ივანე ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის სახელმწიფო
უნივერსიტეტის ზუსტ და საბუნებისმეტყველო მეცნიერებათა
ფაკულტეტი

სამაგისტრო პროგრამა **მათემატიკა**

გორგოძე საბა

კანტელის ჰიპოთეზის დამტკიცება ფუნქციათა ზოგიერთი კლასისათვის

ნაშრომი შესრულებულია მათემატიკის მაგისტრის აკადემიური
ხარისხის მოსაპოვებლად

სამეცნიერო ხელმძღვანელი: ბესიკ ჩიქვინიძე, მათემატიკის აკადემიური დოქტორი,
ივანე ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტის ასისტენტ
პროფესორი

თბილისი

2022

სარჩევი

ანოტაცია

კანტელის ჰიპოთეზა შემდეგში მდგომარეობს: ვთქვათ X და Y დამოუკიდებელი და სტანდარტული ნორმალური კანონით განაწილებული შემთხვევითი სიდიდეებია ($X, Y \sim N(0;1); X \perp Y$), ამასთან ვთქვათ g ისეთი არაუარყოფითი და ზომადი ფუნქციაა, რომ $Z = X + \sqrt{g(X)}Y$ ნორმალურად განწილებული შემთხვევითი სიდიდეა. კანტელმა წამოაყენა ჰიპოთეზა, რომ $Z = X + \sqrt{g(X)}Y$-ის ნორმალურობა იწვევს g ფუნქციის მუდმივობას, ანუ $Z = X + \sqrt{g(X)}Y$-ს ნორმალური განაწილება მხოლოდ იმ შემთხვევაში ექნება თუ g ფუნქცია მუდმივია (მართლაც თუ g ფუნქცია მუდმივია, მაშინ რადგანაც X და Y ნორმალურები და დამოუკიდებლებია, ცხადია რომ $Z = X + \sqrt{g(X)}Y$ იქნება ნორმალურად განაწილებული).

2015 წელს ვიქტორ კლეპცინმა და ალინა კურცმანმა [11] ააგეს ისეთი, არაუარყოფითი არამუდმივი ზომადი g ფუნქციის მაგალითი, რომლისთვისაც $Z = X + \sqrt{g(X)}Y$ გამოვიდა ნორმალურად განაწილებული, ანუ მათ უარყვეს კანტელის ჰიპოტეზა, თუმცა გამოთქვეს ეჭვი, რომ კანტელის ჰიპოთეზა დარჩება სამართლიანად თუკი g ფუნქციას დამატებით უწყვეტობას მოვთხოვთ.

ჩვენი ამოცანაა კანტელის ჰიპოთეზის დამტკიცება ფუნქციათა სხვადასხვა კლასებისთვის (მაგალითად პერიოდული, მონოტონური, და ა.შ). დამტკიცების ერთ-ერთ მნიშვნელოვან მეთოდად გამოვიყენებთ მაწარმოებელი ფუნქციების მეთოდს და შექცეული სტოქასტური დიფერენციალური განტოლებების თეორიას, კერძოდ g ფუნქციაში ჩასმული ვინერის პროცესის მაწარმოებელი ფუნქციის პირობითი მათემატიკური ლოდინისათვის შესაბამისი შექცეული სტოქასტური დიფერენციალური განტოლების გამოყვანას და შემდეგ, სასურველი შედეგის

მისაღებად, მიღებულ განტოლებაზე ვიმუშავებთ იტოს ფორმულის და მარტინგალური მეთოდების გამოყენებით.

ძირითადი შედეგები და სიახლე ჩადებულია თეორემა 1.1-სა და თეორემა 2.2-ში. თეორემა 1.1-ში დამტკიცებულია, რომ თუ g ფუნქციას დამატებით მოვთხოვთ რომ იყოს პერიოდული, მონოტონური ან პერიოდულად მონოტონური, მაშინ g გამოვა მუდმივი ფუნქცია.

თეორემა 2.2-ში დამტკიცებულია, რომ თუ g-თვის $Eg'(W_1) = Eg''(W_1) = 0$, მაშინ g გამოვა მუდმივი ფუნქცია. აქ W_1 წარმოადგენს ვინერის პროცესს გაჩერებულს $t = 1$ მომენტში. ამ თეორემას დავამტკიცებთ შექცეული სტოქასტური დიფერენციალური განტოლებების საშუალებით. შევნიშნოთ, რომ პირველ თავში ჩვენ ვაჩვენებთ, რომ $Eg'(X) = 0$ და $Eg''(X) \leq 0$ სადაც X სტანდარტული ნორმალური შემთხვევითი სიდიდეა.

