ივანე ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტი

ზუსტ და საბუნებისმეტყველო მეცნიერებათა ფაკულტეტი

ნინო მჟავანაძე

ერთი არაწრფივი დიფუზიური სისტემის გამოკვლევა და რიცხვითი ამოხსნა

გამოყენებითი მათემატიკის სამაგისტრო პროგრამა

მაგისტრის აკადემიური ხარისხის მოსაპოვებლად

მათემატიკის დეპარტამენტი

რიცხვითი ანალიზისა და გამოთვლითი ტექნოლოგიების კათედრა

სამეცნიერო ხელმძღვანელი: **თემურ ჯანგველაძე**

ფიზიკა-მათემატიკის მეცნიერებათა დოქტორი

პროფესორი

თბილისი 2022

სარჩევი

ანოტაცია

დღეისათვის თანდათანობით უფრო აქტუალური ხდება მათემატიკური მოდელირება, რომლის საშუალებითაც შეიძლება აღიწეროს ბუნებაში მიმდინარე მრავალი პროცესი. ასეთი მოდელები გამოიყენება საბუნებისმეტყველო მეცნიერებებში (როგორიცაა ფიზიკა, ბიოლოგია, ქიმია), საინჟინრო დისციპლინებში (როგორიცაა კომპიუტერული მეცნიერება, ელექტროინჟინერია), ასევე აქტიურად გამოიყენება ეკონომიკაში, სოციოლოგიასა და პოლიტიკაში. მოდელი შეიძლება დაგვეხმაროს სისტემის სხვადასხვა კომპონენტის ეფექტის შესწავლასა და პროგნოზების გაკეთებაში.

მიმდინარე პროცესების უმრავლესობა წარიმართება არაწრფივად, რომელთა აღწერა კერძოწარმოებულიანი დიფერენციალური განტოლებებით არის შესაძლებელი სამეცნიერო დისციპლინებში, რომლებიც მნიშვნელოვნად არიან დამოკიდებულნი მათემატიკაზე, როგორიცაა ფიზიკა და ინჟინერია, გვხდება კერძოწარმოებულიანი დიფერენციალური განტოლებები.

ნაშრომში განხილულია ერთი არაწრფივი დიფუზიური სისტემის საწყის-სასაზღვრო ამოცანის ამონახსნის ყოფაქცევა დროითი ცვლადის უსასრულოდ ზრდისას. გამოკვლეულია სისტემის სტაციონარული ამონახსნის წრფივად მდგრადობის საკითხი და ჰოფის ტიპის ბიფურკაციის წარმოშობის შესაძლებლობა. აგებულია სხვაობიანი სქემა. ჩატარებულია რიცხვითი ექსპერიმენტები და მიღებული შედეგების ანალიზი.

Abstract

Nowadays, mathematical modeling is gradually becoming more applicable. It can be used to describe many natural processes. Such models are used in natural sciences (such as physics, biology, chemistry), engineering disciplines (such as computer science, electrical engineering), and are also actively used in economics, sociology, and politics. A model may help us to study the effects of various components of a system and make predictions about its behavior.

Most of the processes progress non-linearly that can be described using partial differential equations. In scientific disciplines that are heavily reliant on mathematics, such as physics and engineering, partial differential equations are commonplace.

This study examines the behavior of solution of the initial-boundary problem of one nonlinear diffusion system, as time variable tends to infinity. The issue of linear stability of the stationary solution of the system and the possibility of the Hopf-type bifurcation is investigated. The difference scheme is constructed. The numerical experiments and analysis of obtained results are carried out.

შესავალი

სამეცნიერო პრობლემების უმრავლესობა, მათ შორის, როგორიცაა ელექტრომაგნიტური ველის გავრცელება გარემოში მიმდინარეობს არაწრფივად (იხ., მაგალითად, [1], [3], [4], [8] - [11], [14], [17], [18] და მათში მოყვანილი ლიტერატურული მითითებები). შესაბამისი განტოლებათა სისტემები წარმოადგენენ კერძოწარმოებულიან დიფერენციალურ მოდელებს, რომლებიც აღწერენ გამოსაკვლევ პროცესებს.

ნაშრომში შესწავლილია ერთი ერთგანზომილებიანი არაწრფივი დიფუზიური სისტემის ამონახსნის ყოფაქცევა, ასევე მიღებულია ჰოფის ტიპის ბიფურკაციის არსებობის შესაძლებლობა. ასეთი საკითხები მსგავსი მოდელისათვის პირველად შესწავლილ იქნა [2] ნაშრომში და შემდეგ მიეძღვნა ბევრი სამეცნიერო გამოკვლევა (იხ., მაგალითად, [4] - [7]).

სამაგისტრო ნაშრომში განხილული

$$\frac{\partial U}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left(S^{\alpha}\frac{\partial U}{\partial x}\right),\qquad \frac{\partial V}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left(S^{\alpha}\frac{\partial V}{\partial x}\right),$$
$$\frac{\partial S}{\partial t}=-aS^{\beta}+bS^{\gamma}\left[\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^{2}+\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^{2}\right]+cS^{\gamma}\left(\frac{\partial U}{\partial x}+\frac{\partial V}{\partial x}\right)$$

განტოლებათა სისტემა, სადაც α,β,γ ნამდვილი, ხოლო a,b,c დადებითი ნამდვილი რიცხვებია, წარმოადგენს ლ. ლანდაუსა და ე. ლიფშიცის [9] წიგნში გადმოცემული მაქსველის ცნობილი სისტემის ერთგანზომილებიან განზოგადებულ ვარიანტს.

სამაგისტრო ნაშრომი მოიცავს თემის ძირითადი ნაწილის ოთხ პარაგრაფს, კვლევისას გამოყენებულ ლიტერატურას, დანართსა და დასკვნას, რომელშიც შეჯამებულია ჩატარებული კვლევის შედეგები.

ნაშრომის პირველ პარაგრაფში დასმულია საკვლევი ამოცანა და მიღებულია ამ ამოცანის სტაციონარული ამონახსნი.

მეორე პარაგრაფში ნაჩვენებია სტაციონარული ამონახსნის წრფივად მდგრადობა და ჰოფის ტიპის ბიფურკაციის წარმოშობის შესაძლებლობა.

მესამე პარაგრაფში აგებულია სხვაობიანი სქემა.

მეოთხე პარაგრაფში წარმოდგენილია რიცხვითი ექსპერიმენტების გრაფიკული ილუსტრაციები და მათი ანალიზი.

ბოლოს კი დანართის სახით მოცემულია ის ალგორითმი, რომლის საშუალებითაც ჩატარდა რიცხვითი ექსპერიმენტები და განხორციელდა შესაბამისი კომპიუტერული რეალიზაცია.

სამაგისტრო ნაშრომში შესწავლილი საკითხების გარკვეული ნაწილი მზად არის სტატიის სახით ი.ვეკუას სახელობის გამოყენებითი მათემატიკის ინსტიტუტის სემინარის გაფართოებული სხდომების სამეცნიერო ჟურნალში გამოსაქვეყნებლად [13]. სამეცნიერო მოხსენება გაკეთებულია ინსტიტუტის შესაბამისი სემინარის სხდომაზე.

§1. ამოცანის დასმა

ქვემოთ მოცემულ (1) განტოლებათა სისტემისთვის, $Q_t = (0,1) \times (0,t)$ არეში დავსვათ საწყის-სასაზღვრო ამოცანა:

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(S^\alpha \frac{\partial U}{\partial x}\right), \quad \frac{\partial V}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(S^\alpha \frac{\partial V}{\partial x}\right),$$

$$\frac{\partial S}{\partial t} = -aS^\beta + bS^\gamma \left[\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2\right] + cS^\gamma \left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial x}\right), \tag{1}$$

$$U(0,t) = V(0,t) = 0,$$

$$U(1,t) = \psi_1 > 0, \ \ V(1,t) = \psi_2 > 0, \tag{2}$$

$$U(x,0) = U_0(x), \ \ V(x,0) = V_0(x), \ \ S(x,0) = S_0(x) > 0, \tag{3}$$

სადაც α, β, γ ნამდვილი, ხოლო a, b, c, ψ_1, ψ_2 დადებითი, ნამდვილი რიცხვებია, $U_0(x)$, $V_0(x)$, $S_0(x)$ კი - მოცემული ფუნქციები.

ვიპოვოთ $(1)-(3)$ ამოცანის სტაციონარული ამონახსნი.

(1) განტოლებათა სისტემა გადაიწერება შემდეგნაირად:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(S^\alpha \frac{\partial U}{\partial x}\right) = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(S^\alpha \frac{\partial V}{\partial x}\right) = 0,$$

$$-aS^\beta + bS^\gamma \left[\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2\right] + cS^\gamma \left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial x}\right) = 0,$$

რომლის ზოგადი ამონახსნია:

$$U = C_1 S^{-\alpha} x + C_0,$$

$$V = C_2 S^{-\alpha} x + C,$$

$$S = \left[\frac{b}{a}\left[\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2\right] + \frac{c}{a}\left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial x}\right)\right]^{\frac{1}{\beta-\gamma}}.$$

თუ გავითვალისწინებთ (2) სასაზღვრო პირობებს, მივიღებთ, რომ როცა $\beta \neq \gamma$, მაშინ $(1)-(3)$ ამოცანის ერთადერთი (U_s, V_s, S_s) სტაციონარული ამონახსნია:

$$U_s = \psi_1 x,\ \ V_s = \psi_2 x,\ \ S_s = \left[\frac{b}{a}\left({\psi_1}^2 + {\psi_2}^2\right) + \frac{c}{a}(\psi_1 + \psi_2)\right]^{\frac{1}{\beta-\gamma}}. \qquad (4)$$

შემდგ პარაგრაფში ჩვენი მიზანია შევისწავლოთ $(1)-(3)$ ამოცანის (4) სტაციონა-რული ამონახსნის წრფივი მდგრადობის საკითხი.

§2. სტაციონარული ამონახსნის წრფივი მდგრადობა

გადავწეროთ $(1)-(3)$ ამოცანის ამონახსნი შემდეგი სახით:

$$U(x,t) = U_s + u(x,t),$$

$$V(x,t) = V_s + v(x,t), \tag{5}$$

$$S(x,t) = S_s + s(x,t),$$

სადაც $u(x,t)$, $v(x,t)$, $s(x,t)$ მცირე შეშფოთებებია.

(5) სისტემაში შემავალი განტოლებები გავაწარმოოთ t ცვლადით:

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\big(U_s + u(x,t)\big) = \frac{\partial U_s}{\partial t} + \frac{\partial u(x,t)}{\partial t},$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\big(V_s + v(x,t)\big) = \frac{\partial V_s}{\partial t} + \frac{\partial v(x,t)}{\partial t},$$

$$\frac{\partial S}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\Big(S_{s_s} + s(x,t)\Big) = \frac{\partial S_s}{\partial t} + \frac{\partial s(x,t)}{\partial t}.$$

რადგან (U_s, V_s, S_s) სტაციონარული ამონახსნი არ არის დამოკიდებული t ცვლადზე, მაშინ მისი t ცვლადით წარმოებული 0-ის ტოლია.

