათ, ξ და η ორი დამოუკიდებელი შემთხვევითი სიდიდეა, რომელიც ერთნაირადაა განაწილებული, ამასთან თითოეული იღებს 1 ან 0 მნიშვნელობებს ალბათობებით, p და q. ჩვენი დავალებაა, ვიპოვოთ ისეთი $A = \{\varpi : \xi + \eta = k\}, k = 0,1,2,$ ხდომილების პირობითი ალბათობა η-შემთხვევითი სიდიდის მიმართ, რომ $P(A|\eta)$.

თუ მოცემული გვაქვს ξ და η რომელიც არის ორი დამოუკიდებელი შემთხვევითი სიდიდე, და $P\{\eta = y\} > 0$, მაშინ გვექნება

$$P(\xi + \eta = z|\eta = y) = P\{\xi + y = z\}. \quad (5)$$

თუ დავაკვირდებით

$$P(\xi + \eta = z|\eta = y) = \frac{P\{\xi + \eta = z, \eta = y\}}{P\{\eta = y\}} = \frac{P\{\xi + y = z, \eta = y\}}{P\{\eta = y\}} - \frac{P\{\xi + y = z\}P\{\eta = y\}}{P\{\eta = y\}}$$

$$= P\{\xi + y = z\}$$

აქედან

$$
\begin{aligned}
P(A|\eta)(\varpi) &= P(\xi+\eta=k|\eta)(\varpi) \\
&= P(\xi+\eta=k|\eta=0)I_{\{\eta=0\}}(\varpi) + P(\xi+\eta=k|\eta=1)I_{\{\eta=1\}}(\varpi) \\
&= P\{\xi=k\}I_{\{\eta=0\}}(\varpi) + P\{\xi=k-1\}I_{\{\eta=1\}}(\varpi)
\end{aligned}
$$

ასე რომ

$$
P(\xi+\eta=k|\eta)(\varpi) = \begin{cases} qI_{(\eta=0)}(\varpi), & k=0, \\ pI_{(\eta=0)}(\varpi) + qI_{(\eta=1)}(\varpi), & k=1, \\ pI_{(\eta=1)}(\varpi), & k=2, \end{cases} \tag{6}
$$

ანუ

$$
P(\xi+\eta=k|\eta)(\varpi) = \begin{cases} q(1-\eta), & k=0, \\ p(1-\eta)+q\eta, & k=1, \\ p\eta, & k=2, \end{cases} \tag{7}
$$

ახლა ვთქვათ, $\xi=\xi(\varpi)$ არის შემთხვევითი სიდიდე, შემდეგი მნიშვნელობით $X = \{x_1, \dots, x_l\}$, რაღაც სიმრავლეში:

$$
\xi = \sum_{j=1}^{l} x_j I_{A_i}, \qquad A_j = \{\varpi : \xi = x_j\},
$$

ასევე მოცემულია რაიმე დაყოფა $\mathcal{D} = \{D_1, \dots, D_k\}$. გვაქვს $P(A_j)$, სადაც $j = 1, \dots, l$, და ξ შემთხვევითი სიდიდისთვის მათემატიკური ლოდინი ასე ჩაიწერება

$$
E\xi = \sum_{j=1}^{l} x_j P(A_j), \tag{8}
$$

$P(A_j|\mathcal{D})$, $j = 1, \dots, l$ მოცემული პირობითი ალბათობების საშუალებით შეიძლება განისაზღვროს ξ შემთხვევითი სიდიდის პირობითი მათემატიკური ლოდინი რაღაც $\mathcal{D}$ დაყოფის მიმართ, რომელიც ჩაიწერება $E(\xi|\mathcal{D})$ ან $E(\xi|\mathcal{D})(\varpi)$ გამოსახულებით და

$$
E(\xi|\mathcal{D}) = \sum_{j=1}^{l} x_j P(A_j|\mathcal{D}). \tag{9}
$$

გამოვიდა, რომ პირობითი მათემატიკური ლოდინი $E(\xi|\mathcal{D})(\varpi)$ არის შემთხვევითი სიდიდე, რომელიც ერთნაირი D_i ატომის ყველა ϖ ელემენტარული ხდომილობისთვის ღებულობს ერთსა და იმავე $\sum_{j-1}^{l} P(A_j|D_i)$ ნიშვნელობას. ასევე, შეგვიძლია პირობითი მათემატიკური ლოდინის შემდეგნაირად განსაზღვრაც $E(\xi|D_i) -$ *ანუ* ξ შემთხვევითი სიდიდის პირობითი მათემატიკური ლოდინი D_i ხდომილების მიმართ განისაზღვრება შემდეგნაირად:

$$E(\xi|D_i) = \sum_{j=1}^{l} x_j P(A_j|D_i) \qquad \left(= \frac{E\left[\xi I_{D_i}\right]}{P(D_i)}\right), \tag{10}$$

ასევე,

$$E(\xi|\mathcal{D})(\varpi) = \sum_{i=1}^{l} E(\xi|D_i) I_{D_i}(\varpi). \tag{11}$$

(იხ. დიაგრამა ნახ. 1-ზე).

$$\begin{tikzcd}
P(\cdot) \arrow[r, "(8)"] \arrow[d] & E\xi \\
P(\cdot\,|D) \arrow[r, "(10)"] \arrow[d] & E(\xi|D) \arrow[d, "(11)"] \\
P(\cdot\,|\mathcal{D}) \arrow[r, "(9)"] & E(\xi|\mathcal{D})
\end{tikzcd}$$

(ნახ.1)

პირობითი მათემატიკური ლოდინის თვისებები:

$$E(a\xi + b\eta|\mathcal{D}) = aE(\xi|\mathcal{D}) + bE(\eta|\mathcal{D}), \qquad a, b \text{ მუდმივებია;} \tag{12}$$

$$E(\xi|\Omega) = E\xi; \tag{13}$$

$$E(C|\mathcal{D}) = C, \quad C - \text{მუდმივია;} \tag{14}$$

თუ $\xi = I_A(\varpi)$, მაშინ

$$E(\xi|\mathcal{D}) = P(A|\mathcal{D}). \tag{15}$$

შემდეგი თვისებით განვააზოგადებთ სრული ალბათობის (4) ფორმულას:

$$EE(\xi|\mathcal{D}) = E\xi \tag{16}$$

დამტკიცება მიმდინარეობს მე-(4) ფორმულის თანახმად:

$$EE(\xi|\mathcal{D}) = E\sum_{j=1}^{l} x_j P(A_j|\mathcal{D}) = \sum_{j=1}^{l} x_j EP(A_j|\mathcal{D}) = \sum_{j=1}^{l} x_j P(A_j) = E\xi.$$

ვთქვათ, $\mathcal{D} = \{D_1, \dots, D_k\}$ რაიმე დაყოფაა და $\eta = \eta(\varpi)$ - რაიმე მოცემული შემთხვევითი სიდიდე. η შემთხვევითი სიდიდე ზომადია მოცემული დაყოფის მიმართ, თუ $\mathcal{D}_\eta \preccurlyeq \mathcal{D}$, და $\eta = \eta(\varpi)$ შეგვიძლია წარმოვადგინოთ შემდეგი სახით:

$$\eta(\varpi) = \sum_{i=1}^{k} y_i I_{D_i}(\varpi),$$

სადაც y_i-ები ტოლადაც შეგვიძლია მოვიაზროთ. რომ ჩამოვაყალიბოთ, შემთხვევითი სიდიდე $\mathcal{D} -$ ზომადია მხოლოდ მაშინ, როცა ღებულობს მუდმივ მნიშვნელობებს $\mathcal{D}$ დაყოფის ატომებზე.

მაგალითი 2. თუ ავიღებთ, $\mathcal{D}$ -ს როგორც ტრივიალური დაყოფას, და $\mathcal{D} = \{\Omega\}$, მაშინ η შემთხვევითი სიდიდე იქნება $\mathcal{D}$ −ზომადი მხოლოდ მაშინ, თუ $\eta \equiv C$, სადაც C კონსტანტაა. ყოველი η არის ზომადი $\mathcal{D}_\eta$ დაყოფის მიმართ.

ახლა დავუშვათ, რომ η შემთხვევითი სიდიდე იყოს $\mathcal{D}$ ზომადი. მაშინ

$$E(\xi\eta|\mathcal{D}) = \eta E(\xi|\mathcal{D}) \tag{17}$$

$$E(\eta|\mathcal{D}) = \eta\big(E(\eta|\mathcal{D}_\eta) = \eta\big). \tag{18}$$

(17)-ის დასამტკიცებლად გვჭირდება აღვნიშნოთ, რომ თუ $\xi = \sum_{j=1}^{l} x_j I_{A_j}$, მაშინ

$$\xi\eta = \sum_{j=1}^{l}\sum_{i=1}^{k} x_j y_i I_{A_j D_i}$$

აქიდან

$$E(\xi\eta|\mathcal{D})$$
$$= \sum_{j=1}^{l}\sum_{i=1}^{k} x_j y_i P\big(A_j D_i\big|\mathcal{D}\big) = \sum_{j=1}^{l}\sum_{i=1}^{k} x_j y_i \sum_{m=1}^{k} P\big(A_j D_i\big|D_m\big) I_{D_m}(\varpi) = \sum_{j=1}^{l}\sum_{i=1}^{k} x_j y_i P(A_j D_i|D_i) I_{D_i}(\varpi)$$
$$= \sum_{j=1}^{l}\sum_{i=1}^{k} x_j y_i P\big(A_j\big|D_i\big) I_{Di}(\varpi). \qquad (19)$$

ასევე, თუ $I_{D_i}^2 = I_{D_i}$ და $I_{D_i} I_{Dm} = 0,\ i \neq m$ მაშინ გვექნება

$$\eta E(\xi|\mathcal{D}) = \left[\sum_{i=1}^{k} y_i I_{D_i}(\varpi)\right]\cdot\left[\sum_{j=1}^{l} x_j P\big(A_j\big|\mathcal{D}\big)\right]$$
$$= \left[\sum_{i=1}^{k} Y_i\, I_{D_i}(\varpi)\right]\cdot\sum_{m=1}^{k}\left[\sum_{j=1}^{l} x_j P(A_j|D_m)\right]\cdot I_{D_m}(\varpi) = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{l} y_i x_j P\big(A_j\big|D_i\big) I_{D_i}(\varpi),$$

რაც ამტკიცებს (17)-ს.

ვთქვათ, $\mathcal{D}_1 \preccurlyeq \mathcal{D}_2$ (ეს იმას ნიშნავს, რომ $\mathcal{D}_2$ დაყოფა უფრო „წვრილია“, ვიდრე $\mathcal{D}_1$ ფაყოფა), მაშინ სამართლიანია თვისება:

$$E[E(\xi|\mathcal{D}_2)|\mathcal{D}_1] = E(\xi|\mathcal{D}_1). \qquad (20)$$

ამ თვისებას მოიხსენიებენ როგორც „ტელესკოპურობის“ თვისებას.

