ივანე ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტი

ზუსტ და საბუნებისმეტყველო მეცნიერებათა ფაკულტეტი

თამარ ფაიქიძე

ერთი არაწრფივი ინტეგრო-დიფერენციალური მოდელის გამოკვლევა და რიცხვითი ამოხსნა

გამოყენებითი მათემატიკის სამაგისტრო პროგრამა

მაგისტრის აკადემიური ხარისხის მოსაპოვებლად

მათემატიკის დეპარტამენტი

რიცხვითი ანალიზისა და გამოთვლითი ტექნოლოგიების კათედრა

ხელმძღვანელი - თემურ ჯანგველაძე

ფიზ.-მათ. მეცნიერებათა დოქტორი

პროფესორი

თბილისი 2022

სარჩევი

ანოტაცია

გამოყენებით მათემტიკაში ერთ-ერთი მნიშვნელოვანია პრაქტიკული ამოცანების მათემატიკური მოდელირება. ხოლო შემდეგ თანამედროვე პროგრამული პაკეტების საშუალებით მათი გამოკვლევა და რიცხვითი ამოხსნა. ამგვარ ამოცანებს მიეკუთვნება ელექტრომაგნიტური ველის დიფუზიის პროცესები ისეთ გარემოში, რომლის ელექტროგამტარობის კოეფიციენტიც არსებითად არის დამოკიდებული ტემპერატურაზე. ამ პროცესებს თან სდევს სითბოს გამოყოფა, რაც თავის მხრივ ცვლის გარემოს გამტარიანობას და გავლენას ახდენს დიფუზიის პროცესზე.

აქ წარმოშობილი მოდელები არაწრფივია, რაც ართულებს მათთვის დასმული საწყის-სასაზღვრო ამოცანების შესწავლას. გარკვეულ დაშვებებში მაქსველის შესაბამისი განტოლებათა სისტემა შესაძლებელია რედუცირებულ იქნას არაწრფივ პარაბოლური ტიპის ინტეგრო-დიფერენციალურ მოდელებზე.

სამაგისტრო ნაშრომში განხილულია მეოთხე რიგის ერთი არაწრფივი ინტეგრო-დიფერენციალური განტოლება და განტოლებათა სისტემა. მათთვის შესწავლილია საწყის-სასაზღვრო ამოცანების ამონახსნების მდგრადობისა და ერთადერთობის საკითხები. სისტემისათვის აგებულია სხვაობიანი სქემა. ჩატარებულია რიცხვითი ექსპერიმენტები და მოყვანილია მიღებული შედეგების ანალიზი.

Abstract

Mathematical modeling of practical problems and then investigation and numerical solution of those models, through modern programming packages, is one of the most important issues in applied mathematics. Such problems include electromagnetic field diffusion processes in a medium whose electrical conductivity coefficient essentially depends on temperature. These processes are accompanied by the release of heat, which in turn changes the permeability of the medium and affects the diffusion process.

The models generated in the area are non-linear that makes it difficult to study the initial-boundary problems posed to them. Under certain assumptions, the system of Maxwell's equations can be reduced to non-linear parabolic integro-differential models.

In the master's thesis one non-linear integro-differential equation of the fourth order and a system of equations are examined. For them, the issues of stability and uniqueness of solutions of initial-boundary problems are studied. A difference scheme for the system is constructed. Numerical experiments are carried out and analysis of the obtained results is given.

შესავალი

მრავალი პროცესის მათემატიკური აღწერა ხორციელდება ინტეგრო-დიფერენციალური განტოლებებით (იხ. მაგალითად, [1, 3 – 6, 8 - 13, 15, 16, 19, 20, 22, 25 – 29] და მათში მოყვანილი ლიტერატურული მითითებები). მათი გამოკვლევა კერძოწარმოებულებიან განტოლებებზე შედარებით გვიან დაიწყო (იხ. მაგალითად, [2, 6, 7, 10, 13, 14, 17, 18, 22, 30, 31] და მათში მოყვანილი ლიტერატურული მითითებები).

სხვადასხვა სახის არაწრფივი ინტეგრო-დიფერენციალური განტოლებები შეისწავლება მრავალ ნაშრომში (იხ. მაგალითად, (იხ. მაგალითად, [2, 6, 7, 10, 13, 14, 17, 18, 22, 30, 31] და მათში მოყვანილი ლიტერატურული მითითებები). განსახილველი ინტეგრო-დიფერენციალური მოდელები პირველად შემოთავაზებულ იქნა [8] სტატიაში. აღნიშნული მოდელები წარმოიშვნენ რეალური დიფუზიური პროცესების აღწერისას [14], ასევე არაწრფივი პარაბოლური ტიპის ცნობილი განტოლებების განზოგადებისას, რომელთა შესწავლას მიეძღვნა მრავალი სამეცნიერო ნაშრომი (იხ. მაგალითად, [13, 17] და მათში მოყვანილი ლიტერატურული მითითებები). დასმული განტოლებების და განტოლებათა სისტემების ძირითადი თავისებურება მდგომარეობს იმაში, რომ არაწრფივი კოეფიციენტები გვხვდება მაღალი რიგის წარმოებულებთან ერთად, რომლებიც დამოკიდებულია უცნობი ფუნქციებსა და მათი წარმოებულებიდან აღებულ ინტეგრალებზე სივრცითი და დროითი ცვლადების მიმართ.

სამაგისტრო ნაშრომის მიზანი იყო ინტეგრო-დიფერენციალური განტოლებათა მეოთხე რიგის ერთი არაწრფივი პარაბოლური ინტეგრო-დიფერენციალური განტოლებისა და განტოლებათა სისტემისთვის საწყის-სასაზღვრო ამოცანების განხილვა, მათთვის ამონახსნის მდგრადობისა და ერთადერთობის ჩვენება. სისტემისთვის სხვაობიანი სქემის აგება. მისი გამოყენებით რიცხვითი ექსპერიმენტების ჩატარება და მიღებული შედეგების ანალიზი.

პირველი თავის მიზანია გაგვაცნოს მეოთხე რიგის ერთი არაწრფივი პარაბოლური ინტეგრო-დიფერენციალური განტოლების საწყის-სასაზღვრო ამოცანა ამონახსნის მდგრადობა და ერთადერთობა.

მეორე თავში განხილულია მეოთხე რიგის ანალოგიური არაწრფივი პარაბოლური ინტეგრო-დიფერენციალური განტოლებათა სისტემის საწყის-სასაზღვრო ამოცანა. აქაც ნაჩვენებია ამოცანის ამონახსნის მდგრადობა და ერთადერთობა.

მესამე თავში აგებულია, მეორე თავში განხილული ამოცანის შესაბამისი, სხვაობიანი სქემა, ჩატარებულია რიცხვითი ექსპერიმენტები და ნაჩვენებია რიცხვითი ექსპერიმენტების შედეგები.

თავი I. მეოთხე რიგის ერთი არაწრფივი პარაბოლური ინტეგრო-დიფერენციალური განტოლების საწყის-სასაზღვრო ამოცანისათვის ამონახსნის მდგრადობა და ერთადერთობა

§1. მეოთხე რიგის განტოლების საწყის-სასაზღვრო ამოცანისათვის ამონახსნის მდგრადობა

მართკუთხედში $Q_T = [0,1] \times [0,T]$, სადაც T დადებითი რიცხვია, განვიხილოთ შემდეგი საწყის-სასაზღვრო ამოცანა:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left\{\left[1 + \int_0^t \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)^2 d\tau\right]\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right\} = f(x,t), \tag{1.1.1}$$

$$u(x,0) = u_0(x), \tag{1.1.2}$$

$$u(0,t) = u(1,t) = 0, \tag{1.1.3}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = \frac{\partial u}{\partial x}(1,t) = 0. \tag{1.1.4}$$

სადაც f და u_0 მოცემული ფუნქციებია.

ვაჩვენოთ რომ (1.1.1) – (1.1.4) ამოცანის ამონახსნი მდგრადია $f(x,t)$ მარჯვენა მხარის და $u_0(x)$ საწყისი პირობის მიმართ.

თუ გავამრავლებთ (1.1.1) განტოლებას u ფუნქციაზე და ვაინტეგრებთ $[0,1]$ შუალედზე, გვექნება

$$\int_0^1 \frac{\partial u}{\partial t} u\, dx + \int_0^1 \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left\{\left[1 + \int_0^t \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)^2 d\tau\right]\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right\} u dx = \int_0^1 f(x,t) u\, dx.$$

ტოლობის მარცხენა მხარის მეორე წევრისთვის გამოვიყენოთ ნაწილობითი ინტეგრების ფორმულა და (1.1.3) სასაზღვრო პირობა

$$\int_0^1 \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left\{\left[1 + \int_0^t \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)^2 d\tau\right]\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right\} u dx$$

$$= \left(\frac{\partial}{\partial x}\left\{\left[1 + \int_0^t \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)^2 d\tau\right]\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right\} u\right)\Bigg|_0^1$$

$$-\int_0^1 \frac{\partial}{\partial x}\left\{\left[1+\int_0^t \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)^2 d\tau\right]\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right\}\frac{\partial u}{\partial x}dx$$

$$=\frac{\partial}{\partial x}\left\{\left[1+\int_0^t \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(1,t)\right)^2 d\tau\right]\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(1,t)\right\}u(1,t)$$

$$-\frac{\partial}{\partial x}\left\{\left[1+\int_0^t \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(0,t)\right)^2 d\tau\right]\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(0,t)\right\}u(0,t)$$

$$-\int_0^1 \frac{\partial}{\partial x}\left\{\left[1+\int_0^t \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)^2 d\tau\right]\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right\}\frac{\partial u}{\partial x}dx$$

$$=-\int_0^1 \frac{\partial}{\partial x}\left\{\left[1+\int_0^t \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)^2 d\tau\right]\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right\}\frac{\partial u}{\partial x}dx.$$

გვექნება

$$\frac{1}{2}\int_0^1 \frac{\partial u^2}{\partial t}dx-\int_0^1 \frac{\partial}{\partial x}\left\{\left[1+\int_0^t \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)^2 d\tau\right]\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right\}\frac{\partial u}{\partial x}dx=\int_0^1 f(x,t)u\,dx\,.$$

მიღებული ტოლობის მარცხენა მხარის მეორე შესაკრებისთვის კვლავ გამოვიყენოთ ნაწილობითი ინტეგრების ფორმულა და (1.1.4) სასაზღვრო პირობა

$$\int_0^1 \frac{\partial}{\partial x}\left\{\left[1+\int_0^t \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)^2 d\tau\right]\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right\}\frac{\partial u}{\partial x}dx=$$

$$=\left(\left(\left[1+\int_0^t \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)^2 d\tau\right]\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)\frac{\partial u}{\partial x}\right)\Bigg|_0^1-\int_0^1 \left[1+\int_0^t \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)^2 d\tau\right]\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}dx$$

$$=\left[1+\int_0^t \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(1,t)\right)^2 d\tau\right]\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(1,t)\frac{\partial u}{\partial x}(1,t)$$

$$-\left[1+\int_0^t \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(0,t)\right)^2 d\tau\right]\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(0,t)\frac{\partial u}{\partial x}(0,t)-\int_0^1 \left\{\left[1+\int_0^t \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)^2 d\tau\right]\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right\}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}dx$$

$$=\int_0^1 \left\{\left[1+\int_0^t \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)^2 d\tau\right]\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right\}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}dx.$$

გვექნება

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u\|^2+\int_0^1\left\{\left[1+\int_0^t\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)^2 d\tau\right]\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right\}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}dx=\int_0^1 f(x,t)u\,dx\,.$$