ამრიგად, მივიღეთ

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial t},$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} = \frac{\partial v}{\partial t},$$

$$\frac{\partial S}{\partial t} = \frac{\partial s}{\partial t}.$$

ამ უკანასკნელისა და (1) სისტემის მარჯვენა მხარეში მარტივი გარდაქმნების გათვალისწინებით, გვაქვს:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha S^{\alpha-1}\frac{\partial S}{\partial x}\cdot\frac{\partial U}{\partial x} + S^{\alpha}\frac{\partial^2 U}{\partial x^2},$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \alpha S^{\alpha-1}\frac{\partial S}{\partial x}\cdot\frac{\partial V}{\partial x} + S^{\alpha}\frac{\partial^2 V}{\partial x^2},$$

$$\frac{\partial s}{\partial t} = -aS^{\beta} + bS^{\gamma}\left[\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2\right] + cS^{\gamma}\left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial x}\right).$$

მიღებული სისტემის მარჯვენა მხარეები ტეილორის მწკრივის წრფივი წევრების გამოყენებით წარმოვადგინოთ შემდეგი სახით:

$$\alpha S^{\alpha-1}\frac{\partial S}{\partial x}\cdot\frac{\partial U}{\partial x} + S^{\alpha}\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = F\left(S, \frac{\partial S}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right)$$

$$= F\left(S_s, \frac{\partial S_s}{\partial x}, \frac{\partial U_s}{\partial x}, \frac{\partial^2 U_s}{\partial x^2}\right) + \frac{\partial F\left(S_s, \frac{\partial S_s}{\partial x}, \frac{\partial U_s}{\partial x}, \frac{\partial^2 U_s}{\partial x^2}\right)}{\partial S}(S - S_s)$$

$$+ \frac{\partial F\left(S_s, \frac{\partial S_s}{\partial x}, \frac{\partial U_s}{\partial x}, \frac{\partial^2 U_s}{\partial x^2}\right)}{\partial \frac{\partial S}{\partial x}}\left(\frac{\partial S}{\partial x} - \frac{\partial S_s}{\partial x}\right) + \frac{\partial F\left(S_s, \frac{\partial S_s}{\partial x}, \frac{\partial U_s}{\partial x}, \frac{\partial^2 U_s}{\partial x^2}\right)}{\partial \frac{\partial U}{\partial x}}\left(\frac{\partial U}{\partial x} - \frac{\partial U_s}{\partial x}\right)$$

$$+ \frac{\partial F\left(S_s, \frac{\partial S_s}{\partial x}, \frac{\partial U_s}{\partial x}, \frac{\partial^2 U_s}{\partial x^2}\right)}{\partial \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}}\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 U_s}{\partial x^2}\right) = \alpha S_s^{\alpha-1}\frac{\partial S}{\partial x}\cdot\frac{\partial U_s}{\partial x} + S_s^{\alpha}\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$$

$$= \psi_1\alpha\left[\frac{b}{a}\left({\psi_1}^2 + {\psi_2}^2\right) + \frac{c}{a}(\psi_1 + \psi_2)\right]^{\frac{\alpha-1}{\beta-\gamma}}\frac{\partial s}{\partial x}$$

$$+ \left[\frac{b}{a}\left({\psi_1}^2 + {\psi_2}^2\right) + \frac{c}{a}(\psi_1 + \psi_2)\right]^{\frac{\alpha}{\beta-\gamma}}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

$$\alpha S^{\alpha-1}\frac{\partial S}{\partial x}\cdot\frac{\partial V}{\partial x}+S^{\alpha}\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}=F\left(S,\frac{\partial S}{\partial x},\frac{\partial U}{\partial x},\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right)=$$

$$=F\left(S_s,\frac{\partial S_s}{\partial x},\frac{\partial V_s}{\partial x},\frac{\partial^2 V_s}{\partial x^2}\right)+\frac{\partial F\left(S_s,\frac{\partial S_s}{\partial x},\frac{\partial V_s}{\partial x},\frac{\partial^2 V_s}{\partial x^2}\right)}{\partial S}(S-S_s)$$

$$+\frac{\partial F\left(S_s,\frac{\partial S_s}{\partial x},\frac{\partial V_s}{\partial x},\frac{\partial^2 V_s}{\partial x^2}\right)}{\partial\frac{\partial S}{\partial x}}\left(\frac{\partial S}{\partial x}-\frac{\partial S_s}{\partial x}\right)+\frac{\partial F\left(S_s,\frac{\partial S_s}{\partial x},\frac{\partial V_s}{\partial x},\frac{\partial^2 V_s}{\partial x^2}\right)}{\partial\frac{\partial V}{\partial x}}\left(\frac{\partial V}{\partial x}-\frac{\partial V_s}{\partial x}\right)$$

$$+\frac{\partial F\left(S_s,\frac{\partial S_s}{\partial x},\frac{\partial V_s}{\partial x},\frac{\partial^2 V_s}{\partial x^2}\right)}{\partial\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}}\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 V_s}{\partial x^2}\right)=\alpha S_s^{\alpha-1}\frac{\partial S}{\partial x}\cdot\frac{\partial V_s}{\partial x}+S_s^{\alpha}\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}$$

$$=\psi_2\alpha\left[\frac{b}{a}\left({\psi_1}^2+{\psi_2}^2\right)+\frac{c}{a}(\psi_1+\psi_2)\right]^{\frac{\alpha-1}{\beta-\gamma}}\frac{\partial s}{\partial x}$$

$$+\left[\frac{b}{a}\left({\psi_1}^2+{\psi_2}^2\right)+\frac{c}{a}(\psi_1+\psi_2)\right]^{\frac{\alpha}{\beta-\gamma}}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2},$$

$$-aS^{\beta}+bS^{\gamma}\left[\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^{2}+\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^{2}\right]+cS^{\gamma}\left(\frac{\partial U}{\partial x}+\frac{\partial V}{\partial x}\right)=F\left(S,\frac{\partial S}{\partial x},\frac{\partial U}{\partial x},\frac{\partial^{2}U}{\partial x^{2}}\right)=$$

$$=F\left(S_s,\frac{\partial U_s}{\partial x},\frac{\partial V_s}{\partial x}\right)+\frac{\partial F\left(S_s,\frac{\partial U_s}{\partial x},\frac{\partial V_s}{\partial x}\right)}{\partial S}(S-S_s)+\frac{\partial F\left(S_s,\frac{\partial U_s}{\partial x},\frac{\partial V_s}{\partial x}\right)}{\partial\frac{\partial U}{\partial x}}\left(\frac{\partial U}{\partial x}-\frac{\partial U_s}{\partial x}\right)$$

$$+\frac{\partial F\left(S_s,\frac{\partial U_s}{\partial x},\frac{\partial V_s}{\partial x}\right)}{\partial\frac{\partial V}{\partial x}}\left(\frac{\partial V}{\partial x}-\frac{\partial V_s}{\partial x}\right)$$

$$=-aS_s^{\beta}+bS_s^{\gamma}\left[\left(\frac{\partial U_s}{\partial x}\right)^{2}+\left(\frac{\partial V_s}{\partial x}\right)^{2}\right]+cS_s^{\gamma}\left(\frac{\partial U_s}{\partial x}+\frac{\partial V_s}{\partial x}\right)$$

$$+\left(-a\beta S_s^{\beta-1}+b\gamma S_s^{\gamma-1}\left[\left(\frac{\partial U_s}{\partial x}\right)^{2}+\left(\frac{\partial V_s}{\partial x}\right)^{2}\right]+c\gamma S_s^{\gamma-1}\left(\frac{\partial U_s}{\partial x}+\frac{\partial V_s}{\partial x}\right)\right)s$$

$$+\left(2b\frac{\partial U_s}{\partial x}+c\right)S_s^{\gamma}\frac{\partial u}{\partial x}+\left(2b\frac{\partial V_s}{\partial x}+c\right)S_s^{\gamma}\frac{\partial v}{\partial x}$$

$$=-a\left[\frac{b}{a}\left({\psi_1}^2+{\psi_2}^2\right)+\frac{c}{a}(\psi_1+\psi_2)\right]^{\frac{\beta}{\beta-\gamma}}$$

$$+b\left[\frac{b}{a}\left({\psi_1}^2+{\psi_2}^2\right)+\frac{c}{a}(\psi_1+\psi_2)\right]^{\frac{\gamma}{\beta-\gamma}}\left({\psi_1}^2+{\psi_2}^2\right)$$

$$+c\left[\frac{b}{a}\left({\psi_1}^2+{\psi_2}^2\right)+\frac{c}{a}(\psi_1+\psi_2)\right]^{\frac{\gamma}{\beta-\gamma}}(\psi_1+\psi_2)$$

$$+\left(-a\beta\left[\frac{b}{a}\left({\psi_1}^2+{\psi_2}^2\right)+\frac{c}{a}(\psi_1+\psi_2)\right]^{\frac{\beta-1}{\beta-\gamma}}\right.$$

$$+b\gamma\left[\frac{b}{a}\left({\psi_1}^2+{\psi_2}^2\right)+\frac{c}{a}(\psi_1+\psi_2)\right]^{\frac{\gamma-1}{\beta-\gamma}}\left({\psi_1}^2+{\psi_2}^2\right)$$

$$\left.+c\gamma\left[\frac{b}{a}\left({\psi_1}^2+{\psi_2}^2\right)+\frac{c}{a}(\psi_1+\psi_2)\right]^{\frac{\gamma-1}{\beta-\gamma}}(\psi_1+\psi_2)\right)s$$

$$+\left(2b\frac{\partial U_s}{\partial x}+c\right)\left[\frac{b}{a}\left({\psi_1}^2+{\psi_2}^2\right)+\frac{c}{a}(\psi_1+\psi_2)\right]^{\frac{\gamma}{\beta-\gamma}}\frac{\partial u}{\partial x}$$

$$+\left(2b\frac{\partial V_s}{\partial x}+c\right)\left[\frac{b}{a}\left({\psi_1}^2+{\psi_2}^2\right)+\frac{c}{a}(\psi_1+\psi_2)\right]^{\frac{\gamma}{\beta-\gamma}}\frac{\partial v}{\partial x}$$

$$=-a\left[\frac{b}{a}\left({\psi_1}^2+{\psi_2}^2\right)+\frac{c}{a}(\psi_1+\psi_2)\right]^{\frac{\beta}{\beta-\gamma}}$$

$$+\left[\frac{b}{a}\left({\psi_1}^2+{\psi_2}^2\right)+\frac{c}{a}(\psi_1+\psi_2)\right]^{\frac{\gamma}{\beta-\gamma}} a\left[\frac{b}{a}\left({\psi_1}^2+{\psi_2}^2\right)+\frac{c}{a}(\psi_1+\psi_2)\right]$$

$$+\left(-a\beta\left[\frac{b}{a}\left({\psi_1}^2+{\psi_2}^2\right)+\frac{c}{a}(\psi_1+\psi_2)\right]^{\frac{\beta-1}{\beta-\gamma}}\right.$$

$$\left.+\gamma\left[\frac{b}{a}\left({\psi_1}^2+{\psi_2}^2\right)+\frac{c}{a}(\psi_1+\psi_2)\right]^{\frac{\gamma-1}{\beta-\gamma}} a\left[\frac{b}{a}\left({\psi_1}^2+{\psi_2}^2\right)+\frac{c}{a}(\psi_1+\psi_2)\right]\right)s$$

$$+(2b\psi_1+c)\left[\frac{b}{a}\left({\psi_1}^2+{\psi_2}^2\right)+\frac{c}{a}(\psi_1+\psi_2)\right]^{\frac{\gamma}{\beta-\gamma}}\frac{\partial u}{\partial x}$$

$$+(2b\psi_2+c)\left[\frac{b}{a}\left({\psi_1}^2+{\psi_2}^2\right)+\frac{c}{a}(\psi_1+\psi_2)\right]^{\frac{\gamma}{\beta-\gamma}}\frac{\partial v}{\partial x}$$

$$=-a\left[\frac{b}{a}\left({\psi_1}^2+{\psi_2}^2\right)+\frac{c}{a}(\psi_1+\psi_2)\right]^{\frac{\beta}{\beta-\gamma}}+a\left[\frac{b}{a}\left({\psi_1}^2+{\psi_2}^2\right)+\frac{c}{a}(\psi_1+\psi_2)\right]^{\frac{\gamma+\beta-\gamma}{\beta-\gamma}}$$