დასამტკიცება: ვთქვათ გვაქვს

$$\mathcal{D}_1 = \{D_{11,\dots,D_{1m}}\},\quad \mathcal{D}_2 = \{D_{21,\dots,D_{2n}}\},$$

თუ $\xi = \sum_{j-1}^{l} x_j I_{A_j}$, მაშინ

$$E(\xi|\mathcal{D}_2) = \sum_{j=1}^{l} x_j P\big(A_j\big|\mathcal{D}_2\big),$$

საკმარისია ვიპოვოთ, რომ

$$E\big[P\big(A_j\big|\mathcal{D}_2\big)|\mathcal{D}_1\big] = P\big(A_j\big|\mathcal{D}_1\big). \qquad (21)$$

და რადგან

$$P\big(A_j\big|\mathcal{D}_2\big) = \sum_{q=1}^{n} P\big(A_j\big|D_{2q}\big) I_{D_{2q}},$$

ამიტომ

$$E\left[P\left(A_j|\mathcal{D}_2\right)|\mathcal{D}_1\right]$$
$$= \sum_{q=1}^{n} P\left(A_j|D_{2q}\right)P\left(D_{2q}|\mathcal{D}_1\right)$$
$$= \sum_{q=1}^{n} P\left(A_j|D_{2q}\right)\left[\sum_{p=1}^{m} P\left(D_{2q}|D_{1p}\right)I_{D_{1p}}\right]$$
$$= \sum_{p=1}^{m} I_{D_{1p}} \sum_{q=1}^{n} P\left(A_j|D_{2q}\right)P\left(D_{2q}|D_{1p}\right)$$
$$= \sum_{p=1}^{m} I_{D_{1p}} \sum_{\{q:D_{2q}\subseteq D_{1p}\}} P\left(A_j|D_{2q}\right)P\left(D_{2q}|D_{1p}\right)$$
$$= \sum_{p=1}^{m} I_{D_{1p}} \sum_{\{q:D_{2q}\subseteq D_{1p}\}} \frac{P(A_jD_{2q})}{P(D_{2q})}\cdot\frac{P\left(D_{2q}\right)}{P\left(D_{1p}\right)}$$
$$= \sum_{p=1}^{m} I_{D_{1p}}P\left(A_j|D_{1p}\right) = P\left(A_j|\mathcal{D}_1\right),$$

ეს ამტკიცებს (21)-ს.

თუ $\mathcal{D}$ დაყოფა ($\mathcal{D} = \mathcal{D}_{\eta 1,,,,,\eta k}$), წარმოიქმნება $\eta_1, \dots, \eta_k$ შემთხვევითი სიდიდეებით, პირობითი მათემატიკური ლოდინი $E(\xi|\mathcal{D}_{\eta 1,,,\eta k})$ ჩაიწერება $E(\xi|\eta_1, \dots, \eta_k)$, ან $E(\xi|\eta_1, \dots, \eta_k)(\varpi)$ და მას ვუწოდებთ ξ შემთხვევითი სიდიდის პირობით მათემატიკურ ლოდინს $\eta_1, \dots, \eta_k$- ს მიმართ.

თუ ξ და η დამოუკიდებელია, მაშინ

$$E(\xi|\eta) = E\xi. \tag{22}$$

ასევე

$$E(\eta|\eta) = \eta. \tag{23}$$

ვთქვათ, ξ შემთხვევაში სიდიდე არ არის დამოკიდებული $\mathcal{D}$ დაყოფაზე, ეს ნიშნავს რომ ნებისმიერი $D_i \in \mathcal{D}$-თვის შემთხვევითი სიდიდეები ξ და I_{D_i} დამოუკიდებელია, ანუ შეგვიძლია ჩავწეროთ:

$$E(\xi|\mathcal{D}) = E\xi. \tag{24}$$

(20)- დან თუ განვიხილავთ კერძო შემთხვევას, მაშინ ძალიან საინტერესო და გამოყენებად ფორმულად მივიღებთ:

$$E[E(\xi|\eta_1,\eta_2)|\eta_1] = E(\xi|\eta_1). \tag{25}$$

მაგალითი 3. ξ და η შემთხვევითი სიდიდეებისთვის ვეცადოთ ვიპოვოთ $E(\xi+\eta|\eta)$. (22) და (23) ფორმულების გამოყენებით:

$$E(\xi+\eta|\eta) = E\xi + \eta = p + \eta.$$

ეს შედეგი სხვაგვარად შეიძლება მივიღოთ, მაგალითად:

$$E(\xi+\eta|\eta) = \sum_{k=0}^{2} kP(\xi+\eta=k|\eta) = p(1-\eta) + q\eta + 2p\eta = p + \eta.$$

მაგალითი 4. ვთქვათ, მოცემული გვაქვს ξ და η შემთხვევითი სიდიდეები, რომლებიც არიან დამოუკიდებელი ერთნაირად განაწილებული შემთხვევითი სიდიდეები, მაშინ ვწერთ, რომ

$$E(\xi|\xi+\eta) = E(\eta|\xi+\eta) = \frac{\xi+\eta}{2}. \tag{26}$$

თუ დავუშვებთ, რომ ξ და η იღებს $1,2,\dots,m$ მნიშვნელობებს,მაშინ შეგვიძლია ვიპოვოთ, $(1 \le k \le m,\ \ 2 \le l \le 2m)$

$$P(\xi=k|\xi+\eta=l) = \frac{P\{\xi=k,\xi+\eta=l\}}{P\{\xi+\eta=l\}} = \frac{P\{\xi=k,\eta=l-k\}}{P\{\xi+\eta=l\}} = \frac{P\{\xi=k\}P\{\eta=l-k\}}{P\{\xi+\eta=l\}}$$
$$= \frac{P\{\eta=k\}P\{\xi=l-k\}}{P\{\xi+\eta=l\}} = P(\eta=k|\xi+\eta=l).$$

შევნიშნოთ, რომ

$$2E(\xi|\xi+\eta) = E(\xi|\xi+\eta) + E(\eta|\xi+\eta) = E(\xi+\eta|\xi+\eta) = \xi+\eta.$$

ვიცით, რომ სასრული Ω სიმრავლისთვის ყოველ $\mathcal{D}=\{D_1,\dots,D_k\}$ დაყოფას შეესაბამება Ω-ს ქვესიმრავლეების ალგებრა $\alpha(\mathcal{D})$. ამ დებულების შებრუნებული დებულებაც სამართლიანია. ანუ სასრული Ω სივრცის ქვესიმრავლეთა ყოველი ალგებრა $\mathcal{B}$ წარმოიქმნება რომელიმე $\mathcal{D}$ დაყოფით ($\mathcal{B}=\alpha(\mathcal{D})$). აქიდან გამოდის, რომ სასრული სირვცის ალგებრებსა და დაყოფებს შორის არის ურთიერთცალსახა თანაფარდობა.

ალგებრისა და σ-ალგებრის ცნებები ერთმანეთს ემთხვევა, თუ საუბარი გვაქვს სასრულ სივრცეებზე. თუ ავიღებთ, რომ $\mathcal{B}$ − რაიმე ალგებრაა, მაშინ ξ შემთხვევითი სიდიდის პირობითი მათემატიკური ლოდინი $\mathcal{B}$ ალგებრის მიმართ იქნება $E(\xi|\mathcal{B})$ და დაემთხვევა ξ-ს მათემატიკურ ლოდინს დაყოფის მიმართ ($E(\xi|\mathcal{D}) - \mathcal{b}$), სადაც $\mathcal{B} = a(\mathcal{D})$.

ξ-ს პირობითი დისპერსია $\mathcal{D}$ დაყოფის მიმართ, ეს არის შემთხვევითი სიდიდე შემდეგი განსაზღვრებით,

$$D(\xi|\mathcal{D}) = E[(\xi - E(\xi|\mathcal{D}))^2|\mathcal{D}].$$

§ 3. შემთხვევითი ხეტიალი. გაკოტრების ალბათობა და მონეტის აგდების თამაშის დროის საშუალო ხანგრძლივობა.

როგორც ვიცით, ბერნულის სქემისთვის დადგენილი გვაქვს ზოგიერთი ზღვარითი თეორემა, რომელიც ძალიან მნიშვნელოვანი და ფართოთ გამოყენებადია. ეს ზღვარითი თეორემები სამართლიანი როგორც დამოუკიდებელი ბერნულის შემთხვევითი სიდიდეებისთვის $\xi_1, \xi_2, \ldots$, რომელიც მხოლოდ ორ მნიშვნელობას იღებს, არამედ უფრო ზოგადი ბუნების სიდიდეებისთვისაც. შეგვიძლია დავასკვნათ, რომ ბერნულის სქემა არის უნივერსალური და მარტივად გამოყენებადი სქემა, რომელმაც დიდი როლი ითამაშა ალბათობის თეორიის განვითარებაში.

განვიხილოთ კლასიკური ბერნულის სქემა $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, სადაც $\Omega = \{\varpi : \varpi = (x_1, \ldots, x_n),\ x_1 = \pm 1\}$, ასევე, $\mathcal{A}$ არის Ω-ს ყველა ქვესიმრავლეთა სისტემა და $P(\{\varpi\}) = p^{v(\varpi)} q^{n-v(\varpi)},\ v(\varpi) = \frac{\sum x_i + n}{2}$. ვთქვათ, $\xi_i(\varpi) = x_i, i = 1, \ldots, n$. მიმდევრობა $\xi_1, \ldots, \xi_n$ შეგვიძლია ჩავთვალოთ ბერნულის დამოუკიდებელი შემთხვევითი სიდიდეების მიმდევრობად:

$$P\{\xi_i = 1\} = p,\ \ P\{\xi_i = -1\} = q,\quad p + q = 1.$$

ვთქვათ, $S_0 = 0,\ \ S_k = \xi_1 + \cdots + \xi_k,\quad 1 \le k \le n.$ მიმდევრობა $(S_k)_{k \le n}$ შეიძლება განვიხილოთ, როგორც ნულიდან გამომავალი რაიმე წერტილის შემთხვევითი ხეტიალის ტრაექტორია. ასევე, $S_{k+1} = S_k + \xi_{k+1}$, ეს იმას ნიშნავს, რომ თუ k მომენტში ეს წერტილი იმყოფება S_k წერტილში, მაშინ $k + 1$ მომენტში ეს წერტილი გადავა ერთეულით ზევით p ალბათობით, ან ერთეულით ქვევით q ალბათობით.