მიღებულ ტოლობის მარცხენა მხარის მეორე შესაკრებში დადებითი წევრი

$$\int_0^t\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)^2 d\tau$$

უგულებელვყოთ და მარჯვენა მხარეში გამოვიყენოთ უმარტივესი $ab\leq\frac{1}{2}a^2+\frac{1}{2}b^2$ თანაფარდობა, მივიღებთ

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u\|^2+\int_0^1\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)^2 dx\leq\frac{1}{2}\int_0^1 f^2\,dx+\frac{1}{2}\int_0^1 u^2\,dx.$$

პუანკარე-ფრიდრიხსის უტოლობის []

$$\int_0^1 u^2dx\leq\int_0^1\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 dx\leq\int_0^1\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)^2 dx$$

გამოყენებით გვექნება

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u\|^2+\int_0^1\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)^2 dx\leq\frac{1}{2}\int_0^1 f^2\,dx+\frac{1}{2}\int_0^1\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)^2 dx.$$

აქედან

$$\frac{d}{dt}\|u\|^2+\left\|\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right\|^2\leq\|f\|^2.$$

მიღებული უტოლობა ვაინტეგროთ t ცვლადით და (1.1.4) საწყისი პირობის გათვალის-წინებით გვექნება:

$$\|u(t)\|^2+\int_0^t\left\|\frac{\partial^2 u(\tau)}{\partial x^2}\right\|^2 d\tau\leq\int_0^t\|f(\tau)\|^2 d\tau+\|u_0\|^2.$$

თუ უტოლობის არაუარყოფით წევრს

$$\int_0^t \left\|\frac{\partial^2 u(\tau)}{\partial x^2}\right\|^2 d\tau$$

უგულებელვყოფთ, მივიღებთ შეფასებას

$$\|u(t)\|^2 \le \int_0^t \|f(\tau)\|^2 d\tau + \|u_0\|^2.$$

მიღებული შეფასება ამტკიცებს (1.1.1) - (1.1.4) ამოცანის ამონახსნის მდგრადობას $f(x,t)$ მარჯვენა მხარის და $u_0(x)$ საწყისი პირობის მიმართ.

§2. მეოთხე რიგის განტოლების საწყის-სასაზღვრო ამოცანისათვის ამონახსნის ერთადერთობა

სიბრტყის Q_T მართკუთხედში კვლავ განვიხილოთ (1.1.1) – (1.1.4) ამოცანა.

ვაჩვენოთ (1.1.1) – (1.1.4) ამოცანის ამონახსნის ერთადერთობა. ვთქვათ u_1 და u_2 არის დასმული ამოცანის განსხვავებული ამონახსნები. $w = u_1 - u_2$ -ისთვის გვექნება შემდეგი ამოცანა:

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left\{\left[1 + \int_0^t \left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}\right)^2 d\tau\right]\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} - \left[1 + \int_0^t \left(\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2}\right)^2 d\tau\right]\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2}\right\} = 0, \quad (1.2.1)$$

$$w(x,0) = 0, \quad (1.2.2)$$

$$w(0,t) = w(1,t) = 0, \quad (1.2.3)$$

$$\frac{\partial w}{\partial x}(0,t) = \frac{\partial w}{\partial x}(1,t) = 0. \quad (1.2.4)$$

თუ გავამრავლებთ (1.2.1) განტოლებას w ფუნქციაზე და ვაინტეგრებთ $[0,1]$ შუალედზე მივიღებთ

$$\int_0^1 \frac{\partial w}{\partial t} w\, dx + \int_0^1 \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left\{\left[1 + \int_0^t \left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}\right)^2 d\tau\right]\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} - \left[1 + \int_0^t \left(\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2}\right)^2 d\tau\right]\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2}\right\} w dx = 0\,.$$

მარცხენა მხარის მეორე შესაკრებში გამოვიყენოთ ნაწილობითი ინტეგრების ფორმულა და (1.2.3) სასაზღვრო პირობა

$$\int_0^1 \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left\{\left[1+\int_0^t\left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}\right)^2 d\tau\right]\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}-\left[1+\int_0^t\left(\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2}\right)^2 d\tau\right]\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2}\right\} w dx$$

$$=\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\left[1+\int_0^t\left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}\right)^2 d\tau\right]\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}-\left[1+\int_0^t\left(\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2}\right)^2 d\tau\right]\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2}\right)w\right)\Bigg|_0^1$$

$$-\int_0^1\left(\frac{\partial}{\partial x}\left[1+\int_0^t\left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}\right)^2 d\tau\right]\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}-\left[1+\int_0^t\left(\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2}\right)^2 d\tau\right]\right)\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2}\frac{\partial w}{\partial x}dx$$

$$=\frac{\partial}{\partial x}\left(\left[1+\int_0^t\left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}(1,t)\right)^2 d\tau\right]\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}(1,t)\right.$$

$$\left.-\left[1+\int_0^t\left(\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2}(1,t)\right)^2 d\tau\right]\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2}(1,t)\right)w(1,t)$$

$$-\frac{\partial}{\partial x}\left(\left[1+\int_0^t\left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}(0,t)\right)^2 d\tau\right]\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}(0,t)\right.$$

$$\left.-\left[1+\int_0^t\left(\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2}(0,t)\right)^2 d\tau\right]\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2}(0,t)\right)w(0,t)$$

$$-\int_0^1\frac{\partial}{\partial x}\left\{\left[1+\int_0^t\left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}\right)^2 d\tau\right]\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}-\left[1+\int_0^t\left(\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2}\right)^2 d\tau\right]\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2}\right\}\frac{\partial w}{\partial x}dx$$

$$=-\int_0^1\frac{\partial}{\partial x}\left\{\left[1+\int_0^t\left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}\right)^2 d\tau\right]\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}-\left[1+\int_0^t\left(\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2}\right)^2 d\tau\right]\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2}\right\}\frac{\partial w}{\partial x}dx.$$

გვექნება

$$\frac{1}{2}\int_0^1\frac{\partial w^2}{\partial t}dx-\int_0^1\frac{\partial}{\partial x}\left\{\left[1+\int_0^t\left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}\right)^2 d\tau\right]\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}-\left[1+\int_0^t\left(\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2}\right)^2 d\tau\right]\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2}\right\}\frac{\partial w}{\partial x}dx=0\,.$$

მარცხენა მხარის მეორე წევრისთის კვლავ გამოვიყენოთ ნაწილობითი ინტეგრების ფორმულა და (1.2.4) სასაზღვრო პირობა

$$\int_0^1 \frac{\partial}{\partial x}\left\{\left[1+\int_0^t \left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}\right)^2 d\tau\right]\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}-\left[1+\int_0^t \left(\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2}\right)^2 d\tau\right]\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2}\right\}\frac{\partial w}{\partial x}dx$$

$$=\left(\left(\left[1+\int_0^t \left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}\right)^2 d\tau\right]\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}-\left[1+\int_0^t \left(\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2}\right)^2 d\tau\right]\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2}\right)\frac{\partial w}{\partial x}\right)\Bigg|_0^1$$

$$-\int_0^1 \left(\left[1+\int_0^t \left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}\right)^2 d\tau\right]\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}-\left[1+\int_0^t \left(\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2}\right)^2 d\tau\right]\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2}\right)\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}dx$$

$$=\left(\left[1+\int_0^t \left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}(1,t)\right)^2 d\tau\right]\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}(1,t)\right.$$

$$\left.-\left[1+\int_0^t \left(\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2}(1,t)\right)^2 d\tau\right]\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2}(1,t)\right)\frac{\partial w}{\partial x}(1,t)$$

$$-\left(\left[1+\int_0^t \left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}(0,t)\right)^2 d\tau\right]\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}(0,t)\right.$$

$$\left.-\left[1+\int_0^t \left(\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2}(0,t)\right)^2 d\tau\right]\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2}(0,t)\right)\frac{\partial w}{\partial x}(0,t)$$

$$-\int_0^1 \left\{\left[1+\int_0^t \left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}\right)^2 d\tau\right]\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}-\left[1+\int_0^t \left(\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2}\right)^2 d\tau\right]\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2}\right\}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}dx$$

$$=-\int_0^1 \left\{\left[1+\int_0^t \left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}\right)^2 d\tau\right]\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}-\left[1+\int_0^t \left(\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2}\right)^2 d\tau\right]\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2}\right\}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}dx.$$

მივიღებთ

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|w\|^2+\int_0^1 \left\{\left[1+\int_0^t \left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}\right)^2 d\tau\right]\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}-\left[1+\int_0^t \left(\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2}\right)^2 d\tau\right]\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2}\right\}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}dx=0.$$

გვაქვს

$$\left\{\left[1+\int_0^t \left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}\right)^2 d\tau\right]\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}-\left[1+\int_0^t \left(\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2}\right)^2 d\tau\right]\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2}\right\}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}=$$

$$= \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)^2 + \left[\int_0^t \left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}\right)^2 d\tau \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} - \int_0^t \left(\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2}\right)^2 d\tau \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2}\right] \cdot \left[\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2}\right].$$

ახლა გამოვიყენოთ შემდეგი უტოლობა

$$(ca - db)(a - b) \geq \frac{1}{2}(c - d)(a^2 - b^2),$$

სადაც:

$$c = \int_0^t \left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}\right)^2 d\tau, \qquad a = \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}, \qquad d = \int_0^t \left(\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2}\right)^2 d\tau, \qquad b = \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2}.$$

არაუარყოფითი წევრი $\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)^2$ უგულებელვყოთ და აღნიშნული უტოლობის გამოყენებით, მივიღებთ

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|w\|^2 + \frac{1}{2}\int_0^1 \int_0^t \left[\left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}\right)^2 - \left(\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2}\right)^2\right] d\tau \cdot \left[\left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}\right)^2 - \left(\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2}\right)^2\right] dx \leq 0 .$$

შემოვიღოთ აღნიშვნა

$$\varphi(x,t) = \int_0^t \left[\left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}\right)^2 - \left(\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2}\right)^2\right] d\tau,$$

რომლის საშუალებითაც ბოლო უტოლობა გადაიწერება შემდეგი სახით

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|w\|^2 + \frac{1}{4}\frac{d}{dt}\int_0^1 \varphi^2\, dx \leq 0.$$

მიღებული ვაინტეგროთ t ცვლადით:

$$\int_0^t \frac{d}{dt}\|w\|^2 + \int_0^t \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^1 \varphi^2\, dx \leq 0.$$

$$\|w\|^2(t) - \|w\|^2(0) + \frac{1}{2}\int_0^1 \varphi^2\, dx - \frac{1}{2}\int_0^1 \varphi^2(x,0)\, dx \leq 0.$$

$$\|w\|^2(t) + \frac{1}{2}\int_0^1 \varphi^2\, dx \leq 0.$$

უკანასკნელი უტოლობიდან ვღებულობთ შეფასებას:

$$\|w\|^2 \leq 0 \quad \text{ე.ი.} \quad \|w\| = 0.$$

რაც ამტკიცებს დასმული ამოცანის ამონახსნის ერთადერთობას.

თავი II. მეოთხე რიგის ერთი არაწრფივი პარაბოლური ინტეგრო-დიფერენციალური განტოლებათა სისტემის საწყის-სასაზღვრო ამოცანისათვის ამონახსნის მდგრადობა და ერთადერთობა

§1. მეოთხე რიგის განტოლებათა სისტემის საწყის-სასაზღვრო ამოცანისათვის ამონახსნის მდგრადობა

მართკუთხედში Q_T განვიხილოთ შემდეგი საწყის-სასაზღვრო ამოცანა:

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left\{\left[1+\int_0^t\left(\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)^2+\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right)^2\right)d\tau\right]\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right\}=f(x,t) \qquad (2.1.1)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t}+\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left\{\left[1+\int_0^t\left(\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)^2+\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right)^2\right)d\tau\right]\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right\}=g(x,t), \qquad (2.1.2)$$

$$u(0,t)=u(1,t)=0, \qquad (2.1.3)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(0,t)=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(1,t)=0, \qquad (2.1.4)$$

$$u(x,0)=u_0(x). \qquad (2.1.5)$$

$$v(0,t)=v(1,t)=0, \qquad (2.1.6)$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(0,t)=\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(1,t)=0, \qquad (2.1.7)$$

$$v(x,0)=v_0(x). \qquad (2.1.8)$$

სადაც f, g, u_0 და v_0 თავიანთი არგუმენტების მოცემული ფუნქციებია.