$$+\left(-a\beta\left[\frac{b}{a}\left({\psi_1}^2+{\psi_2}^2\right)+\frac{c}{a}(\psi_1+\psi_2)\right]^{\frac{\beta-1}{\beta-\gamma}}\right.$$

$$\left.+a\gamma\left[\frac{b}{a}\left({\psi_1}^2+{\psi_2}^2\right)+\frac{c}{a}(\psi_1+\psi_2)\right]^{\frac{\gamma-1+\beta-\gamma}{\beta-\gamma}}\right)s$$

$$+(2b\psi_1+c)\left[\frac{b}{a}\left({\psi_1}^2+{\psi_2}^2\right)+\frac{c}{a}(\psi_1+\psi_2)\right]^{\frac{\gamma}{\beta-\gamma}}\frac{\partial u}{\partial x}$$

$$+(2b\psi_2+c)\left[\frac{b}{a}\left({\psi_1}^2+{\psi_2}^2\right)+\frac{c}{a}(\psi_1+\psi_2)\right]^{\frac{\gamma}{\beta-\gamma}}\frac{\partial v}{\partial x}$$

$$=(\gamma-\beta)a\left[\frac{b}{a}\left({\psi_1}^2+{\psi_2}^2\right)+\frac{c}{a}(\psi_1+\psi_2)\right]^{\frac{\beta-1}{\beta-\gamma}}s$$

$$+(2b\psi_1+c)\left[\frac{b}{a}\left({\psi_1}^2+{\psi_2}^2\right)+\frac{c}{a}(\psi_1+\psi_2)\right]^{\frac{\gamma}{\beta-\gamma}}\frac{\partial u}{\partial x}$$

$$+(2b\psi_2+c)\left[\frac{b}{a}\left({\psi_1}^2+{\psi_2}^2\right)+\frac{c}{a}(\psi_1+\psi_2)\right]^{\frac{\gamma}{\beta-\gamma}}\frac{\partial v}{\partial x}.$$

მაშინ (1) განტოლებათა სისტემა მიიღებს სახეს:

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\alpha_s\frac{\partial s}{\partial x}+\beta_s\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$
$$\frac{\partial v}{\partial t}=\gamma_s\frac{\partial s}{\partial x}+\beta_s\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}, \qquad (6)$$
$$\frac{\partial s}{\partial t}=v_s s+\eta_s\frac{\partial u}{\partial x}+\mu_s\frac{\partial v}{\partial x},$$

სადაც

$$\alpha_s=\psi_1\alpha\left[\frac{b}{a}\left({\psi_1}^2+{\psi_2}^2\right)+\frac{c}{a}(\psi_1+\psi_2)\right]^{\frac{\alpha-1}{\beta-\gamma}},$$

$$\beta_s=\left[\frac{b}{a}\left({\psi_1}^2+{\psi_2}^2\right)+\frac{c}{a}(\psi_1+\psi_2)\right]^{\frac{\alpha}{\beta-\gamma}},$$

$$\gamma_s=\psi_2\alpha\left[\frac{b}{a}\left({\psi_1}^2+{\psi_2}^2\right)+\frac{c}{a}(\psi_1+\psi_2)\right]^{\frac{\alpha-1}{\beta-\gamma}},$$

$$v_s=(\gamma-\beta)a\left[\frac{b}{a}\left({\psi_1}^2+{\psi_2}^2\right)+\frac{c}{a}(\psi_1+\psi_2)\right]^{\frac{\beta-1}{\beta-\gamma}},$$

$$\eta_s=(2b\psi_1+c)\left[\frac{b}{a}\left({\psi_1}^2+{\psi_2}^2\right)+\frac{c}{a}(\psi_1+\psi_2)\right]^{\frac{\gamma}{\beta-\gamma}},$$

$$\mu_s=(2b\psi_2+c)\left[\frac{b}{a}\left({\psi_1}^2+{\psi_2}^2\right)+\frac{c}{a}(\psi_1+\psi_2)\right]^{\frac{\gamma}{\beta-\gamma}}.$$

შემოვიტანოთ შემდეგი აღნიშვნები:

$$u(x,t)=\bar{u}(x)e^{\omega t},\ \ v(x,t)=\bar{v}(x)e^{\omega t},\ \ s(x,t)=\bar{s}(x)e^{\omega t} \qquad (7)$$

და ჩავსვათ (6) სისტემაში. (6) სისტემის მარცხენა მხარეში შემდეგი გარდაქმნების შედეგად:

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial t}\left(\bar{u}(x)e^{\omega t}\right)=\bar{u}(x)e^{\omega t}\cdot\omega=\omega\bar{u},$$

$$\frac{\partial v}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial t}\left(\bar{v}(x)e^{\omega t}\right)=\bar{v}(x)e^{\omega t}\cdot\omega=\omega\bar{v},$$

$$\frac{\partial s}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial t}\left(\bar{s}(x)e^{\omega t}\right)=\bar{s}(x)e^{\omega t}\cdot\omega=\omega\bar{s},$$

გვექნება, რომ

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \omega\bar{u},$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \omega\bar{v},$$

$$\frac{\partial s}{\partial t} = \omega\bar{s}.$$

ამრიგად, მივიღებთ სისტემას

$$\omega\bar{u} = \alpha_s\frac{\partial\bar{s}}{\partial x} + \beta_s\frac{\partial^2\bar{u}}{\partial x^2},$$

$$\omega\bar{v} = \gamma_s\frac{\partial\bar{s}}{\partial x} + \beta_s\frac{\partial^2\bar{v}}{\partial x^2}, \quad (8)$$

$$\omega\bar{s} = \nu_s\bar{s} + \eta_s\frac{\partial\bar{u}}{\partial x} + \mu_s\frac{\partial\bar{v}}{\partial x}.$$

ვთქვათ, $\bar{u}(x) = u_0e^{ikx}$, $\bar{v}(x) = v_0e^{ikx}$, $\bar{s}(x) = s_0e^{ikx}$. ამ ტოლობების (8) სისტემაში ჩასმით, გვაქვს:

$$\omega u_0e^{ikx} = \alpha_s\frac{\partial}{\partial x}\left(e^{ikx}s_0\right) + \beta_s\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(e^{ikx}u_0\right) = \alpha_se^{ikx}\cdot iks_0 + \beta_se^{ikx}\cdot i^2k^2u_0$$
$$= \alpha_sike^{ikx}s_0 - \beta_se^{ikx}k^2u_0,$$

$$\omega v_0e^{ikx} = \gamma_s\frac{\partial}{\partial x}\left(e^{ikx}s_0\right) + \beta_s\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(e^{ikx}v_0\right) = \gamma_sike^{ikx}s_0 - \beta_se^{ikx}k^2v_0,$$

$$\omega s_0e^{ikx} = \nu_ss_0e^{ikx} + \eta_s\frac{\partial}{\partial x}\left(e^{ikx}u_0\right) + \mu_s\frac{\partial}{\partial x}\left(e^{ikx}v_0\right) = \nu_ss_0e^{ikx} + \eta_sike^{ikx}u_0 + \mu_sike^{ikx}v_0,$$

საიდანაც

$$\omega u_0e^{ikx} + \beta_se^{ikx}k^2u_0 - \alpha_sike^{ikx}s_0 = e^{ikx}(\omega u_0 + \beta_sk^2u_0 - \alpha_siks_0)$$
$$= e^{ikx}(u_0(\omega + \beta_sk^2) - \alpha_siks_0) = 0,$$

$$\omega v_0e^{ikx} + \beta_se^{ikx}k^2v_0 - \gamma_sike^{ikx}s_0 = e^{ikx}(\omega v_0 + \beta_sk^2v_0 - \gamma_siks_0)$$
$$= e^{ikx}(v_0(\omega + \beta_sk^2) - \gamma_siks_0) = 0,$$

$$\eta_sike^{ikx}u_0 + \mu_sike^{ikx}v_0 + \nu_ss_0e^{ikx} - \omega s_0e^{ikx} = e^{ikx}(\eta_siku_0 + \mu_sikv_0 + \nu_ss_0 - \omega s_0)$$
$$= e^{ikx}[\eta_siku_0 + \mu_sikv_0 + s_0(\nu_s - \omega)] = 0,$$

თუ ამ უკანასკნელს გავყოფთ არანულოვან e^{ikx} წევრზე, მივიღებთ სისტემას:

$$u_0(\omega+\beta_s k^2)-\alpha_s iks_0=0,$$

$$v_0(\omega+\beta_s k^2)-\gamma_s iks_0=0,$$

$$\eta_s iku_0+\mu_s ikv_0+s_0(v_s-\omega)=0,$$

რომელსაც აქვს არატრივიალური ამონახსნი, თუ მისი მთავარი დეტერმინანტი $\Delta(\omega,k)=0$. ამრიგად,

$$\Delta(\omega,k)=\begin{vmatrix}\omega+\beta_s k^2 & 0 & -ik\alpha_s\\ 0 & \omega+\beta_s k^2 & -ik\gamma_s\\ ik\eta_s & ik\mu_s & v_s-\omega\end{vmatrix}$$
$$=(\omega+\beta_s k^2)^2(v_s-\omega)-(\omega+\beta_s k^2)k^2\eta_s\alpha_s-(\omega+\beta_s k^2)k^2\mu_s\gamma_s$$
$$=(\omega+\beta_s k^2)[(\omega+\beta_s k^2)(v_s-\omega)-k^2\eta_s\alpha_s-k^2\mu_s\gamma_s]=0.$$

რადგან $\omega+\beta_s k^2=0$ შემთხვევა ტრივიალურია, განვიხილოთ შემდეგი ტოლობა:

$$(\omega+\beta_s k^2)(v_s-\omega)-k^2\eta_s\alpha_s-k^2\mu_s\gamma_s=0.$$

შემდეგი მარტივი გარდაქმნებით:

$$\omega v_s-\omega^2+\beta_s k^2 v_s-\beta_s k^2\omega-k^2\eta_s\alpha_s-k^2\mu_s\gamma_s=0,$$

გვაქვს

$$k^2(\beta_s v_s-\beta_s\omega-\alpha_s\eta_s-\gamma_s\mu_s)-\omega^2+v_s\omega=0. \tag{9}$$

(9) განტოლების k-ს მიმართ ამოხსნა გვაძლევს $k_1=-k_2$. შედეგად მივიღებთ, რომ

$$\bar{u}(x)=\frac{ik_1\alpha_s}{\omega+\beta_s k_1^2}\left(S_1e^{ik_1x}-S_2e^{-ik_1x}\right),$$

$$\bar{v}(x)=\frac{ik_1\gamma_s}{\omega+\beta_s k_1^2}\left(S_1e^{ik_1x}-S_2e^{-ik_1x}\right), \tag{10}$$

$$\bar{s}(x)=S_1e^{ik_1x}+S_2e^{-ik_1x}.$$

თუ გავითვალისწინებთ მე-(5)-დან $U(x,t)=U_s+u(x,t)$ ტოლობასა და მე-(7)-დან $u(x,t)=\bar{u}(x)e^{\omega t}$ ტოლობას, მაშინ გვექნება

$$U(x,t)=U_s+u(x,t)=\psi_1x+\bar{u}(x)e^{\omega t}.$$

ხოლო $U(0,t)=0,\ U(1,t)=\psi_1>0$ სასაზღვრო პირობების გათვალისწინების შემდეგ, მივიღებთ:

$$\begin{cases} U(0,t)=\psi_1\cdot 0+\bar{u}(0)e^{\omega t}=0, \\ U(1,t)=\psi_1\cdot 1+\bar{u}(1)e^{\omega t}=\psi_1, \end{cases} => \begin{cases} \bar{u}(0)e^{\omega t}=0, \\ \psi_1+\bar{u}(1)e^{\omega t}=\psi_1, \end{cases} => \begin{cases} \bar{u}(0)=0, \\ \bar{u}(1)=0. \end{cases}$$

ამრიგად,

$$\bar{u}(0)=\bar{u}(1)=0.$$

აქედან და (10) ტოლობებიდან, გვაქვს

$$\bar{u}(0)=\frac{ik_1\alpha_s}{\omega+\beta_s k_1^2}\left(S_1e^{ik_1\cdot 0}-S_2e^{-ik_1\cdot 0}\right)=\frac{ik_1\alpha_s}{\omega+\beta_s k_1^2}(S_1-S_2)=0,$$

$$\bar{u}(1)=\frac{ik_1\alpha_s}{\omega+\beta_s k_1^2}\left(S_1e^{ik_1\cdot 1}-S_2e^{-ik_1\cdot 1}\right)=\frac{ik_1\alpha_s}{\omega+\beta_s k_1^2}\left(S_1e^{ik_1}-S_2e^{-ik_1}\right)=0,$$

საიდანაც გამომდინარეობს, რომ

$$S_1-S_2=0,$$

$$S_1e^{ik_1x}-S_2e^{-ik_1x}=0.$$

ამ სისტემას გააჩნია არანულოვანი ამონახსნი მაშინ, როცა მისი მთავარი დეტერმინანტი 0-ის ტოლია. ამრიგად,

$$\Delta=\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ e^{ik_1} & -e^{-ik_1} \end{vmatrix}=e^{ik_1x}-e^{-ik_1x}=\cos k_1+isink_1-(cosk_1-isink_1)=2isink_1=0,$$

საიდანაც $k_{1n}=\pi n, n\epsilon Z$.