ვთქვათ, A და B რაიმე ორი მთელი რიცხვია, სადაც $A \le 0 \le B$. საინტერესოა დავაკვირდეთ და განვიხილოთ რა ალბათობით გამოვა მოხეტიალე წერტილი

(A, B) ინტერვალიდან n ნაბიჯზე. ასევე, თუ რა ალბათობით მოხდება ამ მოხეტიალე წერტილის გამოსვლა ამავე ინტერვალიდან A წერტილში ან B წერტილში.

მოვახდინოთ ამ სიტუაციის რეალიზაცია მეტი სიმარტივისთვის: ვთქვათ გვყავს ორი მოთამაშე საწყისი კაპიტალით, შესაბამისად $(-A)$ და B. თუ $\xi_i = +1$, მაშინ გამოდის, რომ მეორე მოთამაშე უხდის პირველს კაპიტალის ერთეულს, ხოლო თუ $\xi_i = -1$, მაშინ პირიქით. ანუ, $S_k = \xi_1 + \cdots + \xi_k$ შეიძლება ჩაითვალოს k სვლაზე პირველი მოთამაშის მეორესთან მოგება.

რაღაც $k \leq n$ მომენტში, როცა $S_k = B$ $(S_k = A)$ რომელიმე მოთამაშის კაპიტალი ხდება ნული, იგი კოტრდება.

შემოვიტანოთ აღნიშვნები:

დავუშვათ x იყოს რაიმე მთელი რიცხვი $[A, B]$ ინტერვალიდან. $0 \leq k \leq n$-სთვის ვთქვათ, $S_k^x = x + S_k$,

$$\tau_k^x = min\{0 \leq l \leq k;\ S_l^x = A \text{ ან} B\}, \tag{1}$$

სადაც $\tau_k^x = k,\ A < S_l^x < b$ ყოველი $0 \leq l \leq k$-სთვის.

ყოველი $0 \leq k \leq n$ -სა და $x \in [A, B] -$ თვის გვაქვს τ_k^x მომენტი, რომელიც ცნობილია გაჩერების მომენტის სახელწოდებით. ის მთელმნიშვნელობიანი შემთხვევითი სიდიდეა, რომელიც განსაზღვრულია ელემენტარულ ხდომილებათა Ω სივრცეზე.

ყველა $l < k$ -თვის, $\{\varpi: \tau_k^x = l\}$ არის ხდომილება, რომლის მიხედვითაც, ნულოვან მომენტში x წერტილიდან დაწყებული შემთხვევითი ხეტიალი $\{S_i^x, 0 \leq i \leq k\}$ გამოვა (A, B) ინტერვალიდან l მომენტში. $l \leq k$ -თვის სიმრავლეებს $\{\varpi: \tau_k^x = l, S_l^x = A\}$ და $\{\varpi: \tau_k^x = l, S_l^x = B\}$ აქვთ მოხეტიალე ნაწილაკი, რომელიც გამოვა (A, B) ინტერვალიდან l მომენტში, A და B წერტილებში.

ყველა $0 \leq k \leq n$ -თვის

$$\mathcal{A}_k^x = \sum_{0 \leq l \leq k} \{\varpi: \tau_k^x = l, S_l^x = A\}$$

$$\mathcal{B}_k^x = \sum_{0 \leq l \leq k} \{\varpi: \tau_k^x = l, S_l^x = A\} \tag{2}$$

ვთქვათ,

$$\alpha_k(x) = P(\mathcal{A}_k^x), \quad \beta_x(x) = P(\mathcal{B}_k^x)$$

არის ზემოთაღნიშნული მოხეტიალე წერტილის, იგივე ნაწილაკის (A, B) ინტერვალიდან გამოსვლის ალბათობები $[0, k]$ დროში, A და B წერტილში. ამ ალბათობებისთვის გვაქვს რეკურენტული დამოკიდებულებები.

$$\alpha_1(x), \dots, \alpha_n(x) \text{ და } \beta_1(x), \dots, \beta_n(x).$$

ახლა ვთქვათ, $A < x < B$. შევნიშნოთ, რომ $\alpha_0(x) = \beta_0(x) = 0$. თუ $1 \leq k \leq n$. მაშინ

$$\beta_k(x) = P(\mathcal{B}_k^x) = P(\mathcal{B}_k^x | S_1^x = x+1) P\{\xi_1 = 1\} + P(\mathcal{B}_k^x | S_1^x = x-1) P\{\xi_1 = -1\}$$
$$= pP(\mathcal{B}_k^x | S_1^x = x+1) + qP(\mathcal{B}_k^x | S_1^x = x-1). \tag{3}$$

დავამტკიცოთ და ვაჩვენოთ, რომ

$$P(\mathcal{B}_k^x | S_1^x = x+1) = P\big(\mathcal{B}_{k-1}^{x+1}\big), \quad P(\mathcal{B}_k^x | S_1^x = x-1) = P\big(\mathcal{B}_{k-1}^{x-1}\big).$$

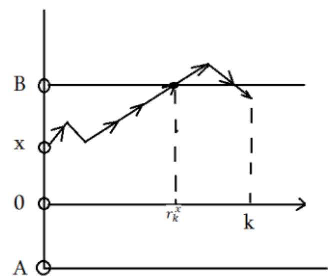
$\mathcal{B}_k^x$ სიმრავლეების წარმოდგენით

$$\mathcal{B}_k^x = \{\varpi : (x, x+\xi_1, \dots, x+\xi_1+\dots+\xi_k) \in \mathcal{B}_k^x\},$$

სადაც $\mathcal{B}_k^x$ არის ტრაექტორიების სიმრავლე:

$$(x, x+x_1, \dots, x+x_1+\dots+x_k).\, x_i = \pm 1,$$

რომელიც $[0, k]$ დროში გამოდის (A, B) ინტერვალიდან B წერტილში. (იხ. ნახ.2).



(ნახ.2.)

წარმოვადგინოთ $\mathcal{B}_k^x$ სიმრავლე: $\mathcal{B}_k^{x,x+1} + \mathcal{B}_k^{x,x-1}$, სადაც $\mathcal{B}_k^{x,x+1}$, და $\mathcal{B}_k^{x,x-1}$ ის ტრაექტორიებია $\mathcal{B}_k^x$-დან, $x_1 = +1$ და $x_1 = -1$.

ყოველი ტრაექტორია $(x, x+1, x+1+x_2, \dots, x+1+x_2+\dots+x_k)\mathcal{B}_k^{x,x+1}$-დან ურთიერთცალსახა დამოკიდებულებაშია $(x, x+1, x+1+x_2, \dots, x+1+x_2+\dots+x_k)$ ტრაექტორიასთან $\mathcal{B}_{k-1}^{x+1}$-დან. ასევე სამართლიანია ტრაექტორიებისთვის $\mathcal{B}_k^{x,x-1}$-დან. აქიდან ვპოულობთ, რომ

$$P(\mathcal{B}_k^x|S_1^x = x+1) = P(\mathcal{B}_k^x|\xi_1 = 1) = P\left((x, x+\xi_1, \dots, x+\xi_1+\dots+\xi_k) \in \mathcal{B}_k^k \middle| \xi_1 = 1\right)$$
$$= P\{(x+1, x+1+\xi_2, \dots, x+1+\xi_2+\dots+\xi_k) \in \mathcal{B}_{k-1}^{x+1}\}$$
$$= P\{(x+1, x+1+\xi_1, \dots, x+1+\xi_1+\dots+\xi_{k-1}) \in \mathcal{B}_{k-1}^{x+1}\} = P(\mathcal{B}_{k-1}^{x+1}).$$

ასევე,

$$P(\mathcal{B}_k^x|S_1^x = x-1) = P(\mathcal{B}_{k-1}^{x-1}).$$

$x \in (A, B)$-თვის და $k \le n$-თვის

$$\beta_k(x) = p\beta_{k-1}(x+1) + q\beta_{k-1}(x-1), \tag{4}$$

სადაც

$$\beta_1(B) = 1, \qquad \beta_1(A) = 0, \qquad 0 \le l \le n. \tag{5}$$

იგივენაირად,

$$\alpha_k(x) = p\alpha_{k-1}(x+1) + q\alpha_{k-1}(x-1), \tag{6}$$

სადაც

$$\alpha_l(A) = 1, \;\; \alpha_l(B) = 0, \qquad 0 \le l \le n.$$

რადგან $\alpha_0(x) = \beta_0(x) = 0, \quad x \in (A, B),$ ამიტომ ეს რეკურენტული დამოკიდებულებები შეიძლება გამოვიყენოთ $\alpha_1(x), \dots, \alpha_n(x)$ და $\beta_1(x), \dots, \beta_n(x)$ ალბათობების პოვნისთვის.

შევნიშნოთ, რომ რადგან $\mathcal{B}_{k-1}^x \subset \mathcal{B}_k^x, \quad k \le n$, ამიტომ $\beta_{k-1}(x) \le \beta_k(x) \le 1$. საკმარისად დიდი n-ებისთვის გვექნება რომ $\beta_n(x)$ ალბათობა ახლოსაა შემდეგი განტოლების $\beta(x)$ ამონახსნთან:

$$\beta(x) = p\beta(x+1) + q\beta(x-1) \tag{7}$$

შემდეგი სასაზღვრო პირობით

$$\beta(B) = 1, \qquad \beta(A) = 0, \tag{8}$$

(მოცემული სასაზღვრო პირობები მიიღება მარტივი ზღვარითი გადასვლებით (4) დან (5) ში.)

(7) და (8) ამოხსნისთვის ვთქვათ, რომ $p \neq q$. ამ განტოლებას აქვს ორი კერძო ამონახსნი - a და $b(q/p)^x$, a და b მუდმივებია. ამიტომ ზოგადი ამონახსნი $\beta(x)$ ჩავწეროთ შემდეგი სახით:

$$\beta(x) = a + b(q/p)^x \tag{9}$$

ფორმულებიდან ვპოულობთ, რომ ყველა $A \leq x \leq B$ - თვის

$$\beta(x) = \frac{(q/p)^x - (q/p)^A}{(q/p)^B - (q/p)^A} \tag{10}$$

ახლა უნდა ვაჩვენოთ ამ ამონახსნის ერთადერთობა. ამისთვის, საკმარისია (7) და (8) ამოცანის ყველა ამონახსნი წარმოვადგინოთ (9) სახით.

ვთქვათ, $\bar{\beta}(x)$ რაიმე ამონახსნია პირობით $\bar{\beta}(A) = 0$, $\bar{\beta}(B) = 1$. შეგვიძლია ვიპოვოთ ისეთი $\bar{a}$ და $\bar{b}$ მუდმივები, რომ

$$\bar{a} + \bar{b}(q/p)^A = \bar{\beta}(A), \qquad \bar{a} + \bar{b}(q/p)^{A+1} = \bar{\beta}(A+1).$$

მაშინ

$$\bar{\beta}(A+2) = \bar{a} + \bar{b}(q/p)^{A+2}$$

და ზოგადი სახით,

$$\bar{\beta}(x) = \bar{a} + \bar{b}(q/p)^x.$$

ამით ვაჩვენეთ რომ ამონახსნი ერთადერთია.