მივიღოთ (2.1.1) განტოლებისათვის შეფასება $f(x,t)$ მარჯვენა მხარის და $u_0(x)$ საწყისი პირობის მიმართ. გავამრავლოთ (2.1.1) განტოლება u ფუნქციაზე და ვაინტეგროთ [0,1] შუალედზე

$$\int_0^1\frac{\partial u}{\partial t}u\,dx+\int_0^1\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left\{\left[1+\int_0^t\left(\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)^2+\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right)^2\right)d\tau\right]\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right\}u dx=\int_0^1 f(x,t)u\,dx,$$

გამოვიყენოთ მარცხენა მხარის მეორე შესაკრებში ნაწილობითი ინტეგრების ფორმულა და (2.1.3) სასაზღვრო პირობა

$$\int_0^1 \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left\{\left[1+\int_0^t \left(\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)^2+\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right)^2\right)d\tau\right]\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right\}u dx$$

$$=\left(\frac{\partial}{\partial x}\left\{\left[1+\int_0^t \left(\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)^2+\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right)^2\right)d\tau\right]\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right\}u\right)\Bigg|_0^1$$

$$-\int_0^1 \frac{\partial}{\partial x}\left\{\left[1+\int_0^t \left(\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)^2+\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right)^2\right)d\tau\right]\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right\}\frac{\partial u}{\partial x}dx$$

$$=\frac{\partial}{\partial x}\left\{\left[1+\int_0^t \left(\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(1,t)\right)^2+\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(1,t)\right)^2\right)d\tau\right]\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(1,t)\right\}u(1,t)$$

$$-\frac{\partial}{\partial x}\left\{\left[1+\int_0^t \left(\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}(0,t)\right)^2+\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(0,t)\right)^2\right)d\tau\right]\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(0,t)\right\}u(0,t)$$

$$-\int_0^1 \frac{\partial}{\partial x}\left\{\left[1+\int_0^t \left(\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)^2+\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right)^2\right)d\tau\right]\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right\}\frac{\partial u}{\partial x}dx$$

$$=-\int_0^1 \frac{\partial}{\partial x}\left\{\left[1+\int_0^t \left(\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)^2+\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right)^2\right)d\tau\right]\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right\}\frac{\partial u}{\partial x}dx.$$

მივიღებთ

$$\frac{1}{2}\int_0^1 \frac{\partial u^2}{\partial t}dx-\int_0^1 \frac{\partial}{\partial x}\left\{\left[1+\int_0^t \left(\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)^2+\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right)^2\right)d\tau\right]\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right\}\frac{\partial u}{\partial x}dx=\int_0^1 f(x,t)u\,dx\,.$$

კვლავ გამოვიყენოთ მარცხენა მხარის მეორე შესაკრებში ნაწილობითი ინტეგრების ფორმულა და (2.1.4) სასაზღვრო პირობა

$$\int_0^1 \frac{\partial}{\partial x}\left\{\left[1+\int_0^t \left(\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)^2+\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right)^2\right)d\tau\right]\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right\}\frac{\partial u}{\partial x}dx$$

$$=\left(\left(\left[1+\int_0^t \left(\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)^2+\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right)^2\right)d\tau\right]\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)\frac{\partial u}{\partial x}\right)\Bigg|_0^1$$

$$-\int_0^1 \left\{\left[1+\int_0^t \left(\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)^2+\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right)^2\right)d\tau\right]\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right\}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\,dx$$

$$=\left(\left[1+\int_0^t \left(\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(1,t)\right)^2+\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(1,t)\right)^2\right)d\tau\right]\frac{\partial u}{\partial x}(1,t)\right)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(1,t)$$

$$-\left(\left[1+\int_0^t \left(\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(0,t)\right)^2+\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(0,t)\right)^2\right)d\tau\right]\frac{\partial u}{\partial x}(0,t)\right)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(0,t)$$

$$-\int_0^1 \left\{\left[1+\int_0^t \left(\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)^2+\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right)^2\right)d\tau\right]\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right\}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\,dx$$

$$=-\int_0^1 \left\{\left[1+\int_0^t \left(\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)^2+\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right)^2\right)d\tau\right]\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right\}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\,dx.$$

მივიღებთ

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u\|^2+\int_0^1 \left\{\left[1+\int_0^t \left(\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)^2+\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right)^2\right)d\tau\right]\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right\}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\,dx=\int_0^1 f(x,t)u\,dx\,.$$

თუ მიღებული ტოლობის მარცხენა მხარის მეორე შესაკრებში არაუარყოფით წევრს

$$\int_0^t \left(\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)^2+\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right)^2\right)d\tau,$$

უგულვებელვყოფთ, ხოლო მარჯვენა მხარისთვის გამოვიყენებთ $ab\le\frac{1}{2}a^2+\frac{1}{2}b^2$ თანაფარდობას მივიღებთ:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u\|^2+\int_0^1\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)^2dx\le\frac{1}{2}\int_0^1 f^2\,dx+\frac{1}{2}\int_0^1 u^2\,dx.$$

პუანკარე-ფრიდრიხსის უტოლობის [6]

$$\int_0^1 u^2dx\le\int_0^1\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2dx\le\int_0^1\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)^2dx$$

გამოყენებით გვექნება

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u\|^2+\int_0^1\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)^2dx\le\frac{1}{2}\int_0^1 f^2\,dx+\frac{1}{2}\int_0^1\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)^2dx.$$

აქედან

$$\frac{d}{dt}\|u\|^2 + \left\|\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right\|^2 \le \|f\|^2.$$

მიღებული უტოლობის t ცვლადით ინტეგრებით და (2.1.5) საწყისი პირობის გათვალისწინებით გვექნება

$$\|u(t)\|^2 + \int_0^t \left\|\frac{\partial^2 u(\tau)}{\partial x^2}\right\|^2 d\tau \le \int_0^t \|f(\tau)\|^2 d\tau + \|u_0\|^2.$$

მიღებული უტოლობის მარცხენა მხარის მეორე შესაკრები არაუარყოფითი სიდიდეა და თუ მას უგულვებელვყოფთ მივიღებთ შეფასებას

$$\|u(t)\|^2 \le \int_0^t \|f(\tau)\|^2 d\tau + \|u_0\|^2.$$

რაც ნიშნავს პირველი განტოლების ამონახსნის მდგრადობას $f(x,t)$ მარჯვენა მხრის და $u_0(x)$ საწყისი პირობის მიმართ.

ახლა ჩავატაროთ ანალოგიური ოპერაციები (2.1.2) განტოლებისთვის.

გავამრავლოთ (2.1.2) განტოლება v ფუნქციაზე და ვაინტეგროთ $[0,1]$ შუალედზე

$$\int_0^1 \frac{\partial v}{\partial t} v dx + \int_0^1 \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left\{\left[1 + \int_0^t \left(\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right)^2\right) d\tau\right]\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right\} v dx = \int_0^1 g(x,t)\, v dx.$$

გამოვიყენოთ მარცხენა მხარის მეორე შესაკრებში ნაწილობითი ინტეგრების ფორმულა და (2.1.6) სასაზღვრო პირობა

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left\{\left[1 + \int_0^t \left(\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right)^2\right) d\tau\right]\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right\} v dx \\
&\qquad = \left(\frac{\partial}{\partial x}\left\{\left[1 + \int_0^t \left(\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right)^2\right) d\tau\right]\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right\} v\right)\Bigg|_0^1 \\
&\qquad - \int_0^1 \frac{\partial}{\partial x}\left\{\left[1 + \int_0^t \left(\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right)^2\right) d\tau\right]\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right\}\frac{\partial v}{\partial x} dx \\
&\qquad = \frac{\partial}{\partial x}\left\{\left[1 + \int_0^t \left(\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(1,t)\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(1,t)\right)^2\right) d\tau\right]\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(1,t)\right\} v(1,t)
\end{aligned}$$

$$-\frac{\partial}{\partial x}\left\{\left[1+\int_0^t\left(\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(0,t)\right)^2+\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(0,t)\right)^2\right)d\tau\right]\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(0,t)\right\}v(0,t)$$

$$-\int_0^1\frac{\partial}{\partial x}\left\{\left[1+\int_0^t\left(\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)^2+\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right)^2\right)d\tau\right]\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right\}\frac{\partial v}{\partial x}dx$$

$$=-\int_0^1\frac{\partial}{\partial x}\left\{\left[1+\int_0^t\left(\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)^2+\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right)^2\right)d\tau\right]\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right\}\frac{\partial v}{\partial x}dx.$$

მივიღებთ

$$\frac{1}{2}\int_0^1\frac{\partial v^2}{\partial t}dx-\int_0^1\frac{\partial}{\partial x}\left\{\left[1+\int_0^t\left(\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)^2+\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right)^2\right)d\tau\right]\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right\}\frac{\partial v}{\partial x}dx=\int_0^1 g(x,t)\,v dx\,.$$

კვლავ გამოვიყენოთ მარცხენა მხარის მეორე შესაკრებში ნაწილობითი ინტეგრების ფორმულა და (2.1.7) სასაზღვრო პირობა

$$\int_0^1\frac{\partial}{\partial x}\left\{\left[1+\int_0^t\left(\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)^2+\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right)^2\right)d\tau\right]\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right\}\frac{\partial v}{\partial x}dx$$

$$=\left(\left(\left[1+\int_0^t\left(\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)^2+\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right)^2\right)d\tau\right]\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right)\frac{\partial v}{\partial x}\right)\Bigg|_0^1$$

$$-\int_0^1\left\{\left[1+\int_0^t\left(\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)^2+\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right)^2\right)d\tau\right]\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right\}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}dx$$

$$=\left(\left[1+\int_0^t\left(\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(1,t)\right)^2+\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(1,t)\right)^2\right)d\tau\right]\frac{\partial v}{\partial x}(1,t)\right)\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(1,t)$$

$$-\left(\left[1+\int_0^t\left(\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(0,t)\right)^2+\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(0,t)\right)^2\right)d\tau\right]\frac{\partial v}{\partial x}(0,t)\right)\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(0,t)$$

$$-\int_0^1\left\{\left[1+\int_0^t\left(\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)^2+\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right)^2\right)d\tau\right]\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right\}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}dx$$

$$=-\int_0^1\left\{\left[1+\int_0^t\left(\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)^2+\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right)^2\right)d\tau\right]\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right\}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}dx.$$

მივიღებთ

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|v\|^2+\int_0^1\left\{\left[1+\int_0^t\left(\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)^2+\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right)^2\right)d\tau\right]\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right\}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}dx=\int_0^1 g(x,t)\,vdx\,.$$

თუ მიღებული ტოლობის მარცხენა მხარის მეორე შესაკრებში არაუარყოფით წევრს

$$\int_0^t\left(\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)^2+\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right)^2\right)d\tau$$

უგულებელვყოფთ, ხოლო მარჯვენა მხარისთვის გამოვიყენებთ $ab\le\frac{1}{2}a^2+\frac{1}{2}b^2$ უტოლობას, მივიღებთ

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|v\|^2+\int_0^1\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right)^2dx\le\frac{1}{2}\int_0^1 g^2\,dx+\frac{1}{2}\int_0^1 v^2\,dx.$$

პუანკარე-ფრიდრიხსის უტოლობის [6]

$$\int_0^1 v^2dx\le\int_0^1\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2dx\le\int_0^1\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right)^2dx,$$

გამოყენებით გვექნება

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|v\|^2+\int_0^1\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right)^2dx\le\frac{1}{2}\int_0^1 g^2\,dx+\frac{1}{2}\int_0^1\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right)^2dx,$$

აქედან

$$\frac{d}{dt}\|v\|^2+\left\|\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right\|^2\le\|g\|^2.$$

მიღებული უტოლობის t ცვლადით ინტეგრებით და (2.1.8) საწყისი პირობის გათვალისწინებით გვექნება

$$\|v(t)\|^2+\int_0^t\left\|\frac{\partial^2 v(\tau)}{\partial x^2}\right\|^2d\tau\le\int_0^t\|g(\tau)\|^2d\tau+\|v_0\|^2.$$

მიღებული უტოლობის მარცხენა მხარეში მეორე შესაკრები არაუარყოფითი სიდიდეა და თუ მას უგულვებელვყოფთ მივიღებთ შეფასებას

$$\|v(t)\|^2\le\int_0^t\|g(\tau)\|^2d\tau+\|v_0\|^2.$$

რაც ნიშნავს (2.1.2) განტოლების ამონახსნის მდგრადობას $g(x,t)$ მარჯვენა მხარის და $v_0(x)$ საწყისი პირობის მიმართ. მაშასადამე, $(2.1.1)-(2.1.8)$ ამოცანის ამონახსნი მდგრადია.