Summary

CANTELLI CONJECTURE. Let X, Y be two real random variables with standard Gaussian distribution law: $X, Y \sim N(0; 1)$. Suppose that X and Y are independent. Let $g(x)$ be a measurable nonnegative function. Then the random variable $X + \sqrt{g(X)}Y$ has a Gaussian distribution law if and only if $g(x)$ is constant.

In 2015 Victor Kleptsyn and Aline Kurtzmann constructed the counterexample to Cantelli conjecture. They constructed such non-constant, measurable function $g(x)$, fow which $Z = X + \sqrt{g(X)}Y$ has a normal distribution.

Our aim is to proof Cantelli Conjecture for a different classes of functions (for example periodic functions, monotonic functions).

For this purpose we will use characteristic functions's methods and theory of backward stochastic differential equations, particularly we will put Wiener process into g function and for it's characteristic function we will derive backward stochastic differential equation. We plan to work on it using Ito's formula and martingale methods.

Key results and novelties are included in the theorem 1.1 and theorem 2.2. In Theorem 1.1 we proved that if in addition function g is periodic, monotonic or periodically monotonic, then g will be a constant.

In Theorem 2.2 we proved that if $Eg'(W_1) = Eg''(W_1) = 0$, where W_1 is a stopped Brownian motion at time $t = 1$, then g will be a constant function. This theorem we proved using backward stochastic differential equations. Notice that in first chapter we will show that $Eg'(X) = 0$ and $Eg''(X) \leq 0$ where X has a standard normal distribution.

შესავალი

როგორც უკვე იყო აღნიშნული კანტელის ჰიპოთეზა მდგომარეობს შემდეგში: ვთქვათ X და Y დამოუკიდებელი და სტანდარტული ნორმალური კანონით განაწილებული შემთხვევითი სიდიდეებია $(X, Y \sim N(0;1); X \perp Y)$, ამასთან ვთქვათ g ისეთი არაუარყოფითი და ზომადი ფუნქციაა, რომ $Z = X + \sqrt{g(X)}Y$ ნორმალურად განაწილებული შემთხვევითი სიდიდეა. კანტელის ჰიპოთეზა ამბობს, რომ $Z = X + \sqrt{g(X)}Y$ შემთხვევითი სიდიდე ნორმალურადაა განაწილებული, მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როდესაც g მუდმივი ფუნქციაა.

სინამდვილეში კანტელმა ზემოაღნიშნული მოსაზრება თავდაპირველად ახსენა თავის ნაშრომში [6] გვ 407, სადაც დასვა კითხვა შესაძლებელია თუ არა არსებობდეს ზემოაღნიშნული g ფუნქცია, ხოლო მოგვიანებით მას ეწოდა კანტელის ჰიპოთეზა. აღნიშნული ჰიპოთეზა მანამდეც იყო შესწავლილი სხვადასხვა ავტორების მიერ. პირველად, ტორტორიჩიმ [18] მიიღო გარკვეული შეზღუდვა g ფუნქციაზე, რომ მას დაეკმაყოფილებინა კანტელის ჰიპოთეზა. ამისათვის მან გამოიყენა g ფუნქციის წარმოდგენა ჰერმიტის პოლინომების მწკვირების სახით. შემდეგ ტრიკომმა [19] გამოიყენა ანალიტიკური მეთოდები, კერძოდ მახასიათებელი ფუნქციების მეთოდი იმისათვის, რომ აღეწერა g ფუნქციის გარკვეული თვისებები.
მოგვიანებით დუდლიმ [10] მოიყვანა ორი გადაუჭრელი ამოცანა სასრულგანზომილებიან გაუსის ზომებთან დაკავშირებით. მათ, შორის ერთ-ერთი იყო კანტელის ჰიპოთეზა. იგი ამბობდა, რომ ეს საინტერესო ამოცანაა, მაგრამ მასზე პასუხი მის ამოხსნამდე ბუნდოვანი იქნებაო.