ანალოგიური მსჯელობით,

$$\alpha(x) = p\alpha(x+1) + q\alpha(x-1), \qquad x \in (A, B), \tag{11}$$

განტოლების ერთადერთი ამონახსნი, რომლის სასაზღვრო პირობებიცაა

$$\alpha(A) = 1, \qquad \alpha(B) = 0, \tag{12}$$

მოიცემა ფორმულით

$$\alpha(x) = \frac{(q/p)^B - (q/p)^x}{(q/p)^B - (q/p)^A}, \qquad A \leq x \leq B. \tag{13}$$

თუ $p = q = \frac{1}{2}$, მაშინ ამოცანების ერთადერთი ამონახსნები იქნება $\beta(x)$ და $\alpha(x)$

$$\beta(x) = \frac{x - A}{B - A} \tag{14}$$

და

$$\alpha(x) = \frac{B - x}{B - A}. \tag{15}$$

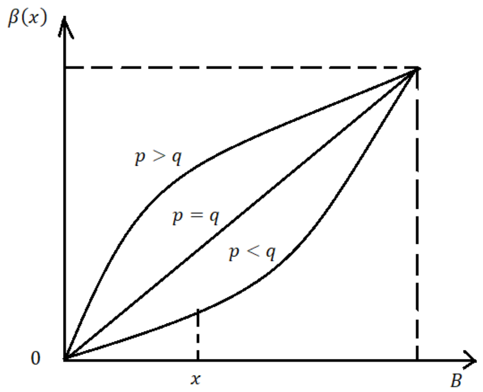
შევნიშნოთ, რომ ყოველი $0 \leq p \leq 1$-თვის

$$\alpha(x) + \beta(x) = 1. \tag{16}$$

$\alpha(x)$ და $\beta(x)$ სიდიდეები, შესაბამისად პირველი და მეორე მოთამაშის გაკოტრების ალბათობებია, როცა პირველის საწყისი კაპიტალია $x - A$, მეორის - $B - x$, სვლების უსასრულო დიდი რაოდენობის დროს. ანუ არსებობს ბერნულის დამოუკიდებელი შემთხვევითი სიდიდეების უსასრულო $\xi_1, \xi_2, \dots$ მიმდევრობა, სადაც $\xi_i = +1$ - პირველი მოთამაშის მოგება, ხოლო $\xi_i = -1$ - პირველი მოთამაშის წაგება.

თუ $A = 0, 0 \leq x \leq B$, მაშინ $\beta(x)$ ფუნქცია შეგვიძლია ჩავთვალოთ იმის ალბათობად, რომ x -დან გამოსული ნაწილაკი უფრო მალე მივა B წერტილში, ვიდრე 0 წერტილში. ფორმულებიდან ვიღებთ (იხ. ნახ. 3.), რომ

$$\beta(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{B}, & p = q = \dfrac{1}{2}, \\ \dfrac{(q/p)^x - 1}{(q/p)^B - 1}, & p \neq q \ . \end{cases} \tag{17}$$



(ნახ.3.)

დავუშვათ, რომ სამართლიანია უტოლობა $q > p$, ანუ პირველი მოთამაშისთვის თამაში არახელსაყრელია. გაკოტრების ზღვარითი ალბათობა $\alpha = \alpha(0)$ ჩაიწერება ფორმულით

$$\alpha = \frac{(\frac{q}{p})^B - 1}{(\frac{q}{p})^B - (\frac{q}{p})^A}.$$

თამაშის პირობების შეცვლის შემდეგ ჩავთვალოთ, რომ მოთამაშეთა კაპიტალები უწინდებურად ტოლია $(-A)$ და B-სი, მაგრამ ყოველი მოთამაშის გადასახადი ახლა უკვე ½-ის ტოლია. ანუ დავუშვათ რომ ახლა $P\left\{\xi_i = \frac{1}{2}\right\} = p, P\left\{\xi_i = -\frac{1}{2}\right\} = q$. პირველი მოთამაშის გაკოტრების ზღვარითი ალბათობა აღვნიშნოთ $\alpha_{1/2} - ით$. მაშინ

$$\alpha_{1/2} = \frac{(\frac{q}{p})^{2B} - 1}{(\frac{q}{p})^{2B} - (\frac{q}{p})^{2A}},$$

და

$$\alpha_{1/2} = \alpha \cdot \frac{\left(\frac{q}{p}\right)^{B} + 1}{\left(\frac{q}{p}\right)^{B} + \left(\frac{q}{p}\right)^{A}} > \alpha,$$

თუ $q > p$.

დასკვნა: თუ პირველი მოთამაშისთვის თამაში არახელსაყრელია, მაშინ ფსონის ორჯერ გაზრდით შეგვიძლია შევამციროთ მისი გაკოტრების ალბათობა.

განვიხილოდ, $\alpha_n(x)$ და $\beta_n(x)$ როგორ იკრიბება ზღვარითი მნიშვნელობებისკენ $\alpha(x)$ და $\beta(x)$.

თუ $x = 0$ მაშინ აღვნიშნოთ, რომ

$$\alpha_n = \alpha_n(0), \quad \beta_n = \beta_n(0), \quad \gamma_n = 1 - (\alpha_n + \beta_n).$$

ცხადია

$$\gamma_n = P\{A < S_k < B, \quad 0 \le k \le n\},$$

სადაც $\{A < S_k < B, \ \ 0 \le k \le n\}$ აღვნიშნავს ხდომილებას

$$\bigcap_{0 \le k \le n} \{A < S_k < B\}.$$

ვთქვათ, $n = rm$, სადაც r და m მთელი რიცხვებია და

$$\zeta_1 = \xi_1 + \dots + \xi_m,$$

$$\zeta_2 = \xi_{m+1} + \dots + \xi_{2m},$$

……………………..

$$\zeta_r = \xi_{m(r-1)+1} + \dots + \xi_{rm}.$$

მაშინ, თუ $C = |A| + B$,

$$\{A < S_k < B, \quad 1 \le k \le rm\} \subseteq \begin{Bmatrix} |\zeta_1| < C, \dots, \\ |\zeta_r| < C \end{Bmatrix},$$

და, $\zeta_1, \dots, \zeta_r$ სიდიდეების დამოუკიდებლობის და ერთნაირი განაწილების გამოყენებით,

$$\gamma_n \le P\left\{\begin{matrix}|\zeta_1| < C, \dots,\\ |\zeta_r| < C\end{matrix}\right\} = \prod_{i=1}^{r} P\{|\zeta_i| < C\} = (P\{|\zeta_1| < C\})^r \tag{18}$$

$D\zeta_1 = m[1-(p-q)^2]$. ანუ, როცა $0 < p < 1$, საკმარისად დიდი m-ებისთვის

$$P\{|\zeta_1| < C\} \le \varepsilon_1, \tag{19}$$

სადაც, $\varepsilon_1 < 1$, თუ $P\{|\zeta_1| \le C\} = 1$, მაშინ $D\zeta_1 \le C^2$.

თუ $p = 0$ ან $p = 1$, საკმარისად დიდი m-ებისთვის $P\{|\zeta_1| < C\} = 0$ და მივიღეთ, რომ (19) ფორმულა სრულდება ყველა $0 \le p \le 1$-თვის.

ასევე, საკმარისად დიდი n-ებისთვის

$$\gamma_n \le \varepsilon^n, \tag{20}$$

სადაც $\varepsilon = \varepsilon_1^{1/m} < 1$.

$\alpha + \beta = 1$. ამიტომ

$$(\alpha - \alpha_n) + (\beta - \beta_n) = \gamma_n$$

რადგან $\alpha \ge \alpha_n, \quad \beta \ge \beta_n$, ამიტომ

$$0 \le \alpha - \alpha_n \le \gamma_n \le \varepsilon^n,$$

$$0 \le \beta - \beta_n \le \gamma_n \le \varepsilon^n,$$

სადაც $\varepsilon < 1$.

ასეთივე შეფასებები სამართლიანია $\alpha(x) - \alpha_n(x)$ და $\beta(x) - \beta_n(x)$ სხვაობებისთვისაც.

განვიხილოთ შემთხვევითი ხეტიალის საშუალო ხანგრძლივობის საკითხი.

ვთქვათ, $m_k(x) = E\tau_k^x$ არის τ_k^x გაჩერების მომენტის მათემატიკური ლოდინი, სადაც $k \le n$. $x \in (A, B) - სთვის$ გვექნება:

$$\begin{aligned}
m_k(x) = E\tau_k^x = \sum\nolimits_{1 \le l \le k} lP\{\tau_k^x = l\} &= \sum_{1 \le l \le k} l\lfloor pP(\tau_k^x = l|\xi_1 = 1) + qP(\tau_k^x = l|\xi_1 = -1)\rfloor \\
&= \sum_{1 \le l \le k} l\lfloor pP(\tau_{k-1}^{x+1} = l-1) + qP(\tau_{k-1}^{x-1} = l-1)\rfloor \\
&= \sum_{0 \le l \le k-1} (l+1)\lfloor pP\{\tau_{k-1}^{x+1} = l\} + qP\{\tau_{k-1}^{x-1} = l\}\rfloor = pm_{k-1}(x+1) + qm_{k-1}(x-1) \\
&+ \sum_{0 \le l \le k-1} \lfloor pP\{\tau_{k-1}^{x+1} = l\} + qP\{\tau_{k-1}^{x-1} = l\}\rfloor = pm_{k-1}(x+1) + qm_{k-1}(x-1) + 1.
\end{aligned}$$

$x \in (A, B)$ და $0 \leq k \leq n$-თვის $m_k(x)$ აკმაყოფილებს რეკურენტულ განტოლებებს, სადაც $m_k(x)$ ფუნქციაა:

$$m_k(x) = 1 + pm_{k-1}(x+1) + qm_{k-1}(x-1), \tag{21}$$

$m_0(x) = 0$. ანუ,

$$m_k(A) = m_k(B) = 0 \tag{22}$$

შეგვიძლია ვიპოვოთ $m_1(x), \dots, m_n(x)$. თუ $m_k(x) \leq m_{k+1}(x)$, მაშინ არსებობს ზღვარი

$$m(x) = \lim_{n\to\infty} m_n(x),$$

და აკმაყოფილებს განტოლებას

$$m(x) = 1 + pm(x+1) + qm(x-1) \tag{23}$$

სასაზღვრო პირობით

$$m(A) = m(B) = 0. \tag{24}$$

განტოლების ამონახსნის საპოვნელად ჩავთვალოთ, რომ

$$m(x) < \infty, \qquad x \in (A, B). \tag{25}$$

თუ $p \neq q$, მაშინ $\frac{x}{q-p}$ კერძო ამონახსნია, ხოლო ამონახსნის ზოგადი სახე ჩაიწერება შემდეგნაირად:

$$m(x) = \frac{x}{p-q} + a + b(\frac{q}{p})^x.$$

$m(A) = m(B) = 0$ სასაზღვრო პირობებს თუ გავითვალისწინებთ, მაშინ

$$m(x) = \frac{1}{p-q}[B\beta(x) + A\alpha(x) - x], \tag{26}$$

თუკი $p = q = \frac{1}{2}$, მაშინ (23) განტოლებას აქვს ზოგადი ამონახსნი შემდეგი სახით:

$$m(x) = a + bx - x^2$$

და $m(A) = m(B) = 0$, ამიტომ

$$m(x) = (B-x)(x-A). \tag{27}$$

ანუ თუ მოთამაშეების საწყისი კაპიტალია $(B = -A)$, მაშინ

$$m(0) = B^2.$$

ვთქვათ B=10 და თანაშის ყოველი სვლა ხორციელდება 1 წამში, მაშინ ერთ-ერთი მოთამაშის გაკოტრების საშუალო დრო არის 100წმ-ის ტოლი.