§2. მეოთხე რიგის განტოლებათა სისტემის საწყის-სასაზღვრო ამოცანისათვის ამონახსნის ერთადერთობა

ახლა ვაჩვენოთ რომ თუ (2.1.1) – (2.1.8) ამოცანას აქვს ამონახსნი ის ერთადერთია. ვთქვათ u_1, u_2 და v_1, v_2 მოცემული ამოცანის განსხვავებული ამონახნსებია. $w = u_1 - u_2$ და $z = v_1$-v_2-სთვის გვექნება:

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left\{\left[1 + \int_0^t \left(\left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2}\right)^2\right) d\tau\right]\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} - \left[1 + \int_0^t \left(\left(\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 v_2}{\partial x^2}\right)^2\right) d\tau\right]\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2}\right\} = 0, \tag{2.2.1}$$

$$\frac{\partial z}{\partial t} + \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left\{\left[1 + \int_0^t \left(\left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2}\right)^2\right) d\tau\right]\frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2} - \left[1 + \int_0^t \left(\left(\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 v_2}{\partial x^2}\right)^2\right) d\tau\right]\frac{\partial^2 v_2}{\partial x^2}\right\} = 0, \tag{2.2.2}$$

$$w(0,t) = w(1,t) = 0, \tag{2.2.3}$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(0,t) = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(1,t) = 0 \tag{2.2.4}$$

$$w(x,0) = 0, \tag{2.2.5}$$

$$z(0,t) = z(1,t) = 0, \tag{2.2.6}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(0,t) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(1,t) = 0, \tag{2.2.7}$$

$$z(x,0) = 0. \tag{2.2.8}$$

გავამრავლოთ (2.2.1) განტოლება w ფუნქციაზე და ვაინტეგროთ $[0,1]$ შუალედზე

$$\int_0^1 \frac{\partial w}{\partial t} w + \int_0^1 \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left\{\left[1 + \int_0^t \left(\left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2}\right)^2\right) d\tau\right]\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} - \left[1 + \int_0^t \left(\left(\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 v_2}{\partial x^2}\right)^2\right) d\tau\right]\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2}\right\} w dx = 0,$$

გამოვიყენოთ მარცხენა მხარის მეორე შესაკრებში ნაწილობითი ინტეგრების ფორმულა და (2.2.3) სასაზღვრო პირობა

$$\int_0^1 \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left\{\left[1+\int_0^t\left(\left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}\right)^2+\left(\frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2}\right)^2\right)d\tau\right]\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}-\left[1+\int_0^t\left(\left(\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2}\right)^2+\left(\frac{\partial^2 v_2}{\partial x^2}\right)^2\right)d\tau\right]\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2}\right\}w\,dx$$

$$=\left(\frac{\partial}{\partial x}\left\{\left[1+\int_0^t\left(\left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}\right)^2+\left(\frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2}\right)^2\right)d\tau\right]\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}\right.\right.$$

$$\left.\left.-\left[1+\int_0^t\left(\left(\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2}\right)^2+\left(\frac{\partial^2 v_2}{\partial x^2}\right)^2\right)d\tau\right]\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2}\right\}w\right)\Bigg|_0^1$$

$$-\int_0^1\left(\frac{\partial}{\partial x}\left\{\left[1+\int_0^t\left(\left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}\right)^2+\left(\frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2}\right)^2\right)d\tau\right]\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}\right.\right.$$

$$\left.\left.-\left[1+\int_0^t\left(\left(\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2}\right)^2+\left(\frac{\partial^2 v_2}{\partial x^2}\right)^2\right)d\tau\right]\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2}\right\}\right)\frac{\partial w}{\partial x}dx$$

$$=\frac{\partial}{\partial x}\left\{\left[1+\int_0^t\left(\left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}(1,t)\right)^2+\left(\frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2}(1,t)\right)^2\right)d\tau\right]\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}(1,t)\right.$$

$$\left.-\left[1+\int_0^t\left(\left(\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2}(1,t)\right)^2+\left(\frac{\partial^2 v_2}{\partial x^2}(1,t)\right)^2\right)d\tau\right]\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2}(1,t)\right\}w(1,t)$$

$$-\frac{\partial}{\partial x}\left\{\left[1+\int_0^t\left(\left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}(0,t)\right)^2+\left(\frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2}(0,t)\right)^2\right)d\tau\right]\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}(0,t)\right.$$

$$\left.-\left[1+\int_0^t\left(\left(\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2}(0,t)\right)^2+\left(\frac{\partial^2 v_2}{\partial x^2}(0,t)\right)^2\right)d\tau\right]\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2}(0,t)\right\}w(0,t)$$

$$-\int_0^1\left(\frac{\partial}{\partial x}\left\{\left[1+\int_0^t\left(\left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}\right)^2+\left(\frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2}\right)^2\right)d\tau\right]\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}\right.\right.$$

$$\left.\left.-\left[1+\int_0^t\left(\left(\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2}\right)^2+\left(\frac{\partial^2 v_2}{\partial x^2}\right)^2\right)d\tau\right]\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2}\right\}\right)\frac{\partial w}{\partial x}dx$$

$$= -\int_0^1 \left(\frac{\partial}{\partial x} \left\{ \left[1 + \int_0^t \left(\left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2} \right)^2 \right) d\tau \right] \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} \right.\right.$$

$$\left.\left. - \left[1 + \int_0^t \left(\left(\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 v_2}{\partial x^2} \right)^2 \right) d\tau \right] \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} \right\} \right) \frac{\partial w}{\partial x} dx.$$

მივიღებთ

$$\frac{1}{2} \int_0^1 \frac{\partial w^2}{\partial t} dx - \int_0^1 \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \left[1 + \int_0^t \left(\left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2} \right)^2 \right) d\tau \right] \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} \right.$$

$$\left. - \left[1 + \int_0^t \left(\left(\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 v_2}{\partial x^2} \right)^2 \right) d\tau \right] \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} \right\} \frac{\partial w}{\partial x} dx = 0\,.$$

კვლავ გამოვიყენოთ მარცხენა მხარის მეორე შესაკრებში ნაწილობითი ინტეგრების ფორმულა და (2.2.4) სასაზღვრო პირობა

$$\int_0^1 \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \left[1 + \int_0^t \left(\left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2} \right)^2 \right) d\tau \right] \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} \right.$$

$$\left. - \left[1 + \int_0^t \left(\left(\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 v_2}{\partial x^2} \right)^2 \right) d\tau \right] \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} \right\} \frac{\partial w}{\partial x} dx$$

$$= \left(\left(\left[1 + \int_0^t \left(\left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2} \right)^2 \right) d\tau \right] \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \frac{\partial w}{\partial x} \right) \Bigg|_0^1$$

$$- \int_0^1 \left(\left[1 + \int_0^t \left(\left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2} \right)^2 \right) d\tau \right] \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} \right.$$

$$\left. - \left[1 + \int_0^t \left(\left(\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 v_2}{\partial x^2} \right)^2 \right) d\tau \right] \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} \right) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} dx$$

$$= \left(\left[1 + \int_0^t \left(\left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}(1,t) \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2}(1,t) \right)^2 \right) d\tau \right] \frac{\partial w}{\partial x}(1,t) \right) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(1,t)$$

$$- \left(\left[1 + \int_0^t \left(\left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}(0,t) \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2}(0,t) \right)^2 \right) d\tau \right] \frac{\partial w}{\partial x}(0,t) \right) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(0,t)$$

$$
-\int_0^1 \left\{\left[1+\int_0^t \left(\left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2}\right)^2\right) d\tau\right]\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}\right.
$$

$$
\left.-\left[1+\int_0^t \left(\left(\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 v_2}{\partial x^2}\right)^2\right) d\tau\right]\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2}\right\}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}dx
$$

$$
=\int_0^1 \left\{\left[1+\int_0^t \left(\left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2}\right)^2\right) d\tau\right]\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}\right.
$$

$$
\left.-\left[1+\int_0^t \left(\left(\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 v_2}{\partial x^2}\right)^2\right) d\tau\right]\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2}\right\}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}dx.
$$

მივიღებთ

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|w\|^2 + \int_0^1 &\left\{\left[1+\int_0^t \left(\left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2}\right)^2\right) d\tau\right]\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}\right. \\
&\left.-\left[1+\int_0^t \left(\left(\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 v_2}{\partial x^2}\right)^2\right) d\tau\right]\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2}\right\}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}dx = 0\,.
\end{aligned}
\tag{2.2.9}
$$

გვაქვს

$$
\begin{aligned}
&\left\{\left[1+\int_0^t \left(\left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2}\right)^2\right) d\tau\right]\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} - \left[1+\int_0^t \left(\left(\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 v_2}{\partial x^2}\right)^2\right) d\tau\right]\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2}\right\}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)^2 \\
&\qquad + \left[\int_0^t \left(\left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2}\right)^2\right) d\tau\,\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} - \int_0^t \left(\left(\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 v_2}{\partial x^2}\right)^2\right) d\tau\,\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2}\right] \\
&\qquad \times \left[\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2}\right].
\end{aligned}
$$

ახლა კვლავ გამოვიყენოთ მარტივად შესამოწმებელი უტოლობა:

$$
(ca-db)(a-b) \geq \tfrac{1}{2}(c-d)(a^2-b^2),
$$

სადაც ჩვენი ამოცანისთვის:

$$
a = \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}, \qquad b = \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2},
$$

$$
c = \int_0^t \left(\left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2}\right)^2\right) d\tau, \quad d = \int_0^t \left(\left(\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 v_2}{\partial x^2}\right)^2\right) d\tau.
$$

თუ არაუარყოფით წევრს $\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)^2$ უგულებელვყოფთ და გამოვიყენებთ ზემოხსენებულ უტოლობას (2.2.9)-დან მივიღებთ:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|w\|^2+\frac{1}{2}\int_0^1\int_0^t\left[\left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}\right)^2-\left(\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2}\right)^2+\left(\frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2}\right)^2-\left(\frac{\partial^2 v_2}{\partial x^2}\right)^2\right]d\tau \times\left[\left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}\right)^2-\left(\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2}\right)^2\right]dx\le 0\,. \qquad (2.2.10)$$