გადავწეროთ (9) ტოლობა შემდეგი სახით

$$\omega_n^2+P_n(\beta_s,k_n,v_s)\omega_n+L_n(\alpha_s,\beta_s,k_n,v_s,\eta_s,\mu_s,\gamma_s)=0,$$

სადაც

$$P_n(\beta_s,k_n,v_s)=\beta_s k_n^2-\ v_s,$$

$$L_n(\alpha_s,\beta_s,k_n,v_s,\eta_s,\mu_s,\gamma_s)=-\beta_s v_s k_n^2+\alpha_s\eta_s k_n^2+\gamma_s\mu_s k_n^2.$$

ყოველი n სიდიდისათვის, თუ $Re(\omega_n)<0$, მაშინ $(1)-(3)$ ამოცანის სტაციონარული ამონახსნი წრფივად მდგრადია. როცა $2\alpha+\beta-\gamma>0$, მაშინ $L_n(\alpha_s,\beta_s,k_n,v_s,\eta_s,\mu_s,\gamma_s)>0$. ამრიგად, ამონახსნი წრფივად მდგრადია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა

$$P_n(\beta_s, k_n, v_s) = \beta_s k_n^2 - v_s =$$

$$= \left[\frac{b}{a}\left({\psi_1}^2 + {\psi_2}^2\right) + \frac{c}{a}(\psi_1 + \psi_2)\right]^{\frac{\alpha}{\beta-\gamma}} \pi^2 n^2$$

$$- (\gamma - \beta) a \left[\frac{b}{a}\left({\psi_1}^2 + {\psi_2}^2\right) + \frac{c}{a}(\psi_1 + \psi_2)\right]^{\frac{\beta-1}{\beta-\gamma}} > 0,$$

აქედან

$$(\gamma - \beta) a \left[\frac{b}{a}\left({\psi_1}^2 + {\psi_2}^2\right) + \frac{c}{a}(\psi_1 + \psi_2)\right]^{\frac{\beta-1}{\beta-\gamma} - \frac{\alpha}{\beta-\gamma}} < \pi^2 n^2$$

ანუ

$$a(\gamma - \beta) \left[\frac{b}{a}\left({\psi_1}^2 + {\psi_2}^2\right) + \frac{c}{a}(\psi_1 + \psi_2)\right]^{\frac{\beta-\alpha-1}{\beta-\gamma}} < \pi^2, \ \ (n = 1).$$

მაშასადამე, სამართლიანია შემდეგი დებულება.

თეორემა . *თუ* $2\alpha + \beta - \gamma > 0$, $\beta \neq \gamma$, *მაშინ (1) – (3) ამოცანის*

$$\left(\psi_1 x, \qquad \psi_2 x, \quad \left[\frac{b}{a}\left({\psi_1}^2 + {\psi_2}^2\right) + \frac{c}{a}(\psi_1 + \psi_2)\right]^{\frac{1}{\beta-\gamma}}\right)$$

სტაციონარული ამონახსნის წრფივად მდგრადობისათვის აუცილებელი და საკმარისია შემდეგი უტოლობის შესრულება

$$a(\gamma - \beta) \left[\frac{b}{a}\left({\psi_1}^2 + {\psi_2}^2\right) + \frac{c}{a}(\psi_1 + \psi_2)\right]^{\frac{\beta-\alpha-1}{\beta-\gamma}} < \pi^2.$$

შენიშვნა. უკანასკნელი უტოლობიდან ცხადია, რომ როცა $\gamma < \beta$, მაშინ $(1) - (3)$ ამოცანის სტაციონარული ამონახსნი წრფივად მდგრადია.

ვთქვათ, $\gamma > \beta$, $\beta - \alpha - 1 \neq 0$ და $\psi_1 = \psi_2 = \psi > 0$. მაშინ

$$2\frac{b}{a}\psi^2 + 2\frac{c}{a}\psi - \left(\frac{\pi^2}{a(\gamma - \beta)}\right)^{\frac{\beta-\gamma}{\beta-\alpha-1}} < 0$$

უტოლობის დადებითი ამონახსნია

$$\psi_c = \frac{-c + \sqrt{c^2 + 2ab\left(\frac{\pi^2}{a(\gamma-\beta)}\right)^{\frac{\beta-\gamma}{\beta-\alpha-1}}}}{2b},$$

რომლისთვისაც სამართლიანია დამოკიდებულებები:

$$P_1(\psi_c,\alpha,\beta,\gamma) = 0, \qquad P_n(\psi_c,\alpha,\beta,\gamma) > 0, \qquad n = 2,3, \ . \ . \ . \ .$$

თუ დამატებით დავუშვებთ, რომ $\beta - \alpha - 1 < 0$, მაშინ, როცა $\psi \in (0,\psi_c)$, $\psi = \psi_1 = \psi_2$ სიდიდისთვის ვღებულობთ $P_n(\psi,\alpha,\beta,\gamma) > 0$, $n \in Z_0$.

ამრიგად, თუ $\psi \in (0,\psi_c)$, მაშინ $(1) - (3)$ ამოცანის სტაციონარული ამონახსნი წრფივად მდგრადია, თუ $\psi \in (\psi_c,+\infty)$, მაშინ - არამდგრადი. თუ $\psi = \psi_c$, მაშინ $Re(\omega_1) = 0$ და $Im(\omega_1) \neq 0$. რაც იმას ნიშნავს, რომ ჩნდება ჰოფის ბიფურკაციული მოვლენის [12] წარმოშობის შესაძლებლობა ანუ მცირე შეშფოთებებმა სტაციონარული ამონახსნი შეიძლება გადაიყვანოს დროით პერიოდულ ამონახსნში.

§3. სხვაობიანი სქემა

გამოთვლით მათემატიკაში ცნობილი მიდგომების გამოყენებით (იხ. მაგალითად, [16] და მასში მოცემული ლიტერატურული მითითებები) და [4] - [6] ნაშრომებზე დაყრდნობით ამ პარაგრაფში აგებულია შესწავლილი ამოცანის შესაბამისი სასრულ-სხვაობიანი სქემა. შემდეგ კი ცნობილი იტერაციული პროცედურის [15] გამოყენებით აგებულია გამოთვლითი ალგორითმი და ჩატარებულია შესაბამისი რიცხვითი ექსპერიმენტები.

(1) – (3) საწყის-სასაზღვრო ამოცანა განვიხილოთ $Q_T = [0,1] \times [0,T]$ არეში. $[0,1]$ და $[0,T]$ მონაკვეთები დავყოთ, შესაბამისად, M და N ტოლ ნაწილებად და შემოვიღოთ აღნიშვნები:

$$\overline{\omega}_h = \left\{x_i = ih, \quad i = 0, \dots, M, \quad h = \frac{1}{M}\right\}, \quad \omega_h^* = \{x_i = (i - 1/2)h, \quad i = 1, \dots, M\},$$

$$\omega_\tau = \left\{t_j = j\tau,\ j = 0, \dots, N,\ \tau = \frac{T}{N}\right\}, \quad \varpi_{h\tau} = \varpi_h \times \omega_\tau,\ \ \omega_{h\tau}^* = \omega_h^* \times \omega_\tau,$$

$$y = y_i^j = y(x_i, t_j), \quad \hat{y} = y_i^{j+1} = y(x_i, t_{j+1}),$$

$$y_t = \frac{\hat{y} - y}{\tau}, \quad y_{\bar{x}} = \frac{y_i^j - y_{i-1}^j}{h}, \quad y_x = \frac{y_{i+1}^j - y_i^j}{h},$$

$$y_{\bar{x}x} = \frac{y_{i+1}^j - 2y_i^j + y_{i-1}^j}{h^2}.$$

ბადური ფუნქციები განსაზღვრული არიან (x_i, t_{j+1}) წერტილში.

(1) – (3) ამოცანაში შემოვიტანოთ შემდეგი აღნიშვნები:

$$E = S^{\frac{1}{2}}, \quad E^{2\alpha} = S^\alpha, \quad E^{2\beta} = S^\beta, \quad E^{2\gamma} = S^\gamma.$$

რადგან

$$\frac{\partial S}{\partial t} = 2E\frac{\partial E}{\partial t},$$

ხოლო

$$\frac{\partial S}{\partial t} = -aS^\beta + bS^\gamma\left[\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2\right] + cS^\gamma\left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial x}\right).$$

საიდანაც გვაქვს

$$2E\frac{\partial E}{\partial t}=-aE^{2\beta}+bE^{2\gamma}\left[\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2\right]+cE^{2\gamma}\left(\frac{\partial U}{\partial x}+\frac{\partial V}{\partial x}\right),$$

$$\frac{\partial E}{\partial t}=-\frac{a}{2}E^{2\beta-1}+\frac{b}{2}E^{2\gamma-1}\left[\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2\right]+\frac{c}{2}E^{2\gamma}\left(\frac{\partial U}{\partial x}+\frac{\partial V}{\partial x}\right),$$

მაშინ მივიღებთ შემდეგ ეკვივალენტურ ამოცანას:

$$\begin{gathered}\frac{\partial U}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left(E^{2\alpha}\frac{\partial U}{\partial x}\right), \qquad \frac{\partial V}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left(E^{2\alpha}\frac{\partial V}{\partial x}\right), \\ \frac{\partial E}{\partial t}=-\frac{a}{2}E^{2\beta-1}+\frac{b}{2}E^{2\gamma-1}\left[\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2\right]+\frac{c}{2}E^{2\gamma}\left(\frac{\partial U}{\partial x}+\frac{\partial V}{\partial x}\right)\end{gathered} \qquad (11)$$

$$\begin{gathered}U(O,t)=V(0,t)=0, \\ U(1,t)=\psi_1, \qquad V(1,t)=\psi_2,\end{gathered} \qquad (12)$$

$$U(x,0)=U_0(x), \qquad V(x,0)=V_0(x), \qquad E(x,0)=[S_0(x)]^{1/2}. \qquad (13)$$

(11) – (13) ამოცანას შევუსაბამებთ შემდეგ სხვაობიან სქემას:

$$u_t^j=(\omega^{2\alpha}u_{\bar{x}})_x, \qquad v_t^j=(\omega^{2\alpha}v_{\bar{x}})_x,$$

$$\omega_t^j=-\frac{a}{2}\omega^{2\beta-1}+\frac{b}{2}\omega^{2\gamma-1}[(u_{\bar{x}})^2+(v_{\bar{x}})^2]+\frac{c}{2}\omega^{2\gamma-1}(u_{\bar{x}}+v_{\bar{x}}),$$

$$u_0^j=v_0^j=0, \qquad u_M^j=\psi_1, \qquad v_M^j=\psi_2, \qquad j=0,1,\dots,N,$$

$$u_i^0=U_0(x_i), \qquad v_i^0=V_0(x_i), \qquad \omega_i^0=\left[S_0\left(x_{i+1/2}\right)\right]^{1/2}, \qquad i=0,1,\dots,M.$$

§4. რიცხვითი ამოხსნისას მიღებული შედეგები და გრაფიკული ილუსტრაციები

ზემოთ მოყვანილი (11)–(13) სქემის გამოყენებით ჩატარებულია რიცხვითი ექსპერიმენტები. მიღებული ექსპერიმენტების შედეგები შეესაბამება თეორიულ კვლევებს. ქვემოთ მოყვანილია ზოგიერთი მათგანი.