(26) და (27) ფორმულები მივიღეთ იმ დაშვებით, რომ $m(x) < \infty, x \in (A, B)$. განვიხილოთ ზოგადი შემთხვევა ანალოგიურად.

ვთქვათ, $p = q = \frac{1}{2}$. $S_0, S_1, \dots, S_n$ და $\tau_n = \tau_n^0$ -ს დავუკავშიროთ შემთხვევითი სიდიდე $S_{\tau_n} = S_{\tau_n}(\varpi)$, განსაზღვრული შემდეგნაირად:

$$S_{\tau_n}(\varpi) = \sum_{k=0}^{n} S_k(\varpi) I_{\{\tau_n = k\}}(\varpi). \tag{28}$$

S_{τ_n} არის შემთხვევითი ხეტიალის მნიშვნელობა გაჩერების τ_n მომენტში. თუ $\tau_n < n$, მაშინ $S_{\tau_n} = A$, ხოლო თუ $\tau_n = n$, მაშინ $A \leq S_{\tau_n} \leq B$.

$p = q = \frac{1}{2}$-თვის გვაქვს

$$ES_{\tau_n} = 0, \tag{29}$$

$$ES_{\tau_n}^2 = E_{\tau_n}. \tag{30}$$

q-ს და p-ს ნებისმიერობით შემთხვევაში $(p + q = 1)$*-თვის* გვაქვს, რომ

$$ES_{\tau_n} =)p - q)E_{\tau_n}, \tag{31}$$

$$E\left[S_{\tau_n} - \tau_n E\xi_1\right]^2 = D\xi_1 \cdot E\tau_n, \tag{32}$$

სადაც $E\xi_1 = p - q,\ \ D\xi = 1 - (p - q)^2$.

გვექნება:

$$\lim_{n \to \infty} m_n(0) = m(0) < \infty$$

$p = q = \frac{1}{2}$ შემთხვევაში

$$E\tau_n = ES_{\tau_n}^2 = A^2\alpha_n + B^2\beta_n + E\left[S_n^2 I_{\{A < S_n < B\}} I_{\{\tau_n = n\}}\right]$$

და ანუ $A^2\alpha_n + B^2\beta_n \leq E\tau_n \leq A^2\alpha_n + B^2\beta_n + \max(A^2, B^2) \cdot \gamma_n$.

ბოლო უტოლობისა და (20) უტოლობის გათვალისწინებით გვექნება, რომ $E\tau_n$ მათემატიკური ლოდინები იკრიბება ზღვარითი მნიშვნელობისკენ.

$$m(0) = A^2\alpha + B^2\beta = A^2 \frac{B}{B - A} - B^2 \frac{A}{B - A} = |AB|$$

ექსპონენციალურად სწრაფად, როცა $n \to \infty$.

ანალოგიური შედეგი სამართლიანია $p \neq q$ თვისაც.

$$E\tau_n \to m(0) = \frac{\alpha A + \beta B}{p - q}.$$

§ 4. **მარტინგალები. ზოგიერთი გამოყენება შემთხვევითი ხეტიალის მიმართ.**

ბერნულის შემთხვევითი სიდიდეებით $\xi_1, \dots, \xi_n$ იქმნება დამოუკიდებელი შემთხვევითი სიდიდეების მიმდევრობა.

მარტინგალებიკს თეორიას ძალიან დეტალურად არ მივყვებით, თუმცა, ამ თავში შევეხებით ძალიან მნიშვნელოვან თემებს, რომელიც დამეხმარება მთავარი საკვლევი თემის ირგვლივ. ამ თავში განვიხილავთ მხოლოდ ზოგიერთ განსაზღვრებას გაჩერების მომენტებისთვის და მის გამოყენებას ე.წ. ამორჩევის თეორემის გამოყვანისას.

ვთქვათ მოცემული გვაქვს $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ სასრული ალბათური სივრცე, და $\mathcal{D}_1 \preccurlyeq \mathcal{D}_2 \preccurlyeq \cdots \preccurlyeq \mathcal{D}_n$ არის დაყოფათა რაიმე მიმდევრობა.

შემთხვევით სიდიდეთა მიმდევრობას $\xi = (\xi_k)_{1 \le k \le n}$ ეწოდება მარტინგალი $\mathcal{D}_1 \preccurlyeq \mathcal{D}_2 \preccurlyeq \cdots \preccurlyeq \mathcal{D}_n$ დაყოფის მიმართ, თუ სრულდება:

1) ξ_k არის ზომადი $\mathcal{D}_k$-ს მიმართ.
2) $E(\xi_{k+1}|\mathcal{D}_k) = \xi_k, \quad 1 \le k \le n-1.$

თუ დაყოფათა რომელიმე სისტემის მიმართ იქმნება მარტინგალი $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ შემთხვევითი სიდიდეებით, შეგვიძლია გამოვიყენოთ ასევე ჩანაწერი

$$\xi = (\xi_k, \mathcal{D}_k)_{1 \le k \le n}. \tag{1}$$

თუ $\mathcal{D}_k$ დაფარვა წარმოიქმნება $\xi_1, \dots, \xi_n$ შემთხვევითი სიდიდეებით, ანუ

$$\mathcal{D}_k = \mathcal{D}_{\xi_1, \dots, \xi_k},$$

ხშირად არ ვამბობთ, რომ $\xi = (\xi_k, \mathcal{D}_k)$ მარტინგალია, მხოლოდ აღვნიშნავთ, რომ $\xi = (\xi_k)$ შემთხვევით სიდიდეთა მიმდევრობა ქმნის მარტინგალს.

მარტინგალების ზოგიერთი მაგალითი.

მაგალითი 1. ვთქვათ, $\eta_1, \dots, \eta_n$ არის დამოუკიდებელი ბერნულის შემთხვევითი სიდიდეები

$$P\{\eta_k = 1\} = P\{\eta_n = -1\} = \frac{1}{2},$$

$$S_k = \eta_1 + \cdots + \eta_k \text{ და } \mathcal{D}_k = \mathcal{D}_{\eta_1,\ldots,\eta_k}.$$

$\mathcal{D}_k$ დაყოფის მიმართ სტრუქტურა შემდეგნაირია:

$$\mathcal{D}_k = \{\mathcal{D}^+, \mathcal{D}^-\},$$

$$\text{სადაც } \mathcal{D}^+ = \{\varpi: \eta_1 = +1\}, \mathcal{D}^- = \{\varpi: \eta_1 = -1\},$$

$$\mathcal{D}_2 = \{\mathcal{D}^{++}, \mathcal{D}^{+-}, \mathcal{D}^{-+}, \mathcal{D}^{--}\},$$

$$\text{სადაც } \mathcal{D}^{++} = \{\varpi: \eta_1 = +1, \eta_2 = +1\}, \mathcal{D}^{--} = \{\varpi: \eta_1 = -1, \eta_2 = -1\}, \text{ და ა.შ.}$$

ასევე, $\mathcal{D}_{\eta_1,\ldots,\eta_k} = \mathcal{D}_{s_1,\ldots,s_k}$.

ახლა ვაჩვენოთ, რომ $(S_k, \mathcal{D}_k)_{1\leq k\leq n}$ მიმდევრობა ქმნის მარტინგალს.

S_k სიდიდეები $\mathcal{D}_k$-ზომადია და $E(S_{k+1}|\mathcal{D}_k) = E(S_k + \eta_{k+1}|\mathcal{D}_k) = E(S_k|\mathcal{D}_k) + E(\eta_{k+1}|\mathcal{D}_k) = S_k + E\eta_{k+1} = S_k$, -მარტინგალობის თვისება.

თუ ჩავთვლით, რომ $S_0 = 0$ და $\mathcal{D}_0 = \{\Omega\}$ ტრივიალური დაყოფაა, მაშინ $(S_k, \mathcal{D}_k)_{0\leq k\leq n}$ მიმდევრობა ქმნის მარტინგალს.

მაგალითი 2. ვთქვათ, $\eta_1, \ldots, \eta_n$ დამოუკიდებელი ბერნულის შემთხვევითი სიდიდეებია, $P\{\eta_i = 1\} = p$, $P\{\eta_i = -1\} = q$. თუ $p \neq q$, მაშინ ყოველი $\xi = (\xi_k)$ მიმდევრობა

$$\xi_k = (\frac{q}{p})^{S_k}, \qquad \xi_k = S_k - k(p-q),$$

სადაც $S_k = \eta_1 + \cdots + \eta_k$, ქმნის მარტინგალს.

მაგალითი 3. ვთქვათ, η შემთხვევითი სიდიდეა, $\mathcal{D}_1 \preccurlyeq \mathcal{D}_2 \preccurlyeq \cdots \preccurlyeq \mathcal{D}_n$ და

$$\xi_k = E(\eta|\mathcal{D}_k) \tag{2}$$

მაშინ $\xi = (\xi_k, \mathcal{D}_k)$ მიმდევრობა ქმნის მარტინგალს.

მარტინგალობა მარტივი საჩვენებელია, რადგან $E(\eta|\mathcal{D}_k)$-ს $\mathcal{D}_k$-ზომადობა ცხადია და

$$E(\xi_{k+1}|\mathcal{D}_k) = E[E(\eta|\mathcal{D}_{k+1})|\mathcal{D}_k] = E(\eta|\mathcal{D}_k) = \xi_k.$$

ასევე, თუ $\xi = (\xi_k \mathcal{D}_k)_{1\leq k\leq n}$ არის ნებისმიერი მარტინგალი, მაშინ

$$\xi_k = E(\xi_{k+1}|\mathcal{D}_k) = E[E(\xi_{k+2}|\mathcal{D}_{k+1})|\mathcal{D}_k] = E(\xi_{k+2}|\mathcal{D}_k) = \cdots = E(\xi_n|\mathcal{D}_k). \tag{3}$$

$\xi = (\xi_k, \mathcal{D}_k)_{1\leq k\leq n}$ ყველა მარტინგალის სიმრავლე დაიფარება (2) -ის მსგავსი მარტინგალებით.