ახლა, გავამრავლოთ (2.2.2) განტოლება z ფუნქციაზე და ვაინტეგროთ [0,1] შუალედზე

$$\int_0^1\frac{\partial \mathrm{z}}{\partial t}\mathrm{z}+\int_0^1\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left\{\left[1+\int_0^t\left(\left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}\right)^2+\left(\frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2}\right)^2\right)d\tau\right]\frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2} -\left[1+\int_0^t\left(\left(\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2}\right)^2+\left(\frac{\partial^2 v_2}{\partial x^2}\right)^2\right)d\tau\right]\frac{\partial^2 v_2}{\partial x^2}\right\}\mathrm{z}dx=0,$$

გამოვიყენოთ მარცხენა მხარის მეორე შესაკრებში ნაწილობითი ინტეგრების ფორმულა და (2.2.6) სასაზღვრო პირობა

$$\int_0^1\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left\{\left[1+\int_0^t\left(\left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}\right)^2+\left(\frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2}\right)^2\right)d\tau\right]\frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2}-\left[1+\int_0^t\left(\left(\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2}\right)^2+\left(\frac{\partial^2 v_2}{\partial x^2}\right)^2\right)d\tau\right]\frac{\partial^2 v_2}{\partial x^2}\right\}zdx$$

$$=\left(\frac{\partial}{\partial x}\left\{\left[1+\int_0^t\left(\left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}\right)^2+\left(\frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2}\right)^2\right)d\tau\right]\frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2} -\left[1+\int_0^t\left(\left(\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2}\right)^2+\left(\frac{\partial^2 v_2}{\partial x^2}\right)^2\right)d\tau\right]\frac{\partial^2 v_2}{\partial x^2}\right\}z\right)\Bigg|_0^1$$

$$-\int_0^1\left(\frac{\partial}{\partial x}\left\{\left[1+\int_0^t\left(\left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}\right)^2+\left(\frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2}\right)^2\right)d\tau\right]\frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2} -\left[1+\int_0^t\left(\left(\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2}\right)^2+\left(\frac{\partial^2 v_2}{\partial x^2}\right)^2\right)d\tau\right]\frac{\partial^2 v_2}{\partial x^2}\right\}\right)\frac{\partial z}{\partial x}dx$$

$$= \left(\frac{\partial}{\partial x} \left\{ \left[1 + \int_0^t \left(\left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}(1,t) \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2}(1,t) \right)^2 \right) d\tau \right] \frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2}(1,t) \right.\right.$$

$$\left.\left. - \left[1 + \int_0^t \left(\left(\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2}(1,t) \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 v_2}{\partial x^2}(1,t) \right)^2 \right) d\tau \right] \frac{\partial^2 v_2}{\partial x^2}(1,t) \right\} \right) z(1,t)$$

$$- \left(\frac{\partial}{\partial x} \left\{ \left[1 + \int_0^t \left(\left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}(0,t) \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2}(0,t) \right)^2 \right) d\tau \right] \frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2}(0,t) \right.\right.$$

$$\left.\left. - \left[1 + \int_0^t \left(\left(\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2}(0,t) \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 v_2}{\partial x^2}(0,t) \right)^2 \right) d\tau \right] \frac{\partial^2 v_2}{\partial x^2}(0,t) \right\} \right) z(0,t)$$

$$- \int_0^1 \left(\frac{\partial}{\partial x} \left\{ \left[1 + \int_0^t \left(\left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2} \right)^2 \right) d\tau \right] \frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2} \right.\right.$$

$$\left.\left. - \left[1 + \int_0^t \left(\left(\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 v_2}{\partial x^2} \right)^2 \right) d\tau \right] \frac{\partial^2 v_2}{\partial x^2} \right\} \right) \frac{\partial z}{\partial x} dx =$$

$$- \int_0^1 \left(\frac{\partial}{\partial x} \left\{ \left[1 + \int_{\mathbf{0}}^{\boldsymbol{t}} \left(\left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2} \right)^2 \right) d\tau \right] \frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2} \right.\right.$$

$$\left.\left. - \left[1 + \int_{\mathbf{0}}^{\boldsymbol{t}} \left(\left(\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} \right)^{\mathbf{2}} + \left(\frac{\partial^2 v_2}{\partial x^2} \right)^{\mathbf{2}} \right) d\tau \right] \frac{\partial^2 v_2}{\partial x^2} \right\} \right) \frac{\partial z}{\partial x} dx.$$

მივიღებთ

$$\frac{1}{2} \int_0^1 \frac{\partial z^2}{\partial t} dx - \int_0^1 \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \left[1 + \int_0^t \left(\left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2} \right)^2 \right) d\tau \right] \frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2} \right.$$

$$\left. - \left[1 + \int_0^t \left(\left(\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 v_2}{\partial x^2} \right)^2 \right) d\tau \right] \frac{\partial^2 v_2}{\partial x^2} \right\} \frac{\partial z}{\partial x} dx = 0\,.$$

კვლავ გამოვიყენოთ მარცხენა მხარის მეორე შესაკრებში ნაწილობითი ინტეგრების ფორმულა და (2.2.7) სასაზღვრო პირობა

$$
\begin{aligned}
&\int_0^1 \frac{\partial}{\partial x}\left\{\left[1+\int_0^t \left(\left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}\right)^2+\left(\frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2}\right)^2\right) d\tau\right]\frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2}\right.\\
&\qquad\left.-\left[1+\int_0^t \left(\left(\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2}\right)^2+\left(\frac{\partial^2 v_2}{\partial x^2}\right)^2\right) d\tau\right]\frac{\partial^2 v_2}{\partial x^2}\right\}\frac{\partial z}{\partial x}\,dx\\
&\qquad=\left(\left(\left[1+\int_0^t \left(\left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}\right)^2+\left(\frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2}\right)^2\right) d\tau\right]\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)\frac{\partial z}{\partial x}\right)\Bigg|_0^1\\
&\qquad-\int_0^1\left(\left[1+\int_0^t \left(\left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}\right)^2+\left(\frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2}\right)^2\right) d\tau\right]\frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2}\right.\\
&\qquad\left.-\left[1+\int_0^t \left(\left(\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2}\right)^2+\left(\frac{\partial^2 v_2}{\partial x^2}\right)^2\right) d\tau\right]\frac{\partial^2 v_2}{\partial x^2}\right)\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\,dx\\
&\qquad=\left(\left[1+\int_0^t \left(\left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}(1,t)\right)^2+\left(\frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2}(1,t)\right)^2\right) d\tau\right]\frac{\partial z}{\partial x}(1,t)\right)\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(1,t)\\
&\qquad-\left(\left[1+\int_0^t \left(\left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}(0,t)\right)^2+\left(\frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2}(0,t)\right)^2\right) d\tau\right]\frac{\partial z}{\partial x}(0,t)\right)\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(0,t)\\
&\qquad-\int_0^1\left\{\left[1+\int_0^t \left(\left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}\right)^2+\left(\frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2}\right)^2\right) d\tau\right]\frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2}\right.\\
&\qquad\left.-\left[1+\int_0^t \left(\left(\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2}\right)^2+\left(\frac{\partial^2 v_2}{\partial x^2}\right)^2\right) d\tau\right]\frac{\partial^2 v_2}{\partial x^2}\right\}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\,dx\\
&\qquad=-\int_0^1\left\{\left[1+\int_0^t \left(\left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}\right)^2+\left(\frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2}\right)^2\right) d\tau\right]\frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2}\right.\\
&\qquad\left.-\left[1+\int_0^t \left(\left(\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2}\right)^2+\left(\frac{\partial^2 v_2}{\partial x^2}\right)^2\right) d\tau\right]\frac{\partial^2 v_2}{\partial x^2}\right\}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\,dx.
\end{aligned}
$$

მივიღებთ

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\mathrm{z}\|^2+\int\limits_0^1\left\{\left[1+\int\limits_0^t\left(\left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}\right)^2+\left(\frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2}\right)^2\right)d\tau\right]\frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2}\right. \tag{2.2.11}$$
$$\left.-\left[1+\int\limits_0^t\left(\left(\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2}\right)^2+\left(\frac{\partial^2 v_2}{\partial x^2}\right)^2\right)d\tau\right]\frac{\partial^2 v_2}{\partial x^2}\right\}\frac{\partial^2 \mathrm{z}}{\partial x^2}dx=0\,.$$

გვაქვს:

$$\left\{\left[1+\int\limits_0^t\left(\left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}\right)^2+\left(\frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2}\right)^2\right)d\tau\right]\frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2}-\left[1+\int\limits_0^t\left(\left(\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2}\right)^2+\left(\frac{\partial^2 v_2}{\partial x^2}\right)^2\right)d\tau\right]\frac{\partial^2 v_2}{\partial x^2}\right\}\frac{\partial^2 \mathrm{z}}{\partial x^2}$$
$$=\left(\frac{\partial^2 \mathrm{z}}{\partial x^2}\right)^2+\left[\int\limits_0^t\left(\left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}\right)^2+\left(\frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2}\right)^2\right)d\tau\,\frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2}-\int\limits_0^t\left(\left(\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2}\right)^2+\left(\frac{\partial^2 v_2}{\partial x^2}\right)^2\right)d\tau\,\frac{\partial^2 v_2}{\partial x^2}\right]$$
$$\times\left[\frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 v_2}{\partial x^2}\right].$$

ახლა კვლავ გამოვიყენოთ მარტივად შესამოწმებელი უტოლობა

$$(ca-db)(a-b)\ge\frac{1}{2}(c-d)(a^2-b^2),$$

სადაც:

$$a=\frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2}\,,\qquad b=\frac{\partial^2 v_2}{\partial x^2}\,,$$
$$c=\int\limits_0^t\left(\left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}\right)^2+\left(\frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2}\right)^2\right)d\tau,\qquad d=\int\limits_0^t\left(\left(\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2}\right)^2+\left(\frac{\partial^2 v_2}{\partial x^2}\right)^2\right)d\tau\,.$$

თუ არაუარყოფით წევრს $\left(\frac{\partial^2 \mathrm{z}}{\partial x^2}\right)^2$ უგულებელვყოფთ და გამოვიყენებთ ზემოთხსენებულ უტოლობას, (2.2.11)-დან მივიღებთ

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\mathrm{z}\|^2+\frac{1}{2}\int\limits_0^1\int\limits_0^t\left[\left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}\right)^2-\left(\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2}\right)^2+\left(\frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2}\right)^2-\left(\frac{\partial^2 v_2}{\partial x^2}\right)^2\right]d\tau \tag{2.2.12}$$
$$\times\left[\left(\frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2}\right)^2-\left(\frac{\partial^2 v_2}{\partial x^2}\right)^2\right]dx\le 0\,.$$

შევკრიბოთ (2.2.10) და (2.2.12) უტოლობები:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\mathrm{z}\|^2 + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|w\|^2$$
$$+\frac{1}{2}\int_0^1\int_0^t\left[\left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}\right)^2 - \left(\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2}\right)^2 - \left(\frac{\partial^2 v_2}{\partial x^2}\right)^2\right]d\tau$$
$$\times\left[\left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}\right)^2 - \left(\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2}\right)^2 - \left(\frac{\partial^2 v_2}{\partial x^2}\right)^2\right]dx \le 0$$

შემოვიღოთ აღნიშვნა:

$$\varphi(x,t) = \int_0^t\left[\left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}\right)^2 - \left(\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2}\right)^2 - \left(\frac{\partial^2 v_2}{\partial x^2}\right)^2\right]d\tau$$

მივიღებთ:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\mathrm{z}\|^2 + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|w\|^2 + \frac{1}{4}\frac{d}{dt}\int_0^1 \varphi^2\,dx \le 0.$$

t ცვლადით ინტეგრების შემდეგ ცხადია, ამ უტოლობაში მესამე შესაკრები არაუარყოფით წევრს გვაძლევს, და თუ მას უგულვებელვყოფთ, მაშინ (2.2.5) და (2.2.8) საწყისი პირობის გათვალისწინებით გვექნება:

$$\|w\|^2 + \|\mathrm{z}\|^2 \le 0 \quad \text{ე.ი.} \quad \|w\| = 0,\ \|\mathrm{z}\| = 0.$$

რაც ამტკიცებს დასმული ამოცანის ამონახსნის ერთადერთობას.