ტესტურ ექსპერიმენტში საწყისი პირობებია:

$$U(x,t) = x^4\left(e^{-t}(1-x)^2 + \frac{\psi_1}{4}\right),$$

$$V(x,t) = x^4\left(e^{-t}(1-x)^2 + \frac{\psi_2}{4}\right),$$

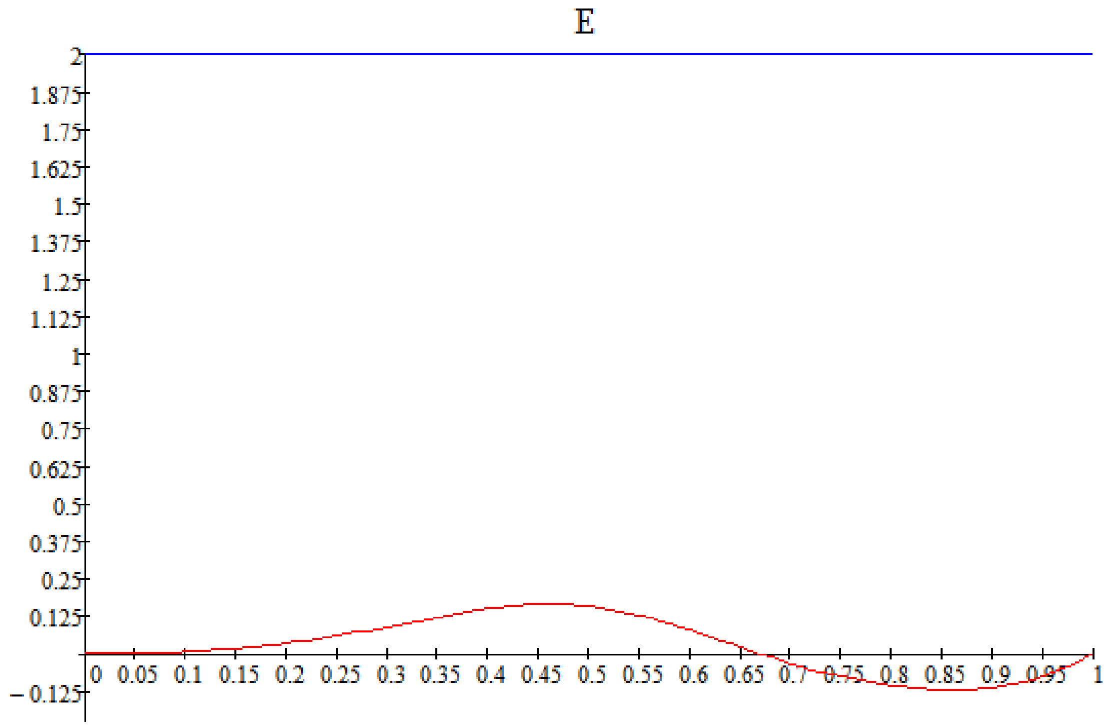
$$S(x,t) = e^{-t}(\sin \pi x)^4 + 2 - x,$$

პარამეტრების მნიშვნელობები შემდეგია: $h = 0.01,\ \tau = 0.00004,\ M = 100, N = 25000.$

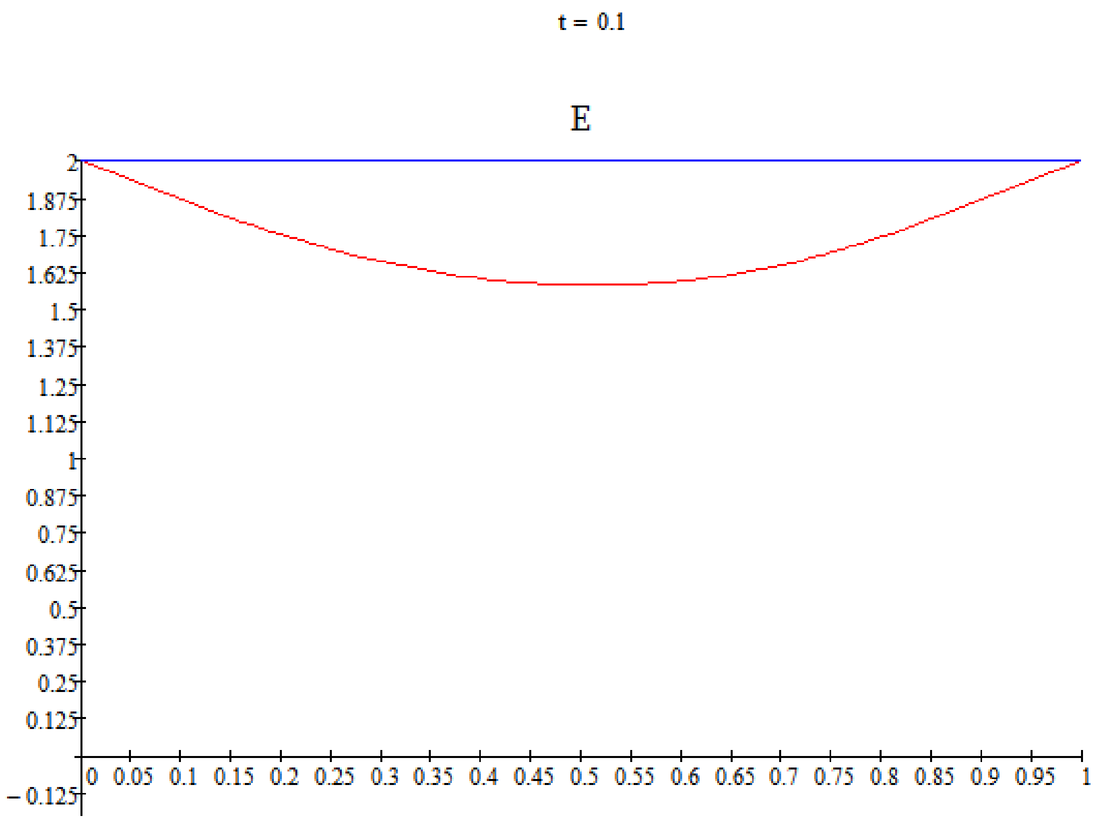
ტესტი 1. (სტაციონალური ამონახსნი): $\alpha = 1,\quad \beta = 1,\quad \gamma = 0,\ \psi_1 = \psi_2 = 1,$ $a = b = c = 1.$ შესაბამისი ნახაზებია: ნახ. 1–4.

ტესტი 2. (ბიფურკაცია): $\alpha = 1,\ \beta = 3,\ \gamma = 4,\ \psi_1 = \psi_3 = 1,\ a = b = c = 1.$ შესაბამისი ნახაზებია: ნახ. 5–8.

t = 0

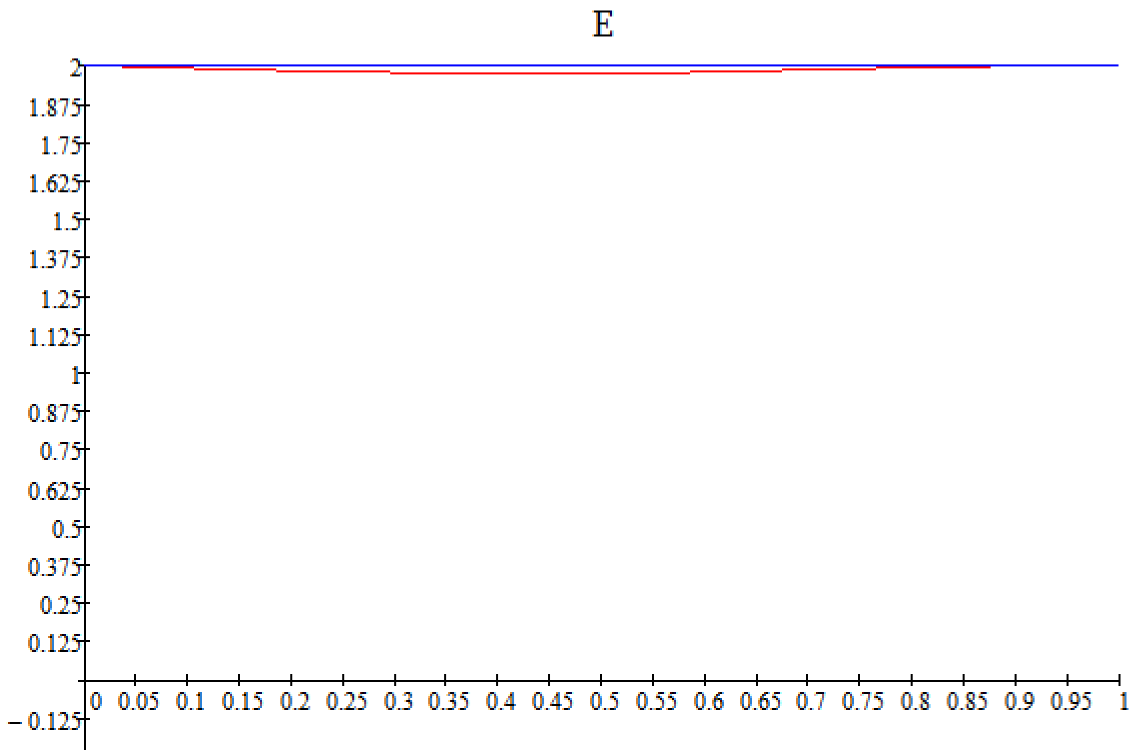

E
2
1.875
1.75
1.625
1.5
1.375
1.25
1.125
1
0.875
0.75
0.625
0.5
0.375
0.25
0.125
−0.125
0 0.05 0.1 0.15 0.2 0.25 0.3 0.35 0.4 0.45 0.5 0.55 0.6 0.65 0.7 0.75 0.8 0.85 0.9 0.95 1