მაგალითი 4. ვთქვათ, $\eta_1, \dots, \eta_n$ არის დამოუკიდებელი ერთნაირად განაწილებული შემთხვევითი სიდიდეების მიმდევრობა, სადაც $\xi_1 = \frac{S_n}{n}, \xi_2 = \frac{S_{n-1}}{n-1}, \dots \xi_k = \frac{S_{n+1-k}}{n+1-k}, \dots, \xi_n = S_1$, ქმნის მარტინგალს.

მარტივი დასანახია, რომ $\mathcal{D}_k \preccurlyeq \mathcal{D}_{k+1}$ და ξ_k არის $\mathcal{D}_k$-ზომადი. $j \le n-k-1$-თვის

$$E(\eta_j | \mathcal{D}_k) = E(\eta_1 | \mathcal{D}_k) \tag{4}$$

აქიდან

$$(n-k+1)E(\eta_1|\mathcal{D}_k) = \sum_{j=1}^{n-k+1} E(\eta_j|\mathcal{D}_k) = E(S_{n-k+1}|\mathcal{D}_k) = S_{n-k+1}.$$

ანუ

$$\xi_k = \frac{S_{n-k+1}}{n-k+1} = E(\eta_1|\mathcal{D}_k),$$

$\xi = (\xi_k, \mathcal{D}_k)$-ს მარტინგალობა დამტკიცებულია.

მაგალითი 5. ვთქვათ, $\eta_1, \dots, \eta_k$ არის დამოუკიდებელი ბერნულის შემთხვევითი სიდიდეები

$$P\{\eta_i = +1\} = P\{\eta_i = -1\} = \frac{1}{2},$$

$$S_k = \eta_1 + \dots + \eta_k.$$

A და B ისეთი მთელი რიცხვებია, რომ $A < 0 < B$, მაშინ $0 < \lambda < \frac{\pi}{2}$ - სთვის $\xi = (\xi_k, \mathcal{D}_k)$ მიმდევრობა, $\mathcal{D}_k = \mathcal{D}_{S_1,\dots,S_k}$ და

$$\xi_k = (cos\lambda)^{-k} exp\left\{i\lambda(S_k - \frac{B+A}{2})\right\} \tag{5}$$

ქმნის მარტინგალს, რომელსაც კომპლექსურ მარტინგალს ეძახიან, რადგან ნამდვილი და კომპლექსური ნაწილები არის მარტინგალები.

3. მარტინგალის განმარტებიდან - $E\xi_k$ მათემატიკური ლოდინი ერთი და იგივეა ყველა k-თვის.

$$E\xi_k = E\xi_1.$$

ეს თვისება მარტინგალებისთვის სამართლიანია თუ k მაგივრად ავიღებთ გაჩერების მომენტებს.

შემოვიტანოთ განსაზღვრება.

განსაზღვრება: $\tau = \tau(\varpi)$ შემთხვევით სიდიდეს, შემდეგი მნიშვნელობით $1,2,\dots,n$, ჰქვია გაჩერების მომენტი დაყოფის მიმართ ($\mathcal{D}_1 \preccurlyeq \mathcal{D}_2 \preccurlyeq \cdots \preccurlyeq \mathcal{D}_n$ -დაყოფა) თუ ნებისმიერ $k = 1,\dots,n$ –თვის $I_{\{\tau=k\}}(\varpi)$ შემთხვევითი სიდიდე არის $\mathcal{D}_k$-ზომადი.

თუ $\mathcal{D}_k$ დაყოფას განვიხილავთ k ნაბიჯზე დაკვირვებით წარმოქმნილ დაყოფას, მაშინ $I_{\{\tau=k\}}(\varpi)$ სიდიდის $\mathcal{D}_k$ -ზომადობა ეს იგივეა,რაც $\{\tau = k\}$ ხდომილების მოხდენა ან არმოხდენა k ნაბიჯზე დაკვირვებით.

თუ $\mathcal{B}_k = \alpha(\mathcal{D}_k)$, მაშინ $I_{\{\tau=k\}}(\varpi)$ სიდიდის $\mathcal{D}_k$-ზომადობა იგივეა, რაც დაშვება

$$\{\tau = k\} \in \mathcal{B}_k. \tag{6}$$

მომენტები τ_k^x, σ_{2n}, არის კერძო შემთხვევა შემდეგი სახის გაჩერების მომენტების:

$$\tau^A = min\{0 < k \le n: \xi_k \in A\}, \tag{7}$$

$$\sigma^A = min\{0 \le k \le n: \xi_k \in A\}$$

რომლებიც წარმოადგენს $\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_n$ მიმდევრობის მიერ A სიმრავლის მიღწევის მომენტებს.

4. თეორემა 1. ვთქვათ, $\xi = (\xi_k, \mathcal{D}_k)_{1\le k\le n}$ არის მარტინგალი და τ რაიმე გაჩერების მომენტი $(\mathcal{D}_k)_{1\le k\le n}$ დაყოფის მიმართ. მაშინ

$$E(\xi_\tau | \mathscr{b}_1) = \xi_1, \tag{8}$$

სადაც

$$\xi_\tau = \sum_{k=1}^{n} \xi_k I_{\{\tau=k\}} \tag{9}$$

$$E\xi_\tau = E\xi_1 \tag{10}$$

დამტკიცება: ვთქვათ, $D \in \mathcal{D}_1$, მაშინ შეგვიძლია ვიპოვოთ, რომ

$$E(\xi_\tau|D) = \frac{E(\xi_\tau I_D)}{P(D)}$$

$$= \frac{1}{P(D)} \sum_{l=1}^{n} E\big(\xi_l I_{\{\tau=l\}} I_D\big)$$

$$= \frac{1}{P(D)} \sum_{l=1}^{n} E\big[E(\xi_n|\mathcal{D}_l) I_{\{\tau=l\}} I_D\big]$$

$$= \frac{1}{P(D)} \sum_{l=1}^{n} E\big[E\big(\xi_n I_{\{\tau=l\}} I_D|\mathcal{D}_l\big)\big] = \frac{1}{P(D)} \sum_{l=1}^{n} E\big[(\xi_n I_{\{\tau=l\}} I_D\big] = \frac{1}{P(D)} E(\xi_n I_D)$$

$$= E(\xi_n|D),$$

ამრიგად, $E(\xi_\tau|\mathcal{D}_1) = E(\xi_n|\mathcal{D}_1) = \xi_1$.

ტოლობა $E\xi_\tau = E\xi_1$ პირდაპირ გამომდინარეობს.

შედეგი. $(S_k, \mathcal{D}_k)_{1\le k\le n}$ და ნებისმიერი τ გაჩერების მომენტისთვის სამართლიანია

$$ES_\tau = 0, \qquad ES_\tau^2 = E\tau, \tag{11}$$

რომლებიც ვალდის იგივეობების სახელითაა ცნობილი.

თეორემა 2. (ამორჩევის შესახებ). ვთქვათ, $\eta_1, \dots, \eta_n$ არის დამოუკიდებელ ერთნაირად განაწილებულ შემთხვევით სიდიდეთა მიმდევრობა, რომელიც იღებს მნიშვნელობათა სასრულ რაოდენიბას $\{0,1, \dots.\}$ სიმრავლიდან, $S_k = \eta_1 + \dots + \eta_k$, $1 \le k \le n$. მაშინ

$$P(S_k < k \text{ ყველა } 1 \le k \le n\text{-სთვის } |S_n) = (1 - \tfrac{S_n}{n})^+, \tag{12}$$

სადაც $a^+ = \max(a, 0)$.

დამტკიცება: $\{\varpi: S_n \ge n\}$ სიმრავლეზე მოყვანილი ფორმულა ცხადია. ამიტომ დავამტკიცოთ (12) შედეგებისთვის, რომელთათვისაც $S_n < n$.

განვიხილოთ მარტინგალი $\xi = (\xi_k, \mathcal{D}_k)_{1\le k\le n}$, სადაც $\xi_k = \frac{S_{n+1-k}}{n+1-k}$ და $\mathcal{D}_k = \mathcal{D}_{S_{n+1-k},\dots,S_n}$.

განვსაზღვროთ,

$$\tau = min\{1 \le k \le n: \xi_k \ge 1\},$$

და $\tau = n$ სიმრავლეზე დავუშვათ

$$\{\xi_k < 1 \text{ ყოველი } 1 \le k \le n - \text{თვის}\} = \left\{\max_{1\le l\le n} \frac{S_l}{l} < 1\right\}.$$

სიმრავლეზე $\xi_\tau = \xi_n = S_1 = 0$ და ანუ,

$$\left\{\max_{1\le l\le n}\frac{S_l}{l}<1\right\}=\left\{\max_{1\le l\le n}\frac{S_l}{l}<1,\ \ S_n<n\right\}\subseteq\{\xi_\tau=0\}. \tag{13}$$

განვიხილოთ შედეგები, სადაც $S_n<n$ და $\max\limits_{1\le l\le n}\frac{S_l}{l}\ge 1$. აღვნიშნოთ $\sigma=n+1-\tau$. შევნიშნოთ, რომ

$$\sigma=max\{1\le k\le n\colon S_k\ge k\}$$

და მაშასადამე, $\sigma<n, S_\sigma\ge\sigma$ და $S_{\sigma+1}<\sigma+1$. ამრიგად,

$\eta_{\sigma+1}=S_{\sigma+1}-S_\sigma<(\sigma+1)-\sigma=1.$ ე.ი. $\eta_{\sigma+1}=0$. ამიტომ $\sigma\le S_\sigma=S_{\sigma+1}<\sigma+1$, ამრიგად, $S_\sigma=\sigma$ და

$$\xi_\tau=\frac{S_{n+1-\tau}}{n+1-\tau}=\frac{S_\sigma}{\sigma}=1.$$

შესაბამისად,

$$\left\{\max_{1\le l\le n}\frac{S_l}{l}\ge 1,\ \ S_n<n\right\}\subseteq\{\xi_\tau=1\}. \tag{14}$$

(13) და (14)-ფორმულებიდან ვპოულობთ, რომ

$$\left\{\max_{1\le l\le n}\frac{S_l}{l}\ge 1,\quad S_n<n\right\}=\{\xi_\tau=1\}\cap\{S_n<n\}.$$

ამიტომ $\{S_n<n\}$ სიმრავლეზე

$$P\left(\max_{1\le l\le n}\frac{S_l}{l}\ge 1\middle|S_n\right)=P(\xi_\tau=1|S_n)=E(\xi_\tau|S_n),$$

სადაც ξ_τ იღებს მნიშვნელობას: 0 და 1.