თავი III. სხვაობიანი სქემა, რიცხვითი ექსპერიმენტების შედეგები და გრაფიკული ილუსტრაციები

§1. მეოთხე რიგის განტოლებათა სისტემის საწყის-სასაზღვრო ამოცანის შესაბამისი სხვაობიანი სქემა

ცნობილი მიდგომების გამოყენებით (იხ. მაგალითად, [24] და მასში მოცემული ლიტერატურული მითითებები) და [9], [10], [12] ნაშომებზე დაყრდნობით ამ პარაგრაფში აგებულია მეორე თავის მეორე პარაგრაფში შესწავლილი ამოცანის შესაბამისი სასრულ-სხვაობიანი სქემა. შემდეგ კი ცნობილი იტერაციული პროცედურის [23] გამოყენებით აგებულია გამოთვლითი ალგორითმი და ჩატარებულია შესაბამისი რიცხვითი ექსპერიმენტები.

დავყოთ $[0,1]$ შუალედი M, ხოლო $[0,T]$ შუალედი N ტოლ ნაწილად, მოვახდინოთ Q_T არის დისკრეტიზაცია და შემოვიღოთ შემდეგი აღნიშვნები:

$$h = 1/M, \qquad x_i = ih, \qquad \tau = T/N, \qquad t_j = j\tau,$$

$$u_i^j = u(x_i, t_j),$$

$$\overline{\omega}_h = \{x_i, i = 0,1,\dots,M\}, \qquad \omega_\tau = \{t_j = j\tau, j = 0,1,\dots,N\},$$

$$\omega_{h\tau} = \overline{\omega}_h \times \omega_\tau.$$

ინტეგრალის აპროქსიმაციისათვის გამოვიყენოთ მარჯვენა მართკუთხედების კვადრატურული ფორმულა და (2.1.1)-(2.1.8) ამოცანისთვის განვიხილოთ შემდეგი არაცხადი სხვაობიანი სქემა:

$$y_{t,i}^j + \left\{\left(1 + \tau \sum_{k=1}^{j+1} \left[\left(y_{\bar{x}x,i}^k\right)^2 + \left(z_{\bar{x}x,i}^k\right)^2\right]\right) y_{\bar{x}x,i}^{j+1}\right\}_{\bar{x}x,i} = f_i^{j+1},$$

$$z_{t,i}^j + \left\{\left(1 + \tau \sum_{k=1}^{j+1} \left[\left(y_{\bar{x}x,i}^k\right)^2 + \left(z_{\bar{x}x,i}^k\right)^2\right]\right) z_{\bar{x}x,i}^{j+1}\right\}_{\bar{x}x,i} = g_i^{j+1},$$

$$i = 2,3 \dots, M-2, \qquad j = 0,1,\dots,N-1,$$

$$y_0^j = y_M^j = 0, \qquad j = 0,1,\dots,N,$$

$$z_0^j = z_M^j = 0, \qquad j = 0,1,\dots,N,$$

$$y_{\bar{x}x,1}^j = y_{\bar{x}x,M-1}^j = 0,$$

$$z_{\bar{x}x,1}^j = z_{\bar{x}x,M-1}^j = 0,$$

$$y_i^0 = u_{0,i}, \qquad i = 0,1,\dots,M,$$

$$z_i^0 = v_{0,i}, \qquad i = 0,1,\dots,M.$$

§2. რიცხვითი ექსპერიმენტების შედეგები და გრაფიკული ილუსტრაციები

რიცხვითი ექსპერიმენტებისთვის, რომლებიც ჩატარებულია სხვადასხვა u_0, v_0 ფუნქციებისთვის და ზუსტი ამონახსნებისთვის, გამოყენებულია შესატყვისი f, g მარჯვენა მხარეებიანი (2.1.1)-(2.1.8) ამოცანის შესაბამისი, წინა პარაგრაფში მოყვანილი, სხვაობიანი სქემა.

დისკრეტული სქემის გამოყენებით ჩატარებულია მრავალი რიცხვითი ექსპერიმენტი. მიღებული ექსპერიმენტების შედეგები სრულ შესაბამისობაშია თეორიულ კვლევებთან. ქვემოთ მოყვანილია ზოგიერთი მათგანი.

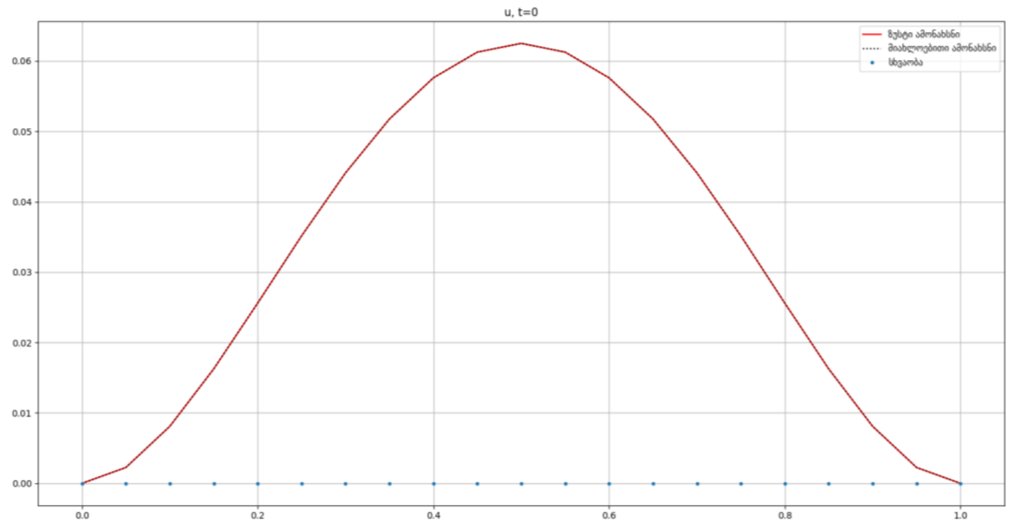
ტესტურ ექსპერიმენტში ჩვენ შევარჩიეთ მარჯვენა მხარე ისე, რომ ზუსტი ამონახსნი იყოს:

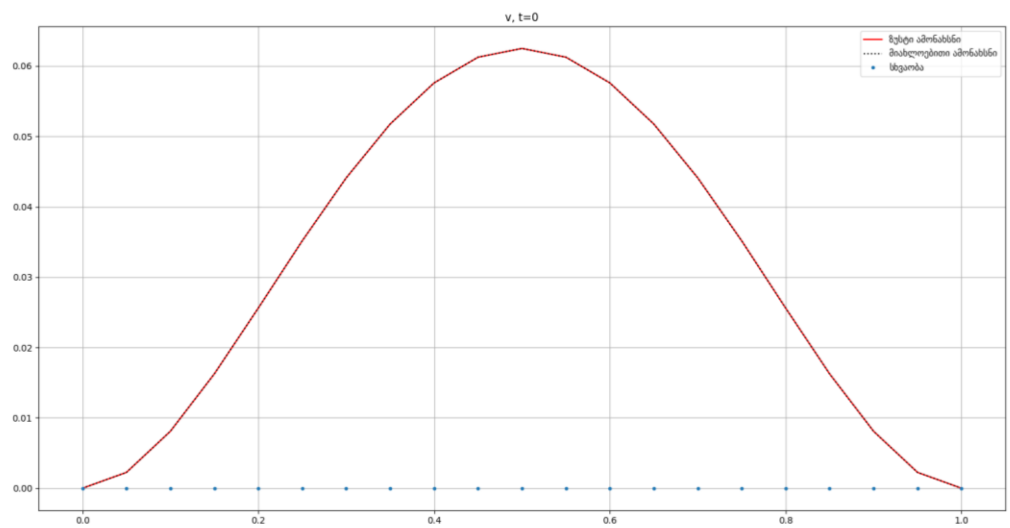
$$u(x,t) = \left(x(1-x)\right)^2(1+t^2),$$
$$v(x,t) = \left(x(1-x)\right)^2(1+t+t^2),$$

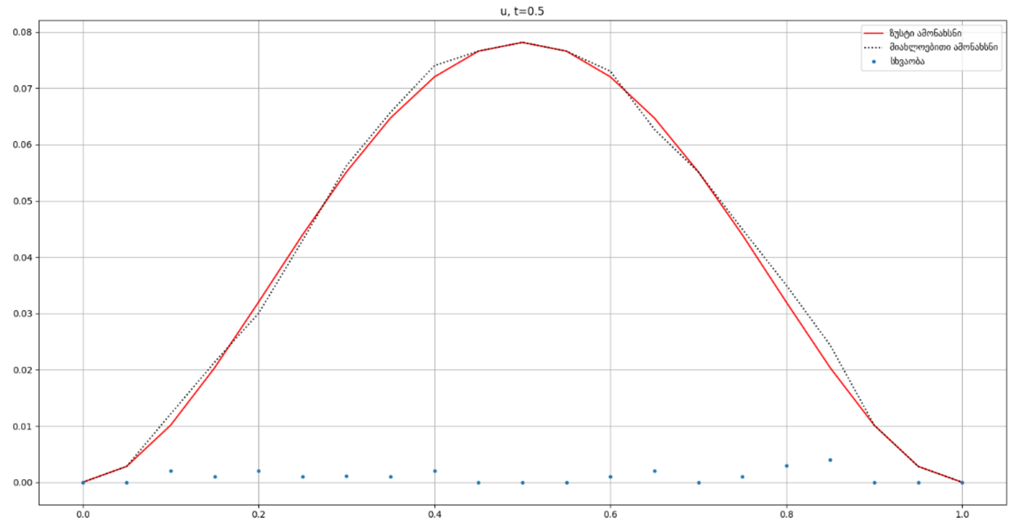
საწყისი პირობებია

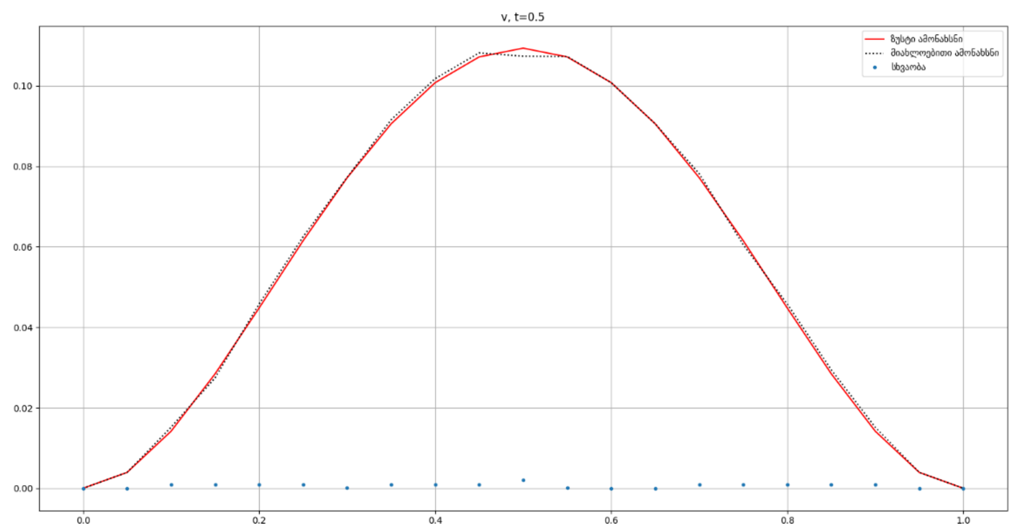
$$u_0(x) = \left(x(1-x)\right)^2,$$
$$v_0(x) = \left(x(1-x)\right)^2.$$