ნახ. 1

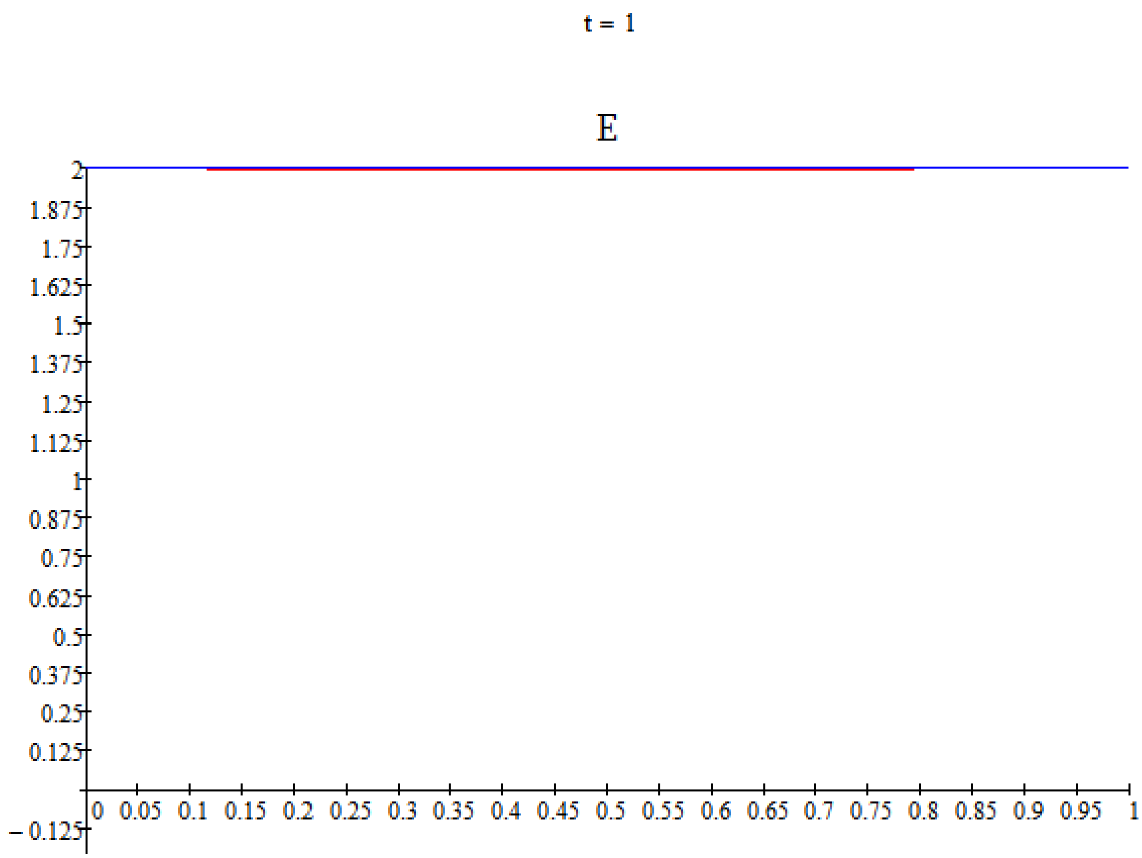

t = 0.1
E
2
1.875
1.75
1.625
1.5
1.375
1.25
1.125
1
0.875
0.75
0.625
0.5
0.375
0.25
0.125
− 0.125
0 0.05 0.1 0.15 0.2 0.25 0.3 0.35 0.4 0.45 0.5 0.55 0.6 0.65 0.7 0.75 0.8 0.85 0.9 0.95 1

ნახ. 2

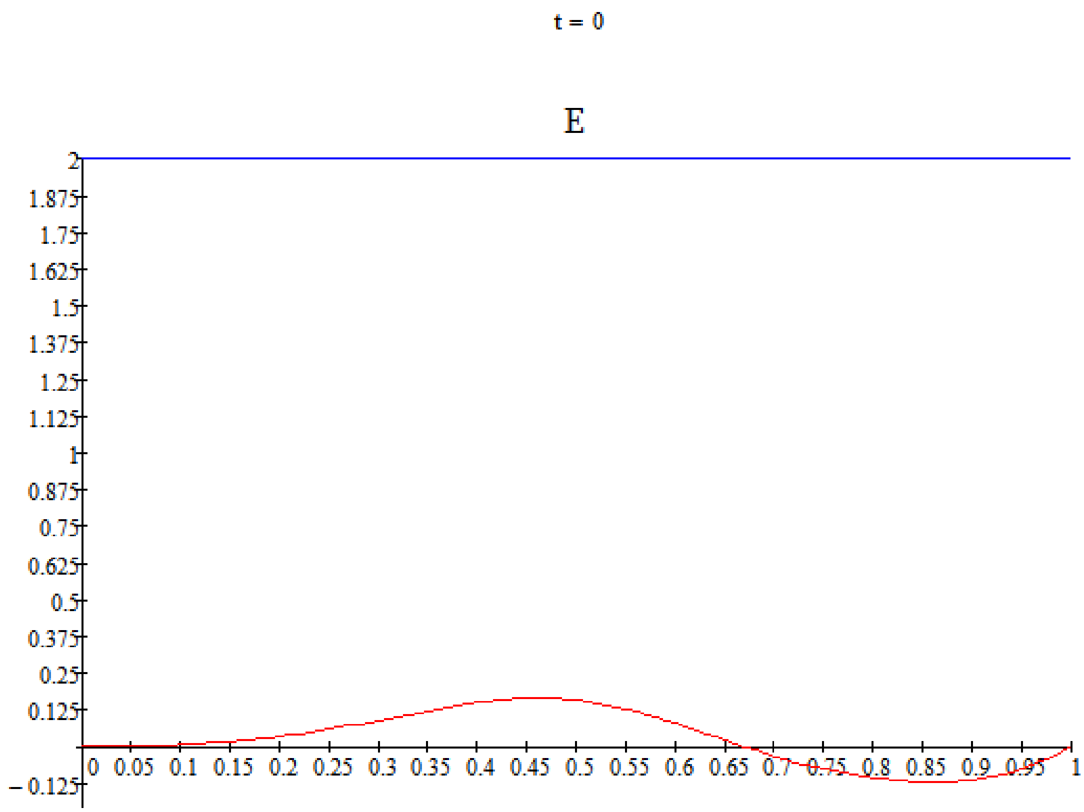
t = 0.5


E
2
1.875
1.75
1.625
1.5
1.375
1.25
1.125
1
0.875
0.75
0.625
0.5
0.375
0.25
0.125
− 0.125
0 0.05 0.1 0.15 0.2 0.25 0.3 0.35 0.4 0.45 0.5 0.55 0.6 0.65 0.7 0.75 0.8 0.85 0.9 0.95 1

ნახ. 3

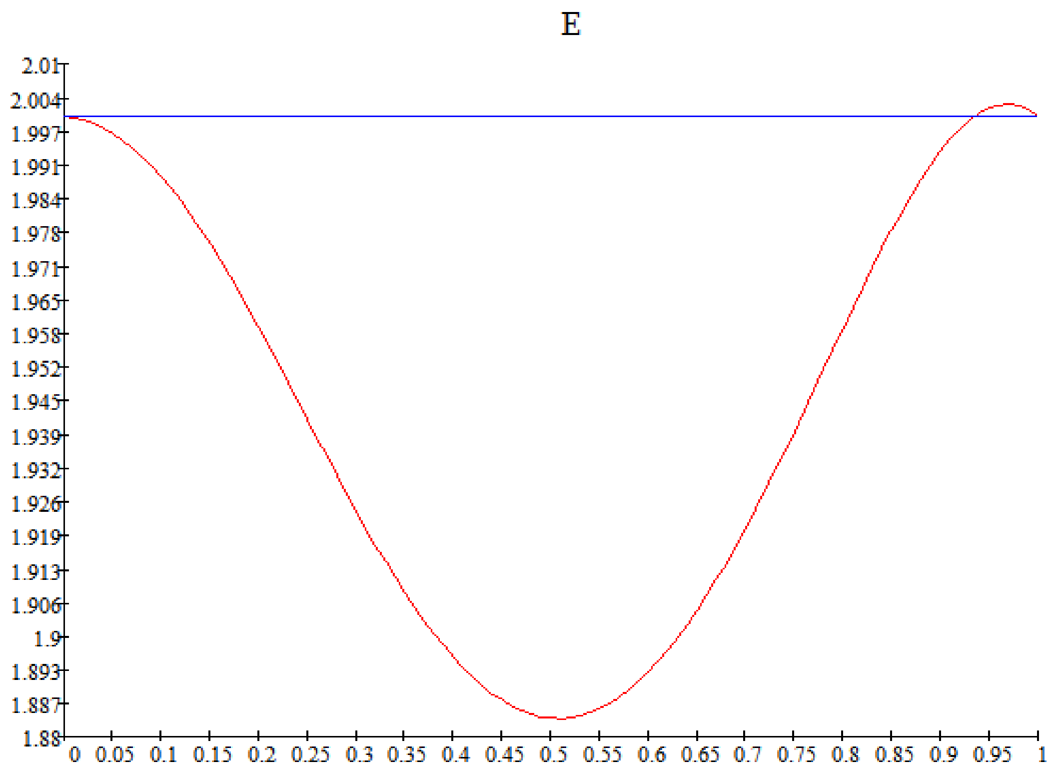

t = 1
E
2
1.875
1.75
1.625
1.5
1.375
1.25
1.125
1
0.875
0.75
0.625
0.5
0.375
0.25
0.125
−0.125
0 0.05 0.1 0.15 0.2 0.25 0.3 0.35 0.4 0.45 0.5 0.55 0.6 0.65 0.7 0.75 0.8 0.85 0.9 0.95 1

ნახ. 4

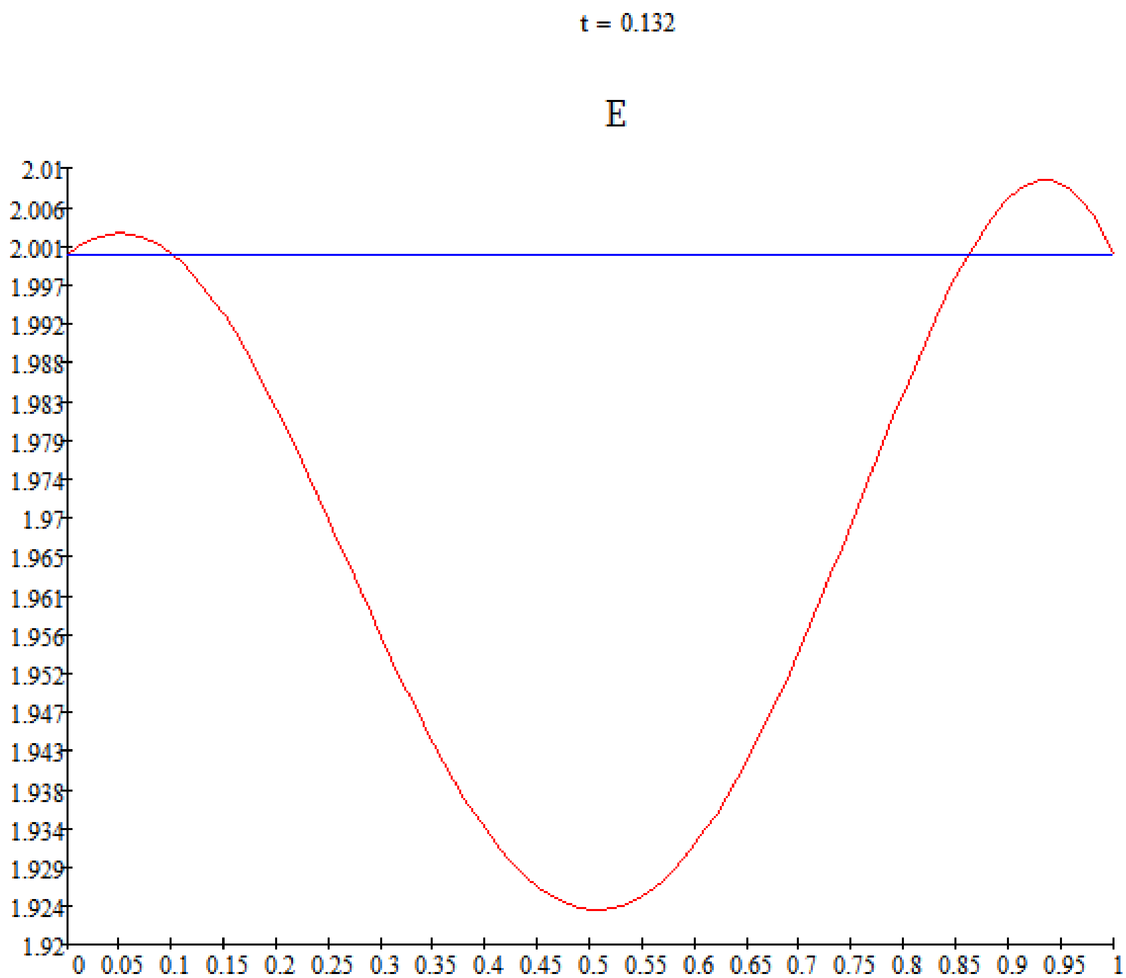

t = 0
E
2
1.875
1.75
1.625
1.5
1.375
1.25
1.125
1
0.875
0.75
0.625
0.5
0.375
0.25
0.125
−0.125
0 0.05 0.1 0.15 0.2 0.25 0.3 0.35 0.4 0.45 0.5 0.55 0.6 0.65 0.7 0.75 0.8 0.85 0.9 0.95 1