შევნიშნოთ, რომ $E(\xi_\tau|S_n)=E(\xi_\tau|\mathcal{D}_1)$ და წინა თეორემის გათვალისწინებით $E(\xi_\tau|\mathcal{D}_1)=\xi_1=\frac{S_n}{n}$. მაშასადამე, $\{S_n<n\}$ სიმრავლეზე

$$P(S_k<k,\ 1\le k\le n\ თვის\,|S_n)=1-\frac{S_n}{n}.$$

ვთქვათ, $\xi_1,\dots,\xi_n$ არის დამოუკიდებელი ბერნულის შემთხვევითი სიდიდეების მიმდევრობა

$$P\{\xi_i=1\}=P\{\xi_i=-1\}=\frac{1}{2},$$

$S_k=\xi_1+\dots+\xi_n$ ხოლო a,b მთელი არაუარყოფითი რიცხვები, რომელთათვისაც $a-b>0, a+b=0$. უნდა ვაჩვენოთ, რომ

$$P(S_1 > 0, \dots, S_n > 0 | S_n = a - b) = \frac{a-b}{a+b}. \tag{15}$$

სიმეტრიის ძალით,

$$P(S_1 > 0, \dots, S_n > 0 | S_n = a - b) = P\big(S_1 < 0, \dots., S_n < 0 \big| S_n = -(a-b)\big) = P(S_1 + 1 < 1, \dots, S_n + n < n | S_n + n = n - (a-b))) = P(\eta_1 < 1, \dots, \eta_1 + \dots + \eta_n < n \big| \eta_1 + \dots + \eta_n = n - (a-b)\big) = \left[1 - \frac{n-(a-b)}{n}\right]^+ = \frac{a-b}{n} = \frac{a-b}{a+b},$$

სადაც დავუშვათ, რომ $\eta_k = \xi_k + 1$ და გამოვიყენოთ (12) ტოლობა.

(15)-დან არეკვლის პრინციპის გამოყენებით მივიღებთ, რომ $L_k(S_1 > 0, \dots, S_{k-1} > 0, S_k = a - b) = \frac{a-b}{k} C_k^a$.

ვიგულისხმოთ, რომ $\xi_i = +1$, ამით წარმოვადგინეთ არჩევნებზე A კანდიდატისთვის მიცემული ხმა, ხოლო $\xi_i = -1$ ეს როგორც B კანდიდატისთვის მიცემული ხმა. მაშინ S_k არის A და B კანდიდატებისთვის მიცემული ხმების რიცხვებს შორის სხვაობა, k ამომრჩევლის შემთხვევაში. $P(S_1 > 0, \dots, S_n > 0 | S_n = a - b)$ არის ალბათობა იმისა, რომ A კანდიდატი ყოველთვის წინ იყო B კანდიდატზე და A-მ მოაგროვა a ხმა და B-მ b ხმა, ასევე $a - b > 0, a + b = n.$ (15)-ის თანახმად, ეს ალბათობა $(a-b)/n$ -ის ტოლია.

§ 5. ფინანსური ბაზრის ბინომური მოდელი. მარტინგალობის კრიტერიუმი.

განვიხილოთ დისკრეტული ფინანსური ბაზარი $(B, S) = (B_n, S_n)$, $n = 0, 1, \dots., N$, სადაც აქტივების ფასი B და S მოცემულია შემდეგი განტოლებათა სისტემით:

$$B_n = (1 + r_n) B_{n-1}, \quad B_0 > 0, \tag{1}$$

$$S_n = (1 + \rho_n) S_{n-1}, \quad S_0 > 0, \tag{2}$$

სადაც, B_n ბანკის ანგარიში, ობლიგაცია, ურისკო ფასიანი ქაღალდი აკმაყოფილებს შემდეგს:

$$B_n = B_n^{(1)} + B_n^{(2)},$$

სადაც,

$$B_n^{(1)} = (1 + r^1) B_{n-1}^{(1)}, \tag{3}$$

$$B_n^{(2)} = (1 + r^2)B_{n-1}^{(2)}, \tag{4}$$

(3) და (4) ფორმულაში საპროცენტო განაკვეთი $r^1 > 0$ $r^2 > 0$ არის მუდმივი. (დროში არ იცვლება), ხოლო (2) ფორმულაში ρ_n არის დამოუკიდებელი, ერთნაირად განაწილებული შემთხვევით სიდიდეთა მიმდევრობა, რომელიც იღებს მხოლოდ ორ მნიშვნელობას a და b, $a < b$, შესაბამისად, ალბათობებით $p > 0$ და $1 - p$. გვაქვს შემდეგი დამოკიდებულება, რომ $a < r^{(1)} < b$, $a < r^{(2)} < b$, $B_0^1 \neq B_0^2$.

(3) და (4) ფორმულების ჩასმით შეგვიძლია განვსაზღვროთ საპროცენტო განაკვეთი

$$r_n = \frac{r^{(1)}B_{n-1}^{(1)} + r^{(2)}B_{n-1}^{(2)}}{B_{n-1}^{(1)} + B_{n-1}^{(2)}} \tag{5}$$

მოცემული დისკრეტული, ფინანსური ბაზრის მოდელში B არის ურისკო ფასიანი ქაღალდი, S არის რისკიანი ფასიანი ქაღალდი. ამბობენ, რომ სტოქასტური ბაზისი $(\Omega, \mathcal{F}, F, P)$ არის დისკრეტული, სადაც $\mathcal{F}_n = \sigma\{S_0, \dots, S_n\}$ არის მინიმალური σ-ალგებრა $S_0, \dots, S_n$ - გან წარმოქმნილი.

განვიხილოთ ორგანზომილებიანი სტოქასტური მიმდევრობა $\pi = \pi_n = (\beta_n, \gamma_n)$, სადაც γ_n არის $\mathcal{F}_{n-1}$ –ზომადი. β_n და γ_n არის შესაბამისად B და S აქტივების რაოდენობა დროის n მომენტში. წყვილს (β_n, γ_n) ჰქვია საინვესტიციო სტრატეგია, პორტფელი. პორტფელის $\pi_n = (\beta_n, \gamma_n)$ საინვესტიციო კაპიტალი არის სტოქასტური მიმდევრობა $X^\pi = (X_n^\pi)$, $n = 0,1, \dots, N$, რომელიც მოცემულია შემდეგნაირად:

$$(X_n^\pi) = \beta_n B_n + \gamma_n S_n.$$

სტრატეგიათა კლასი $\pi_n = (\beta_n, \gamma_n)$ აკმაყოფილებს შემდეგ პირობას

$$\Delta\beta_n B_{n-1} + \Delta\gamma_n S_{n-1} = 0,$$

სადაც $\Delta\beta_n = \beta_n - \beta_{n-1}$; $\Delta\gamma_n = \gamma_n - \gamma_{n-1}$. ამ პირობას ჰქვია თვითდაფინანსების პირობა და აღინიშნება SF -ით. თვითდაფინანსებადი პორტფელი $\pi_n = (\beta_n, \gamma_n)$ ადასტურებს შემდეგ წარმოდგენას

$$X_n^\pi = X_0^\pi + \sum_{k=1}^{n} (\beta_k \Delta B_k + \gamma_k \Delta S_k),$$

სადაც $\Delta B_k = B_k - B_{k-1}$, $\Delta S_k = S_k - S_{k-1}$.

თვითდაფინანსებადი პორტფელი $\pi \in SF$ არის არბიტრაჟული სტრატეგია, თუ :

(ა) $X_0^\pi = x \geq 0$,

(ბ) $X_n^{\pi}(\varpi) \geq 0$ ყველა $\varpi \in \Omega$ - თვის.

(გ) $X_n^{\pi}(\varpi) > 0$ ზოგიერთი $\varpi \in \Omega$ -თვის.

ასეთ პორტფელთა კლასს აღვნიშნავთ SF_{arb}.

განვიხილოთ P ალბათური ზომის ეკვივალენტური P^* ზომა. P^* ზომას ეწოდება მარტინგალური, ან რისკ-ნეიტრალური, თუ P^* ზომის მიმართ სტოქასტური მიმდევრობა $(S_n/B_n)_{n\leq N}$ არის მარტინგალური. ასეთი ზომების კლასი აღვნიშნოთ $\mathcal{P}^*$.

თეორემა 1. $\boldsymbol{P^*} \in \boldsymbol{\mathcal{P}^*}$ ზომის მარტინგალობის კრიტერიუმი.

ვთქვათ, (1) და (2) ბაზრის მოდელში სტოქასტური მიმდევრობა $(r_n)_{n\leq N}$ აკმაყოფილებს $r_n > -1$. მაშინ P'-ის მიმართ

$R_n = \frac{S_n}{B_n} -$ მარტინგალი $\Leftrightarrow$ $(\sum_{k=0}^{n}(\rho_k - r_k))_{n\leq N}$ - მარტინგალია.

დამტკიცება: შემოვიღოთ აღნიშვნები:

$$U_n = \sum_{k=0}^{n} r_k, \qquad V_n = \sum_{k=0}^{n} \rho_k$$

და ჩავწეროთ B_n და S_n აქტივების მნიშვნელობები სტოქასტური ექსპონენტას სახით.

$$B_n = B_0 \mathcal{E}_n(U), \qquad S_n = S_0 \mathcal{E}_n(V)$$

სადაც, სტოქასტური ექსპონენტა

$$\mathcal{E}_n(U) = \prod_{k=1}^{n}(1 + \Delta U_k), \quad \mathcal{E}_0(U) = 1,$$

$$\mathcal{E}_n(V) = \prod_{k=1}^{n}(1 + \Delta V_k), \quad \mathcal{E}_0(V) = 1.$$

სტოქასტური ექსპონენტას თვისებებიდან გამომდინარე მოცემული თეორემა შეიძლება გადავწეროთ შემდეგნაირად:

$$R_n = \frac{S_n}{B_n} = R_0 \mathcal{E}_n(V)\mathcal{E}_n^{-1}(U) = R_0 \mathcal{E}_n\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{\Delta V_k - \Delta U_k}{1 + \Delta U_k}\right)$$

აქიდან გამომდინარეობს, რომ R_n ლოკალური მარტინგალია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $\sum_{k=1}^{n}(\rho_k - r_k)$ ლოკალური მარტინგალია.