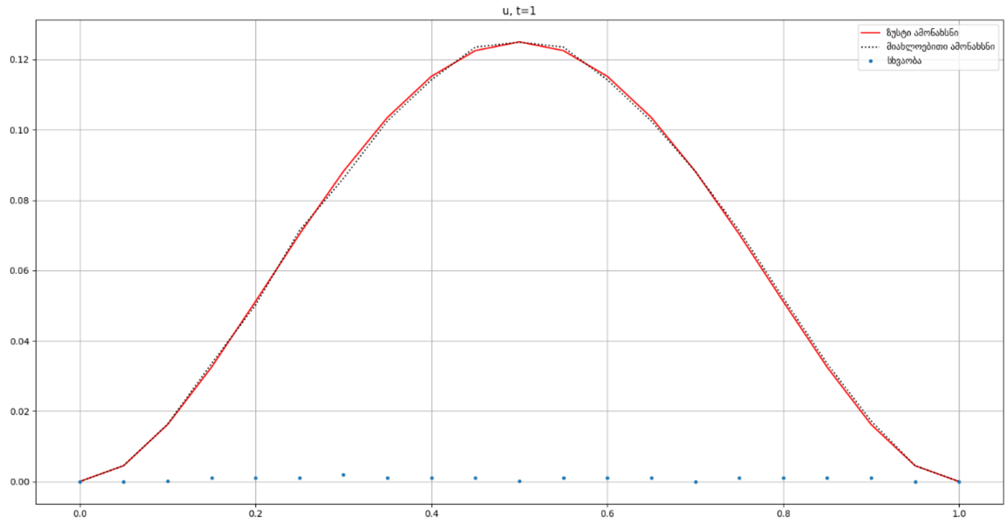
პარამეტრების მნიშვნელობები შემდეგია: $M = 20$ და $N = 1000$. ნახაზებზე მოცემულია ზუსტი და მიახლოებითი ამონახსნები და სხვაობები, დროის სხვადასხვა მომენტისთვის.

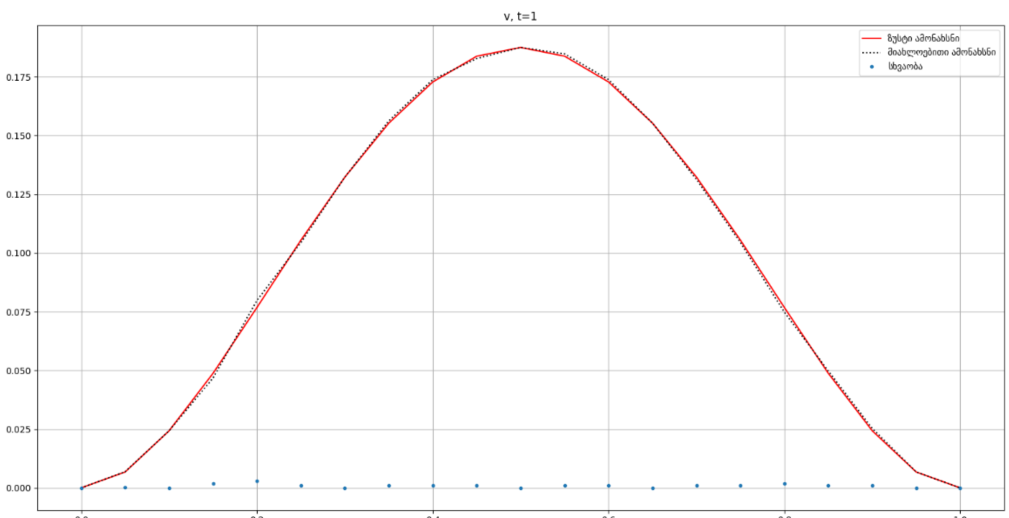

u, t=0
ზუსტი ამონახსნი
მიახლოებითი ამონახსნი
სხვაობა
0.00
0.01
0.02
0.03
0.04
0.05
0.06
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0


v, t=0
ზუსტი ამონახსნი
მიახლოებითი ამონახსნი
სხვაობა
0.00
0.01
0.02
0.03
0.04
0.05
0.06
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0


u, t=0.5
ზუსტი ამონახსნი
მიახლოებითი ამონახსნი
სხვაობა


v, t=0.5
ზუსტი ამონახსნი
მიახლოებითი ამონახსნი
სხვაობა


u, t=1
ზუსტი ამონახსნი
მიახლოებითი ამონახსნი
სხვაობა
0.12
0.10
0.08
0.06
0.04
0.02
0.00
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0


v, t=1
ზუსტი ამონახსნი
მიახლოებითი ამონახსნი
სხვაობა
0.175
0.150
0.125
0.100
0.075
0.050
0.025
0.000
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0

დასკვნა

სამაგისტრო ნაშრომის პირველ თავში განხილულია მეოთხე რიგის ერთი არაწრფივი პარაბოლური ინტეგრო-დიფერენციალური განტოლების საწყის-სასაზღვრო ამოცანა, განხილულია მისი მდგრადობისა და ერთადერთობის საკითხები. ეს ამოცანა პირველად შესწავლილ იქნა [3] ნაშრომში.

მეორე თავში მეოთხე რიგის არაწრფივი პარაბოლური ინტეგრო-დიფერენციალური განტოლებათა ანალოგიური სისტემის საწყის-სასაზღვრო ამოცანისათვის კვლავ ნაჩვენებია ამონახსნის მდგრადობა და ერთადერთობა. ეს ამოცანა შესწავლილია მოცემული სამაგისტრო ნაშრომის ავტორის მიერ გამოსაქვეყნებლად გადაცემულ სტატიაში [21] და შესაბამისი მოხსენება გაკეთებული იქნა ი,ვეკუას სახელობის გამოყენებითი მათემატიკის ინსტიტუტის სემინარის გაფართოებულ სხდომებზე.

მესამე თავში (2.1.1-2.1.8) ამოცანისთვის აგებულია სხვაობიანი სქემა. ამ სქემის გამოყენებით ჩატარებულია რიცხვითი გამოთვლები, მოყვანილია ჩატარებული რიცხვითი ექსპერიმენტების ილუსტრაციები და მიღებული შედეგების ანალიზი.

ლიტერატურა

1. Bai Y., Zhang P. On a class of Volterra nonlinear equations of parabolic type. *Appl. Math. Comp.,* 2010, V.216, N1, p. 236-240.
2. Cessenat M. Mathematical Methods in Electromagnetism: Linear Theory and Applications. World Scientifc Publishers, 1996, 394 p.
3. Chkhikvadze T. On one nonlinear integro-differential parabolic equation. *Rep. Enlarged Sess. Semin. I. Vekua Inst. Appl. Math.,* 2021, V.35, p. 19-22.
4. Chen F. Crank-Nicolson fully discrete H1-Galerkin mixed finite element approximation of one nonlinear integro-differential model. *Abstract and Applied Analysis,* 2014, V.2014, 8 p.
5. Dzhangveladze T.A. First boundary value problem for a nonlinear equation of parabolic type (Russian). *Dokl. Akad. Nauk SSSR,* 1983, V.269, p. 839-842. English translation: *Soviet Phys. Dokl.,* 1983, V.28, p. 323-324.
6. Friedman A. Partial Differential Equations of Parabolic Type. Prentice-Hall, Englewood, NJ, 1964, 368 p.
7. Gagoshidze M. Numerical resolution of one nonlinear parabolic system. *Rep. Enlarged Sess. Semin. I. Vekua Inst. Appl. Math.,* 2010, V.24, p. 40-44.
8. Gordeziani D.G., Dzhangveladze T.A., Korshiya T.K. Existence and uniqueness of the solution of a class of nonlinear parabolic problems (Russian). *Differencial'nye Uravnenyia*, 1983, V.19, p. 1197-1207. English translation: Differential Equations, 1983, V.19, p. 887-895.
9. Hecht F., Jangveladze T., Kiguradze Z., Pironneau O. Finite Difference Scheme for One System of Nonlinear Partial Integro-Differential Equations. *Journal of Applied Mathematics and Computation,* 2018, V.328, p.287-300.
10. Jangveladze T. Investigation and Numerical Solution of Nonlinear Partial Differential and Integro-Differential Models Based on System of Maxwell Equations. *Mem. Differential Equations Math. Phys.*, 2019, V.76, 118 p.
11. Jangveladze T. On one class of nonlinear integro-differential parabolic equations. *Semin. I. Vekua Inst. Appl. Math. Rep.,* 1997, V.23, p.51-87.
12. Jangveladze T., Kiguradze Z., Neta B. Numerical Solution of Three Classes of Nonlinear Parabolic Integro-Differential Equations. Elsevier, 2016, ACADEMIC PRESS, 254 p.
13. Ladyzenskaya O.A., Solonnikov V.A., Uralceva N.N. Linear and Quasilinear Equations of Parabolic Type. Transl. Math. Monographs, V.23, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1968, 667 p.

14. Landau L., Lifschitz E. Electrodynamics of Continuous Media. Course of Theoretical Physics, 8 (Translated from the Russian), Pergamon Press, Oxford-London-New York-Paris, Addision-Wesley Publishing Co., Inc., Reading, Mass., 1960; Russian original: Gosudarstv. Izdat. Tehn-Teor. Lit., Moscow, 1957, 460 p.

15. Laptev G.I. Mathematical features of the problem on the penetration of a magnetic field into a substance for quasistationary approximation (Russian). *Iz V. Vyssh. Uchebn. Zaved. Math.*, 1989, V7, p.70-73. English translation: *Soviet Math.*, 1989, V.33, N7, p.93-97.

16. Laptev G.I. Mathematical singularities of a problem on the penetration of a magnetic field into a substance (Russian). *Zh. Vychisl. Mat. i Mat. Fiz.*, 1988, V.28, p.1332-1345. English translation: *U.S.S.R. Comput. Math. Math. Phys.*, 1990, V.28, p.35–45.

17. Lions J. L. Quelques Methodes de Resolution des Problemes Aux Limites Non-Lineaires. Dunod, Gauthier-Villars, Paris, 1969, 531p.

18. Liao H., Zhao Y. Linearly localized difference schemes for the nonlinear Maxwell model of a magnetic field into a substance. *Appl. Math. Comput.,* 2014, V.233, p.608-622.

19. Lin Y., Yin H.M. Nonlinear parabolic equations with nonlinear functionals. *J. Math. Anal. Appl.*, 1992, V.168, p.28-41.

20. Long N.T., Dinh A.P. Nonlinear parabolic problem associated with the penetration of a magnetic field into a substance. *Math. Mech. Appl. Sci.,* 1993, V.16, p.281-295.

21. Paikidze T. On One System of Fourth-Order Nonlinear Integro-Differential Parabolic Equation. *Rep. Enlarged Sess. Semin. I. Vekua Inst. Appl. Math.,* 2022, V.36 (accepted).

22. Ponomarev S.M. On the diffusion of an intense magnetic field into a thin incompressible conductor (Russian). *Zh. vychisl. Mat. mat. Fiz.*, 1987, V27, p.1424-1428. English translation: *USSR Comput. Math. Math. Phys.*, 1987, V.27, N5, p.98-101.

23. Rheinboldt W.C. Methods for Solving Systems of Nonlinear Equations. SIAM, Philadelphia, 1970, 138 p.

24. Samarskii A.A. The Theory of Difference Schemes. Marcel Dekker, Inc., New York, 2001, 768 p.

25. Sharma N., Pani A.K., Sharma K. Expanded mixed FEM with lowest order RT elements for nonlinear and nonlocal parabolic problems. *Adv. Comput. Math.,* 2018, V.44, N5, p.1537-1571.