ნახ. 5

t = 0.128

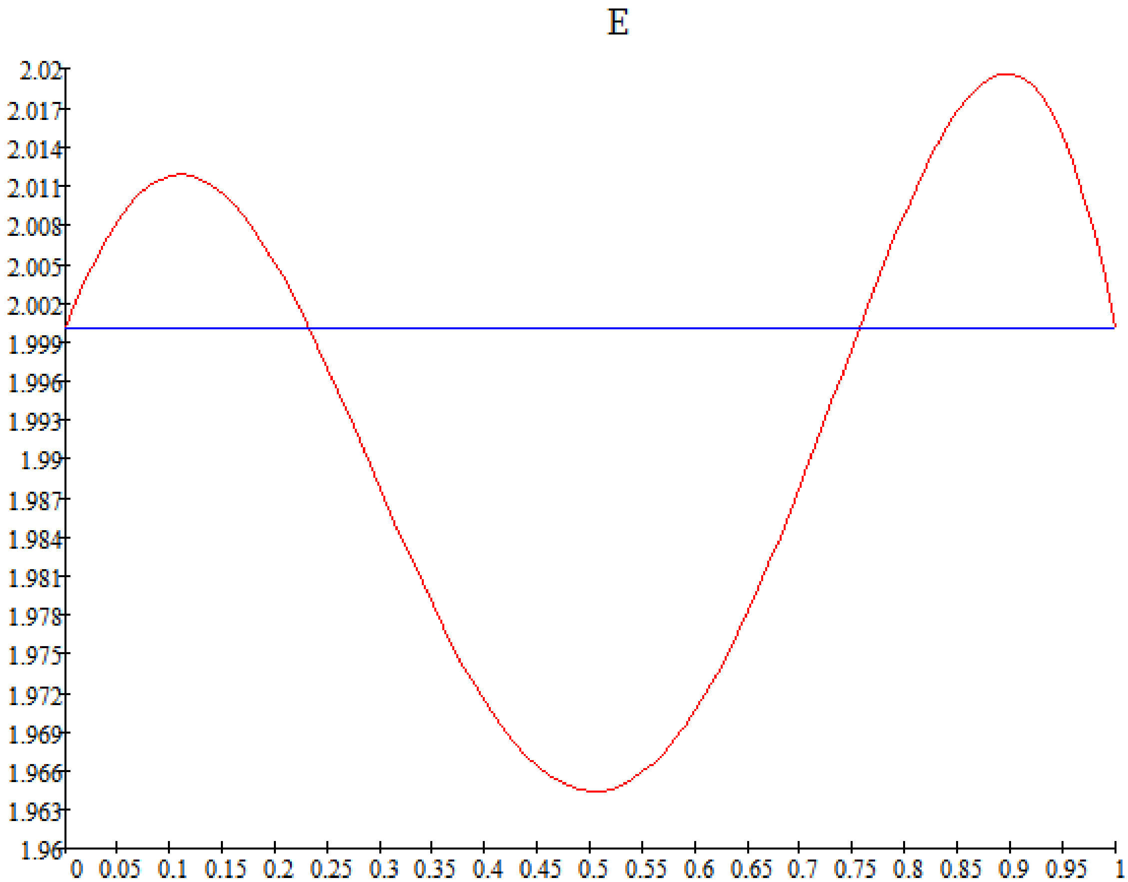

E
2.01
2.004
1.997
1.991
1.984
1.978
1.971
1.965
1.958
1.952
1.945
1.939
1.932
1.926
1.919
1.913
1.906
1.9
1.893
1.887
1.88
0 0.05 0.1 0.15 0.2 0.25 0.3 0.35 0.4 0.45 0.5 0.55 0.6 0.65 0.7 0.75 0.8 0.85 0.9 0.95 1

ნახ. 6


t = 0.132
E
2.01
2.006
2.001
1.997
1.992
1.988
1.983
1.979
1.974
1.97
1.965
1.961
1.956
1.952
1.947
1.943
1.938
1.934
1.929
1.924
1.92
0 0.05 0.1 0.15 0.2 0.25 0.3 0.35 0.4 0.45 0.5 0.55 0.6 0.65 0.7 0.75 0.8 0.85 0.9 0.95 1

ნახ. 7

t = 0.136


E
2.02
2.017
2.014
2.011
2.008
2.005
2.002
1.999
1.996
1.993
1.99
1.987
1.984
1.981
1.978
1.975
1.972
1.969
1.966
1.963
1.96
0 0.05 0.1 0.15 0.2 0.25 0.3 0.35 0.4 0.45 0.5 0.55 0.6 0.65 0.7 0.75 0.8 0.85 0.9 0.95 1

ნახ. 8

დასკვნა

დიფუზიური პროცესების მათემატიკური მოდელირებისას საქმე გვაქვს ევოლუციურ კერძოწარმოებულებიან დიფერენციალურ განტოლებებთან და მათ სისტემებთან, რომელთა დიდი ნაწილი არაწრფივია. ეს, გარკვეულწილად, ართულებს დასმული ამოცანის შესწავლას. აქ დიდ როლს თამაშობს ამ ამოცანების მიახლოებითი ამოხსნის ალგორითმების აგება, რიცხვითი ექსპერიმენტების ჩატარება და მიღებული შედეგების ანალიზი.

თემის აქტუალობიდან გამომდინარე, სამაგისტრო ნაშრომის მიზანი იყო, შეგვესწავლა არაწრფივი დიფუზიური სისტემის სტაციონარული ამონახსნის ყოფაქცევა და რიცხვითი ექსპერიმენტების ჩატარება აღნიშნული სისტემის შესაბამისი სხვაობიანი სქემის მიხედვით.

ნაშრომი შედგება ოთხი პარაგრაფისგან, გამოყენებული ლიტერატურის ნუსხისგან და დანართისაგან, რომელშიც მოცემულია პროგრამული კოდი, რის მიხედვითაც მოხდა კომპიუტერული რეალიზაცია.

პირველ პარაგრაფში ერთი არაწრფივი დიფუზიური სისტემისათვის დასმულია ამოცანა და აგებულია ამ ამოცანის სტაციონარული ამონახსნი. მეორე პარაგრაფში შესწავლილია სტაციონარული ამონახსნის ყოფაქცევა, დროითი ცვლადის უსასრულობაში მისწრაფებისას. ასევე, დადგენილია ჰოფის ტიპის ბიფურკაციის წარმოშობის შესაძლებობაც. მესამე პარაგრაფში აგებულია სხვაობიანი სქემა, ხოლო მეოთხე პარაგრაფში ჩატარებულია რიცხვითი ექსპერიმენტები და მიღებული შედეგების ანალიზი.

გამოყენებული ლიტერატურა

1. Cessenat, M. Mathematical Methods in Electromagnetism: Linear Theory and Applications. World Scientifc Publishers, 1996, 394 p.

2. Dzhangveladze, T.A. Stability of the stationary solution of a system of nonlinear partial differential equations, Sovremennye problemy matematicheskoi fiziki. (Proceeding of AU-Union Sympozium. The Modern Problems of Mathematical Physics). Tbilisi, 1 1987, p. 214-221 (Russian).

3. Friedman, A. Partial Differential Equations of Parabolic Type. Prentice-Hall, Englewood, NJ, 1964, 368 p.

4. Jangveladze, T. Investigation and Numerical Solution of Nonlinear Partial Differential and Integro-Differential Models Based on System of Maxwell Equations. Mem. Differential Equations Math. Phys., V.76, 2019, 118 p.

5. Jangveladze, T., Gagoshidze, M. Hoph bifurcation and its computer simulation for one-dimensional Maxwell model. Rep. Enlarged Sess. Semin. I.Vekua Inst. Appl. Math., V.30 2016, p. 27-30.

6. Jangveladze, T., Kratsashvili, M. Some properties of solution and finite difference scheme for one nonlinear partial differential model based on Maxwell system. Mem. Differential Equations Math. Phys., V.73, 2018, p. 83-92.

7. Kiguradze, Z.V. On the stationary solution for one diffusion model. Rep. Enlarged Sess. Semin. I.Vekua Inst. Appl. Math., V.16, 2001, p. 7–20.

8. Ladyzenskaya, O.A., Solonnikov, V.A., Uralceva, N.N. Linear and Quasilinear Equations of Parabolic Type. Transl. Math. Monographs, V.23, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1968, 667 p.

9. Landau, L., Lifschitz, E. Electrodynamics of Continuous Media. Course of Theoretical Physics, 8 (Translated from the Russian), Pergamon Press, Oxford-London-New York-Paris, Addision-Wesley Publishing Co., Inc., Reading, Mass., 1960; Russian original: Gosudarstv. Izdat. Tehn-Teor. Lit., Moscow, 1957, 460 p.

10. Lions, J. L. Quelques Methodes de Resolution des Problemes Aux Limites Non- Lineaires. Dunod, Gauthier-Villars, Paris, 1969, 531 p.

11. Liao, H., Zhao, Y. Linearly localized difference schemes for the nonlinear Maxwell model of a magnetic field into a substance. Appl. Math. Comput., V.233, 2014, p.608-622.

12. Marsden, J.E., McCracken, M. The Hopf Bifurcation and its Applications. Springer Science & Business Media, 19, 2012.

13. Mzhavanadze, N. On one nonlinear diffusion system. Rep. Enlarged Sess. Semin. I. Vekua Inst. Appl. Math., V.36, 2022, (accepted).

14. Ponomarev, S.M. On the diffusion of an intense magnetic field into a thin incompressible conductor (Russian). Zh. vychisl. Mat. mat. Fiz., V.27, N5, 1987, p.1424-1428. English translation: USSR Comput. Math. Math. Phys., V.27, N5, 1987, p.98-101.

15. Rheinboldt, W.C. Methods for Solving Systems of Nonlinear Equations. SIAM, Philadelphia, 1970, 138 p.

16. Samarskii, A.A. The Theory of Difference Schemes. Marcel Dekker, Inc., New York, 2001, 768 p.

17. Yin, H.-M. On a nonlinear Maxwell's system in quasistationary electromagnetic fields. Math. Models Methods Appl. Sci., V.14, 2004, p.1521-1539.

18. Yin, H.-M. On Maxwell's equations in an electromagnetic field with the temperature effect. SIAM J. Math. Anal., V.29, 1998, p.637-651.

დანართი

პროგრამული კოდები

რიცხვითი გათვლებისთვის გამოყენებულია C++-ზე Visual Studio-ს გარემო, ხოლო გრაფიკების ასაგებად გამოყენებულია Python.

პროგრამის მთავარი ფუნქცია არის main, რომელიც განსაზღვრულია main.cpp ფაილში. გვაქვს კლასი – Source, რომელიც განსაზღვრულია Source.h და Source.cpp ფაილებში. ამ კლასის გამოყენებით გამოითვლება მონაცემები და მიღებული შედეგები შეინახება prn გაფართოების ფაილში. ფაილში მონაცემების შესანახად გამოიყენება PrintMethods.h და PrintMethods.cpp ფაილში არსებული ფუნქციები. Fuctions.h და Fuctions.cpp ფაილში განსაზღვრულია ამოცანის საწყისი ფუნქციები. MethodsMath კლასი განსაზღვრულია MethodsMath.h და MethodsMath.cpp ფაილში. ამ კლასში განსაზღვრულია ფაქტორიზაციის მეთოდები.