თეორემა 2. ვიგულისხმოთ, რომ (1), (2), ფინანსური ბაზრის მოდელში დეტერმინისტული მიმდევრობა $r = r_n$ ისეთია, რომ $r_n > -1,\ n \in N$. მაშინ

$$P^* \neq \emptyset \iff SF_{arb} \neq \emptyset.$$

დამტკიცება: ($\Rightarrow$) ვთქვათ, $P^* \in P^*$. მაშინ ნებისმიერ თვითდაფინანსებადი სტრატეგიისთვის , გვაქვს

$$\Delta X_n^\pi = \beta_n \Delta B_n + \gamma_n \Delta S_n$$

$$= \beta_n r_n B_{n-1} + \gamma_n \rho_n S_{n-1} = r_n X_{n-1}^\pi + \gamma_n S_{n-1}(\rho_n - r_n).$$

თავისმხრივ, U_n დეტერმინისტულია. თეორემა 1-დან, თუ $X_0^\pi = 0$, მაშინ

$$E^* X_n^\pi = \mathcal{E}_n(U) E^* X_0^\pi = 0. \quad (6)$$

დავუშვათ საწინააღმდეგო, რომ

$$SF_{arb} \neq \emptyset \quad \text{და} \quad \pi \epsilon SF_{arb}.$$

მაშინ $P \sim P^*$ ეკვივალენტობიდან გამომდინარე მივიღებთ, რომ $E^* X_N^\pi > 0$, და ეს ეწინააღმდეგება (6)-ს. ($\Rightarrow$) იმპლიკაცია დამტკიცებულია.

ახლა დავამტკიცოთ ($\Leftarrow$) .

ვთქვათ $SF_{arb} = \emptyset$. ამ ფაქტის დასამტკიცებლად უნდა დავამტკიცოთ შემდეგი ტოლობა:

$$E^* \left(\frac{S_\tau}{B_\tau} - \frac{S_0}{B_0} \right) = 0, \quad (7)$$

სადაც $\tau = \tau(\varpi)$ არის გაჩერების მომენტი $0,1,\dots,N$ მნიშვნელობებით, და $(\frac{S_n}{B_n}, \mathcal{F}_n, P^*)$ არის მარტინგალი. შეგვიძლია ავიღოთ გაჩერების მომენტად τ^* და ავაგოთ მიმდევრობა $\pi^* = (\pi_б^*)$, სადაც $E^* X_N^\pi = 0$.

ადვილი დასანახია, რომ

$$0 = E^* X_N^\pi = E^*(\beta_N^* B_N + \gamma_N^* S_N) = B_N E^* \left(\frac{S_{\tau^*}}{B_{\tau^*}} - \frac{S_0}{B_0} \right).$$

სადაც $B_N \neq 0$, ეს ამტკიცებს თეორემა 2-ს.

თეორემა 3. ფინანსური ბაზრის (1) (2) მოდელში $r_n > -1, n \in \mathcal{N}$, მაშინ ზომა

$$P^* = \frac{r_n - a}{b - a}$$

არის მარტინგალური ზომა, სადაც r_n განსაზღვრულია (5) ის მიხედვით.

დამტკიცება: გვაქვს

$$E(\rho_n - r_n) = a(1-p) + bp - r_n = (b-a)p - (r_n - a).$$

აქიდან შეგვიძლია განვსაზღვროთ P^* ზომა, როგორც

$$P^* = \frac{r_n - a}{b - a}$$

ვთქვათ, P^*იყოს ალბათური ზომა მნიშვნელობით p^*, მაშინ მარტივი დაასანახია, რომ მიმდევრობა $(m_n, \mathcal{F}_n, P^*), n \in N$ არის მარტინგალი, სადაც

$$m_n = \sum_{k=1}^{n} (\rho_k - r_k)$$

თეორემა დამტკიცებულია.

მაგალითი. განვიხილოთ ფინანსური ბაზრის (1)(2) მოდელი შემდეგი მოცემულობით: ჩვენ ვიხილავთ ორ ნაბიჯიანი პრობლემის გადაჭრის გზას ევროპული ოფციონის პირობებში.

$$B_0^1 = 30, \quad r^{(1)} = \frac{1}{5}, \quad B_0^2 = 20, \quad r^{(2)} = \frac{1}{2},$$

$$S_0 = 100, \quad a = -\frac{2}{5}, \ b = \frac{3}{5}, \ k = 100.$$

ამოხსნა: გვაქვს $N = 2, \ n = 0,1,2,$ და გადახდის ფუნქციას აქვს შემდეგი სახე

$$f_2 = f(S_2) = \max(S_2 - K, 0).$$

გამოვთვალოთ ორნაბიჯიანი ბინომური ხის პარამეტრები: მაშინ

$$1 + r^{(1)} = \frac{6}{5}, \ r_1 = \frac{8}{25}, \ p_1^* = \frac{18}{25}, \ 1 + r_1 = \frac{33}{25}:$$

$$B_1^{(1)} + B_1^{(2)} = 36 + 30 = 66 = \frac{33}{25} \cdot 50 = 66.$$

$$r_2 = \frac{37}{110}, \ 1 + r_2 = \frac{147}{110}, \ P_2^* = \frac{81}{110};$$

$$B_2^{(1)} + B_2^{(2)} = \frac{216}{5} + 45 = \frac{441}{5} = \frac{147}{110} \cdot 66 = \frac{441}{5}.$$

$$C_{10} = (1 + r_2)^{-1}[p_2^* f_{21} + (1 - p_2^*) f_{20}] = 0,$$

$$C_{11} = (1 + r_2)^{-1}[p_2^* f_{22} + (1 - p_2^*) f_{21}] = \frac{27 \cdot 156}{49},$$

$$C_2 = (1 + r_2)^{-1}[p_1^* C_{11} + (1 - p_1^*) C_{10}] = \frac{6 \cdot 27 \cdot 156}{11 \cdot 49}.$$

$n = 0$ მომენტში ავაგოთ მინიმალური ჰეჯი $\pi_1^* = (\beta_1^*, \gamma_1^*)$:

$$\beta_1^* = \frac{(1+b)C_{10} - (1+a)C_{11}}{(1+r_1)(b-a)(B_0^{(1)} + B_0^{(2)})} = -\frac{3 \cdot 81 \cdot 156 \cdot 25}{33 \cdot 50 \cdot 5 \cdot 147},$$

$$\gamma_1^* = \frac{C_{11} - C_{10}}{(b-a)S_0} = \frac{81 \cdot 156}{100 \cdot 147}.$$

აქიდან

$$X_0^{\pi^*} = \beta_1^* \left(B_0^{(1)} + B_0^{(2)}\right) + \gamma_1^* S_0 = \frac{18 \cdot 81 \cdot 156}{33 \cdot 147} = C_2.$$

$$S_0 \to S_{21} = 160.$$

$n = 1$ მომენტისთვის ავაგოთ მინიმალური ჰეჯი $\pi_2^* = (\beta_2^*, \gamma_2^*)$, ამ შემთხვევაში გვაქვს:

$$\beta_2^* = \frac{(1+b)f_{2,1} - (1+a)f_{2,2}}{(1+r_2)(b-a)(B_1^{(1)} + B_1^{(2)})} = -\frac{3 \cdot 156 \cdot 110}{66 \cdot 5 \cdot 147},$$

$$\gamma_2^* = \frac{f_{2,2} - f_{2,1}}{(b-a)S_{1,1}} = \frac{156}{160}.$$

$n = 1$ მომენტში C_{11}- თვის გვაქვს:

$$X_1^{\pi^*} = \beta_2^* \left(B_1^{(1)} + B_1^{(2)}\right) + \gamma_2^* S_{1,1} = \frac{27 \cdot 156}{49} = C_{1,1}$$

$n = 2$ მომენტში $S_{2,2}$ და $S_{2,1}$- თვის გვაქვს:

$$X_2^{\pi^*} = \beta_2^* \left(B_2^{(1)} + B_2^{(2)}\right) + \gamma_2^* S_{2,2} = 156 = f_{2,2}$$

$$X_2^{\pi^*} = \beta_2^* \left(B_2^{(1)} + B_2^{(2)}\right) + \gamma_2^* S_{2,1} = 0 = f_{2,1}.$$

ამრიგად, პრობლემა გადაჭრილია.

დ ა ს კ ვ ნ ა

მარტინგალების თეორია და მისი გამოყენება ერთ-ერთი ყველაზე მნიშვნელოვანია შემთხევითი პროცესების (მიმდევრობების) ზოგად თეორიაში. თანამედროვე საბაზრო ეკონომიკაში დიდი ნაწილი უჭირავს ფასიან ქაღალდებს, როგორიცაა აქციები, ობლიგაციები, და მასთან დაკავშირებულ პრობლემებს. ამ პრობლემების შესწავლასა და გადაჭრაში გვეხმარება სტოქასტური ფინანსური მათემატიკა. ნაშრომში წარმოდგენილია მარტინგალების თეორიასთან დაკავშირებული საკითხები დისკრეტულ დროში და ასევე მათი გამოყენებები ფინანსურ მათემატიკაში. ნაშრომი შედგება შესავლისგან, 5 პარაგრაფისგან და გამოყენებული ლიტერატურისგან. ნაშრომში წარმოდგენილია დამოუკიდებელ ცდათა ბერნულის სქემა, დიდ რიცხვთა კანონი და ზოგიერთი ზღვარითი თეორემა. განხილულია პირობითი მათემატიკური ლოდინი სასრული დაყოფის მიმართ. მმოყვანილია შემთხვევითი ხეტიალის განმარტება, ასევე, გამოთვლილია ორი მოთამაშის შემთხვევაში გაკონტრების ალბათობა და თამაშის დროის საშუალო ხანგრძლივობა. ნაშრომში ასევე განმარტებულია მარტინგალი სასრული დაყოფის მიმართ, ნაჩვენები და განხილულია მაგალითები და ზოგიერთი გამოყენება. ნაშრომის დასკვნით ნაწილში, განხილულია ფინანსური ბაზრის ერთი დისკრეტული მოდელი, რომელიც ორი ობლიგაციისგან და ერთი აქციისგან შედგება. აგებულია დროზე დამოკიდებული საპროცენტო განაკვეთი და შესაბამისი მარტინგალური ზომა. დადგენილია კავშირი ზომის მარტინგალობასა და ფინანსური ბაზრის არბიტრაჟულობას შორის. მოყვანილია ევროპული ოფციონის ფასდადების ორნაბიჯიანი საილუსტრაციო რიცხვითი მაგალითი.

გ ა მ ო ყ ე ნ ე ბ უ ლ ი   ლ ი ტ ე რ ა ტ უ რ ა

[1] А.Н. Ширяев, Вероятность-1 (Елементарная теория вероятностей, Математические основания. Предельные теоремы). Издание третье, переработанное и дополненное, Москва, Издательство МЦНМО, 2014.

[2] მელნიკოვი ა. ფინანსური ბაზრები. სტოქასტური ანალიზი და წარმოებული ფასიანი ქაღალდების შეფასება. მოსკოვი, ტვპ სამეცნიერო გამომცემლობა, 1997, 1-125.

[3] Cox J., Ross R., Rubinstein M. (1979) Journal of Financial Economics. 7, 3: 229-263.

[4] Roll R., Ross R. (1980) Journal of Finance. 35: 1073-1103.