26. Sharma N., Khebchareon M., Sharma K., Pani A.K. Finite element Galerkin approximations to a class of nonlinear and nonlocal parabolic problems. *Numer. Meth. PDEs,* 2016, V.32, N4, p.1232-1264.

27. Sharma N., Sharma K.K. Unconditionally stable numerical method for a nonlinear partial integro-differential equation. *Comp. Math. Appl.,* 2014, V.67, N1, p.62-76.

28. Sharma N., Sharma K.K. Finite element method for a nonlinear parabolic integro-differential equation in higher spatial dimensions. *Appl. Math. Model.,* 2015, V.39, N23, p.7338-7350.

29. Thornton G.D., Anderson B.R., Baugh M.A., Robertson G.M., Shapiro J., Thyberg R.C., Neta B. Numerical Solution of a Nonlinear Diffusion Model with Memory. Monterey, California. Naval Postgraduate School; 2018, p.1-22.

30. Yin H.-M. On a nonlinear Maxwell's system in quasistationary electromagnetic fields. *Math. Models Methods Appl. Sci*., 2004, V.14, p.1521-1539.

31. Yin H.-M. On Maxwell's equations in an electromagnetic field with the temperature effect. *SIAM J. Math. Anal*., 1998, V.29, p.637-651.

დანართი

დანართში მოცემულია პროგრამული კოდები, რომელთა საშუალებითაც ჩატარებულია რიცხვითი ექსპერიმენტები. ეს კოდები განკუთვნილია მეთხე რიგის არაწრფივი ინტეგრო-დიფერენციალური განტოლებათა სისტემის შესაბამისი სხვაობიანი სქემისთვის, რომელიც ნაჩვენებია მესამე თავის პირველ პარაგრაფში.

პროგრამული პაკეტი

რიცხვითი გათვლები გაკეთებულია C++-ის გამოყენებით რომლისთვისაც გამოიყენება Studio-ს კომპილერი.

გვაქვს კლასი TP რომელიც განსაზღვურლია Source ფაილებში. ამ კლასის გამოყენებით ხდება მონაცემების დათვლა და დათვლილი მონაცემების შენახვა prn გაფართოების ფაილში. ფაილში მონაცემების შესანახად გამოიყენება PrintMethod ფაილებში არსებული ფუნქციები. Fuctions ფაილში განსაზღვრულია ამოცანის საწყისი და დამხმარე ფუნქციები. MethodsMath კლასი განსაზღვრული MethodsMath ფაილებში, ამ კლასში განსაზღვრულია ფაქტორიზაციის მეთოდები. პროგრამის გამშვები ფუნქცია არის main, რომელიც განსაზღვრულია main ფაილში.

პროგრამული პაკეტი შედგება შემდეგი ფაილებისაგან:

➢ Variables.h

```cpp
#pragma once

#ifndef _VARIABLES_H_
#define _VARIABLES_H_

#include <string.h>
#include <iostream>
#include <stdio.h>
#include <math.h>
#include <algorithm>

#include "TP.h"
#include "Functions.h"
#include "PrintMethods.h"

#define e  2.718281828459045
#define PI 3.141592653589793

// ცვლადები
#define h    0.05
#define tau  0.001
#define T    1.0

#define M   20
#define N   1000

#define epsiloni 1

#define IT 10

#endif
```

- **Functions.h და Functions.cpp**

```cpp
#pragma once

#ifndef _FUNCTIONS_H_
#define _FUNCTIONS_H_

//*****************************************
// ზუსტი ამონახსნი U
double U(double, double);

// ზუსტი ამონახსნი V
double V(double, double);

//*****************************************
// მარჯვენა მხარე
double F(double, double);

double G(double, double);

// ------------------------------------

double _xx(double**, int, int);

double _xx(double, double, double);

double _F(double**, double**, int, int);

double _mod(double*, double*);

void _rewrite(double**);

void _rewrite(double**, double**, int);

#endif
```

```cpp

#include "Variables.h"

// ზუსტი ამონახსნი U
double U(double t, double x){
    return powl(x * (1 - x), 2) * (1 + t * t);
}

// ზუსტი ამონახსნი V
double V(double t, double x){
    return powl(x * (1 - x), 2) * (1 + t + t * t);
}

// მარჯვენა მხარე (j,i)
double F(double t, double x){
    return
        2 * t * powl(x * (x - 1), 2) + 4 * t * (powl(t, 2) + 1) * (2 * x - 1) * (4 * powl(t, 2) + 3 * t + 12) * (powl(x, 2) + 4 * x * (x - 1) +
            powl(x - 1, 2)) + 4 * (powl(t, 2) + 1) * (2 * x - 1) * (powl(t, 3) * (24 * powl(x, 2) - 24 * x + 4) + powl(t, 2) * (18 * powl(x, 2) - 18 * x + 3) + 12 * t * (6 * powl(x, 2) - 6 * x + 1) + 3);
}

// მარჯვენა მხარე (j,i)
double G(double t, double x){
    return
        2 * t * powl(x * (x - 1), 2) + 4 * t * (2 * x - 1) * (powl(t, 2) + t + 1) * (4 * powl(t, 2) + 3 * t + 12) * (powl(x, 2) + 4 * x * (x - 1) +
            powl(x - 1, 2)) + 4 * (2 * x - 1) * (powl(t, 2) + t + 1) * (powl(t, 3) * (24 * powl(x, 2) - 24 * x + 4) + powl(t, 2) * (18 * powl(x, 2) - 18 * x + 3) + 12 * t * (6 * powl(x, 2) - 6 * x + 1) + 3);
}

```

```
double _xx(double** y, int k, int i) {
    return (y[k][i + 1] - 2 * y[k][i] + y[k][i - 1]) / (h * h);
}

double _xx(double y0, double y1, double y2) {
    return (y2 - 2 * y1 + y0) / (h * h);
}

double _F(double** y, double** z, int j, int i) {
    double sum = 0;
    for (int k = 0; k <= j; k++) sum += (powl(_xx(y, k, i), 2) + powl(_xx(z, k, i), 2));
    sum += 1 + tau * sum;
    return sum;
}

double _mod(double* y, double* z) {
    double x = 0;
    double _abs = 0;
    for (int i = 0; i < M; i++) {
        _abs = abs(y[i] - z[i]);
        x = x < _abs ? x : _abs;
    }
    return x;
}

void _rewrite(double** u) {
    for (int i = 0; i < M; i++) {
        u[0][i] = u[1][i];
    }
}

void _rewrite(double** y, double **u, int j) {
    for (int i = 0; i < M; i++) {
        y[j+1][i] = u[1][i];
    }
}
```

- **PrintMethods.h და PrintMethods.cpp**

```cpp
#pragma once

#ifndef _PRINTMATHODS_H_
#define _PRINTMATHODS_H_

#include "Variables.h"

// ფაილში მომაცემების ჩაწერა
// თუ ფაილი არ გაიხსნა დააბრუნებს false, წინააღმდეგ შემთხვევაში დააბრუნებს true
bool PrintFile(double**, char*);

// ფაილის სახელის შექმნა
// 1 - ზუსტი ამონახსნი
// 2 - მიახლოებითი ამონახსნი
void FileName(char*, char, int);

#endif
```

```cpp

#include "Variables.h"

//=====================================

// ფაილში მომაცემების ჩაწერა
// თუ ფაილი არ გაიხსნა დააბრუნებს false, წინააღმდეგ შემთხვევაში დააბრუნებს true
bool PrintFile(double** x, char* FileName)
{
    //
    FILE* f;
    //
    f = fopen(FileName, "w");
    //
    if (f == NULL)
    {
        //
        return false;
    }
    //
    for (int j = 0; j < N + 1; j++)
    {
        for (int i = 0; i < M + 1; i++)
        {
            //
            fprintf(f, "%f\t", x[j][i]);
        }
        //
        fprintf(f, "\n");
    }
    //
    fclose(f);
    //
    return true;
}

// ფაილის სახელის შექმნა
void FileName(char* _FileName, char Name, int i)
{
    _FileName[0] = '\0';
    int n = sprintf(_FileName, "File\\%c%d.prn", Name, i);
}
```

- Source.h და Source.cpp

```cpp
#pragma once

#ifndef _TP_H_
#define _TP_H_

#include "Variables.h"
#include "MethodsMath.h"

class TP
{

private:

    int i, j;

    char* _FileName;

    // ზუსტი ამონახსნი
    double** y, ** z;

    // მიახლოებითი ამონახსნი
    double** _y, ** _z;

    // მარჯვენა მხარე
    double* f, * g;

    // კვანძები
    double* x, * t;

    double** u, **v;

    double f0, f1, f2;
    double y0, y1, y2;
    double z0, z1, z2;

    int it;

    // საზღვრები
    double* k01, * niu;

public:

    // კონსტრუქტორი
    TP();
    ~TP();

    // მეთოდები
    // მონაცემების დათვლა
    void Calculation();
    // მონაცემების ჩაწერა ფაილში
    void Print();
};

#endif
```

```cpp
void TP::Print()
{

    printf("Start Print\n");

    // ზუსტი ამონახსნი y
    FileName(_FileName, 'y', 1);
    // ფაილში ჩაწერა
    if (PrintFile(y, _FileName) == false)
    {
        printf("File cannot open %s\n", _FileName);
    };

    // ზუსტი ამონახსნი z
    FileName(_FileName, 'z', 1);
    // ფაილში ჩაწერა
    if (PrintFile(z, _FileName) == false)
    {
        printf("File cannot open %s\n", _FileName);
    };

    // მიახლოებითი ამონახსნი y
    FileName(_FileName, 'y', 2);
    // ფაილში ჩაწერა
    if (PrintFile(_y, _FileName) == false)
    {
        printf("File cannot open %s\n", _FileName);
    };

    // მიახლოებითი ამონახსნი z
    FileName(_FileName, 'z', 2);
    // ფაილში ჩაწერა
    if (PrintFile(_z, _FileName) == false)
    {
        printf("File cannot open %s\n", _FileName);
    };

    printf("End Print\n\n");
}
```

- **main.cpp**

გრაფიკები აგებულია Python-ის გამოყენებით

```python
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np

h = 0.05
tau = 0.001

M = int(1/h)
N = int(1/tau)

x = [i*h for i in range(M+1)]
x = np.array(x)

# READ PRN FILE
def READPRN(fname, m):
    with open(fname, 'r') as file:
        for i in range(m+1):
            line = file.readline()
        line = line.split()
        for i in range(M+1):
            line[i] = float(line[i])
        line = np.array(line)
    return line

m = int(input())
y1 = READPRN('Project\\Project\\File\\y1.prn', m)
z1 = READPRN('Project\\Project\\File\\z1.prn', m)

y2 = READPRN('Project\\Project\\File\\y2.prn', m)
z2 = READPRN('Project\\Project\\File\\z2.prn', m)

y3 = [abs(y1[i]-y2[i]) for i in range(M+1)]
z3 = [abs(z1[i]-z2[i]) for i in range(M+1)]

# PLOT

#plt.subplot(1, 2, 1)
plt.plot(x, y1, color='red', label='ზუსტი ამონახსნი')
plt.plot(x, y2, color='black', linestyle = 'dotted', label='მიახლოებითი ამონახსნი')
plt.plot(x, y3, '.', label='სხვაობა')
plt.title('u, t=1')

plt.legend()
plt.grid()

plt.show()

#plt.subplot(1, 2, 2)
plt.plot(x, z1, color='red', label='ზუსტი ამონახსნი')
plt.plot(x, z2, color='black', linestyle = 'dotted', label='მიახლოებითი ამონახსნი')
plt.plot(x, z3, '.', label='სხვაობა')
plt.title('v, t=1')

plt.legend()
plt.grid()

plt.show()
```