პროგრამული პაკეტი შედგება შემდეგი ფაილებისგან:

- **Variables.h**

```
#ifndef _VARIABLES_H_
#define _VARIABLES_H_

#define e  2.718281828459045
#define Pi 3.141592653589793

// ცვლადები
#define T    1.0

// სტაციონალი
#define Alfa 0.3
#define Beta 0.3
#define Gama 0.4
#define A 1
#define B 3

#define F1 0.5
#define F2 0.5

//// ბიფურკაცია
//#define Alfa 2
//#define Beta 1
//#define Gama 2
//#define A 1
//#define B 2
//
//#define F1 2.5
//#define F2 2.5

#define h   0.01
#define tau 0.00004
#define M   100
#define N   25000

#endif
```

➢ Functions.h და Functions.cpp

```cpp

#ifndef _FUNCTIONS_H_
#define _FUNCTIONS_H_

//******************************************
// ზუსტი ამონახსნი
long double U(long double, long double);
long double V(long double, long double);
long double S(long double, long double);

// სტაციონალური ამონახსნი
long double U(long double);
long double V(long double);
long double S(long double);

#endif
```

```cpp

#include "Variables.h"
#include "Functions.h"

#include <math.h>

// ზუსტი ამონახსნი
long double U(long double x, long double t)
{
    //return x*(1-x)*powl(e,t) + F1*x*x;
    return powl(sin(2*Pi*x),2)*(1+t) + F1*x*x;
}

long double V(long double x, long double t)
{
    //return x*(1-x)*(1+t+t*t) + F2*x*x;
    return powl(cos(Pi/2+Pi*x),2)*(1+t) + F2*x*x;
}

long double S(long double x, long double t)
{
    return x*x*powl(e,t) + (1-x)*(1-x)*(1+t);
}

// სტაციონალური ამონახსნი
long double U(long double x)
{
    return F1*x;
}

long double V(long double x)
{
    return F2*x;
}

long double S(long double x)
{
    return powl((powl(F1,2)+powl(F2,2))*B/A, 1/(Beta-Gama));
}
```

- MethodsMath.h და MethodsMath.cpp

```cpp

#ifndef _METHODSMATH_H_
#define _METHODSMATH_H_

class MethodsMath{

    public:
        // ფაქტორიზაციის მეთოდი
        void Factorization(long double *, int, long double  , long double  , long double  , long double *, long double *, long double *);
        void Factorization(long double *, int, long double *, long double *, long double *, long double *, long double *, long double *);

};

#endif
```

```cpp

#include "MethodsMath.h"
#include <stdio.h>
#include <stdlib.h>

/* ფაქტორიზაციის მეთოდი
 x - მასივი რომელიც უნდა დაბრუნდეს
 m - მასივის სიგრძე
 a - სამდიაგონალური მატრიცის ქვედა დიაგონალი
 c - სამდიაგონალური მატრიცის ცენტრალური დიაგონალი
 b - სამდიაგონალური მატრიცის ზედა დიაგონალი
 k, niu - მარცხენა და მარჯვენა საზღვარი
     y[0] = k[0]*y[1]   + niu[0]
     y[m] = k[1]*y[m-1] + niu[1]
 f - მარჯვენა მხარე
*/

void MethodsMath::Factorization(long double *x, int m, long double a, long double c, long double b, long double *k, long double *niu, long double *f)
{

    int i;
    long double *alfa = new long double[m+1];
    long double *beta = new long double[m+1];

    alfa[1] = k[0];
    beta[1] = niu[0];

    for(i=1; i<m; i++)
    {
        x[i] = 0;
    }

    for(i=0; i<m+1; i++)
    {
        alfa[i+1] = b / (c-a*alfa[i]);
        beta[i+1] = (a*beta[i]-f[i]) / (c-a*alfa[i]);
    }

    x[m] = (k[1]*beta[m]+niu[1]) / (1-k[1]*alfa[m]);

    for(i=m-1; i>=0; i--)
    {
        x[i] = alfa[i+1] * x[i+1] + beta[i+1];
    }

    delete alfa;
    delete beta;

};
```

```cpp

void MethodsMath::Factorization(long double *x, int m, long double *a, long double *c, long double *b, long double *k, long double *niu, long double *f)
{

    int i;
    long double *alfa = new long double[m+1];
    long double *beta = new long double[m+1];

    alfa[1] = k[0];
    beta[1] = niu[0];

    for(i=0; i<m+1; i++)
    {
        x[i] = 0;
    }

    for(i=1; i<m; i++)
    {
        alfa[i+1] = b[i] / (c[i]-a[i]*alfa[i]);
        beta[i+1] = (a[i]*beta[i]-f[i]) / (c[i]-a[i]*alfa[i]);
    }

    x[m] = (k[1]*beta[m]+niu[1]) / (1-k[1]*alfa[m]);

    for(i=m-1; i>=0; i--)
    {
        x[i] = alfa[i+1] * x[i+1] + beta[i+1];
    }

    delete alfa;
    delete beta;

};

```

- PrintMethods.h და PrintMethods.cpp

```cpp

#ifndef _PRINTMATHODS_H_
#define _PRINTMATHODS_H_

#include "Variables.h"
#include <time.h>

// ფაილში მომაცემების ჩაწერა
// თუ ფაილი არ გაიხსნა დააბრუნებს false, წინააღმდეგ შემთხვევაში დააბრუნებს true

bool PrintFile(long double **, char *);

bool PrintLog(time_t , time_t);

void FileName(char *, int);

#endif
```

```cpp

#include "PrintMethods.h"
#include "Variables.h"

#include <string.h>
#include <iostream>
#include <stdio.h>
#include <iomanip>
#include <time.h>

using namespace std;

//=====================================

// ფაილში მონაცემების ჩაწერა
// თუ ფაილი არ გაიხსნა დააბრუნებს false, წინააღმდეგ შემთხვევაში დააბრუნებს true

bool PrintFile(long double **x, char *fName)
{
    //
    FILE *f;
    //
    f = fopen(fName, "w");
    //

    if(f==NULL)
    {
        //
        return false;
    }
    //
    for(int i=0; i<M+1; i++)
    {
        for(int j=0; j<N+1; j++)
        {
            //
            fprintf(f,"%21.20lf\t",x[j][i]);
        }
        fprintf(f,"\n");
    }
    //
    fclose(f);
    //
    return true;
}
//
```

```c

bool PrintLog(time_t rawtime1, time_t rawtime2)
{
    //
    FILE *f;
    //
    f = fopen("Log.txt", "a+");
    //

    if(f==NULL)
    {
        //
        return false;
    }
    //
    fprintf(f,"N = %d\n",N);
    fprintf(f,"M = %d\n",M);
    fprintf(f,"Start:\t%s",ctime (&rawtime1));
    fprintf(f,"End:\t%s" ,ctime (&rawtime2));
    fprintf(f, "\n\n\n");
    //
    fclose(f);
    //
    return true;
}

// ფაილის სახელის შექმნა
void FileName(char *_FileName, int i)
{
    //
    int n;
    //
    _FileName[0] = '\0';
    //
    if (i==1)       n = sprintf (_FileName, "File\\U.prn");
    else if (i==2)  n = sprintf (_FileName, "File\\V.prn");
    else if (i==3)  n = sprintf (_FileName, "File\\S.prn");
    else if (i==4)  n = sprintf (_FileName, "File\\U1.prn");
    else if (i==5)  n = sprintf (_FileName, "File\\V1.prn");
    else if (i==6)  n = sprintf (_FileName, "File\\S1.prn");

}

```

- Source.h და Source.cpp

```cpp

#ifndef _BIOLOGY_H_
#define _BIOLOGY_H_

#include "Variables.h"
#include "MethodsMath.h"

class Bifurkacia
{

private:

    int i;
    int j;

    long double d;

    // მიმდინარე და წინა შრე
    // 0 - არის წინა შრე
    // 1 - მიმდინარე შრე
    long double *_u, *_v;

    long double **u;
    long double **v;
    long double **s;

    long double **u1;
    long double **v1;
    long double **s1;

    // მარჯვენა მხარე
    long double *_f1, *_f2;

    // კვანძები
    long double *_x;

    long double *x;

    long double *t;

    // სამდიაგონალური მატრიცის დიაგონალები
    long double *_a;
    long double *_b;
    long double *_c;

    // საზღვრები
    long double *k01;
    long double *niu;

    char *_FileName;

    // მათემატიკური კლასი, სადაც განსაზღვრულია ფაქტორიზაციის მეთოდი
    MethodsMath _MethodsMath;

public:

    // კონსტრუქტორი
    Bifurkacia();
    ~Bifurkacia();

    // მეთოდები
    // მონაცემების დათვლა
    void Calculation();

    // მონაცემების ჩაწერა ფაილში
    void Print();

};

#endif
```

```
void Bifurkacia::Calculation()
{

    printf("\nStart Calculation\n");
    //
    for(j=0; j<N; j++)
    {
        //
        //printf("\t%d\n", j);

        //---> s
        s[j+1][0] = S(x[0]);
        s[j+1][M] = S(x[M]);
        for(i=1; i<M; i++)
        {
            s[j+1][i] = s[j][i] + tau*(-A*powl(s[j][i],Beta) + B*powl(s[j][i],Gama)*(powl((u[j][i]-u[j][i-1])/h ,2) + powl((v[j][i]-v[j][i-1])/h ,2)));
        }
        //<--- s

        //---> v, u
        for(i=1; i<M; i++)
        {
            _f1[i] = -v[j][i];
            _f2[i] = -u[j][i];

            _a[i] = d*powl(s[j+1][i],   Alfa);
            _b[i] = d*powl(s[j+1][i+1], Alfa);
            _c[i] = 1+_a[i]+_b[i];
        }

        niu[0] = V(x[0], t[j+1]);
        niu[1] = V(x[M], t[j+1]);
        _MethodsMath.Factorization(_v, M, _a, _c, _b, k01, niu, _f1);

        niu[0] = U(x[0], t[j+1]);
        niu[1] = U(x[M], t[j+1]);
        _MethodsMath.Factorization(_u, M, _a, _c, _b, k01, niu, _f2);

        for(i=0; i<M+1; i++)
        {
            v[j+1][i] = _v[i];
            u[j+1][i] = _u[i];
        }
        //<--- v, u

    }

    printf("\nEnd Calculation\n");

}
```

```cpp

void Bifurkacia::Print()
{
    printf("\n\nStart Print\n");

    // მიახლოებითი ამონახსნი
    FileName(_FileName, 1);
    if (PrintFile(u, _FileName) == false)
    {
        printf("ver moxerxda monacemebis chawera\n");
    }

    FileName(_FileName, 2);
    if (PrintFile(v, _FileName) == false)
    {
        printf("ver moxerxda monacemebis chawera\n");
    }

    FileName(_FileName, 3);
    if (PrintFile(s, _FileName) == false)
    {
        printf("ver moxerxda monacemebis chawera\n");
    }

    FileName(_FileName, 4);
    if (PrintFile(u1, _FileName) == false)
    {
        printf("ver moxerxda monacemebis chawera\n");
    }

    FileName(_FileName, 5);
    if (PrintFile(v1, _FileName) == false)
    {
        printf("ver moxerxda monacemebis chawera\n");
    }

    FileName(_FileName, 6);
    if (PrintFile(s1, _FileName) == false)
    {
        printf("ver moxerxda monacemebis chawera\n");
    }

    printf("End Print\n\n");
}
```

- main.cpp