მეიერის, როინეტის, ვალუასა და იორის [8], სექცია 6 ნაშრომში მათ უპასუხეს ამ თემასთან დაკავშირებულ კითხვას, რომელიც დასმული იყო ტორტრატის მიერ. განვიხილოთ სტანდარტული ბროუნის მოძრაობა $(W_t, t \geq 0)$. შესაძლებელია თუ არა, რომ არსებობდეს თითქმის ყველგან შემოსაზღვრული, არამუდმივი, $\mathcal{F}_1$-ზომადი Z შემთხვევითი სიდიდე, ისეთი, რომ $W_1 + Z(W_2 - W_1)$ აქვს გაუსის განაწილება? მეიერმა დაამტკიცა სტანდარტული ბროუნის მოძრაობის $(W_t, t \geq 0)$ და T არამუდმივი გაჩერების მომენტის არსებობა $(\mathcal{F}_t, t \geq 0)$-ის მიმართ, რომელიც შემოსაზღვრულია 1-ით, რომლისთვისაც W_T-ს აქვს გაუსის განაწილება. ამ შედეგის გამოყენებით, მათ აჩვენეს, რომ $W_1 + \sqrt{T}(W_2 - W_1)$-ს აქვს გაუსის განაწილება. მათ მოყვანილ მაგალითში $\sqrt{T}$ არის $\mathcal{F}_1$-ზომადი, შემოსაზღვრული და არამუდმივი, თუმცა $\sqrt{T}$ არ არის W_1-ის ფუნქცია, ამიტომ აღნიშნული კონსტრუქცია არ ეწინააღმდეგება კანტელის ჰიპოთეზას.

2015 წელს ვიქტორ კლეპცინმა და ალინა კურცმანმა [11] ააგეს ისეთი, არამუდმივი ზომადი g ფუნქციის მაგალითი, რომლისთვისაც $Z = X + \sqrt{g(X)}Y$ გამოვიდა ნორმალურად განაწილებული, ანუ მათ უარყვეს კანტელის ჰიპოტეზა, თუმცა გამოთქვეს ეჭვი, რომ კანტელის ჰიპოთეზა დარჩება სამართლიანად თუკი g ფუნქციას დამატებით უწყვეტობას მოვთხოვთ.

ნაშრომში ჩვენ ასევე საუბარი გვექნება და გამოვიყენებთ შექცეულ სტოქასტურ დიფერენციალურ განტოლებებს.

შექცეული სტოქასტური დიფერენციალური განტოლებების (BSDE) თეორია წარმოადგენს ეფექტურ იარაღს ფინანსურ მათემატიკასა და სტოქასტური მართვის ამოცანების შესასწავლად.

წრფივი შექცეული სტოქასტური დიფერენციალური განტოლება პირველად შემოიღო ბისმუთმა [2] 1973 წელს სტოქასტური მაქსიმუმის პრინციპის შეუღლებული პროცესებისათვის. სხვა შრომები მაქსიმუმის პრინციპზე წრფივი შექცეული სტოქასტური დიფერენციალურ განტოლებების გამოყენებით ჰქონდათ ასევე არკინს და საკსონოვს [1] 1979 წელს , კაზანოვს [11] 1978 წელს , კადენილასა და კარატზასს [5]

1995 წელს. 1978 წელს ბისმუთმა [3] დაწერა არაწრფივი შექცეული სტოქასტური დიფერენციალური განტოლება (რიკატის განტოლება) და დაამტკიცა ამონახსნის არსებობა და ერთადერთობა. 1983 წელს რ. ჩიტაშვილმა [7] გამოიყვანა ბელმანის განტოლების სტოქასტური ანალოგი ოპტიმალური მართვის გაკვეული ტიპის ამოცანებისათვის და შედეგად მიიღო არაწრფივი შექცეული სტოქასტური დიფერენციალური განტოლება, რომლისთვისაც დაამტკიცა ამონახსნის არსებობა და ერთადერთობა. 1990 წელს პარდუმ და პენგმა [16] განიხილეს ზოგადი სახის BSDE და დაამტკიცეს ამონახსნის არსებობა და ერთადერთობა, როდესაც გენერატორი აკმაყოფილებს ლიფშიცის პირობას. ლიფშიცური ტიპის შექცეული განტოლებები ბუნებრივად ჩნდება ფინანსური მათემატიკისა და ოპტიმალური მართვის ამოცანებში, თუმცა უმრავლეს შემთხვევაში საჭირო ხდება უფრო ზოგადი ტიპის გენერატორის მქონე შექცეული განტოლებების განხილვა. გამოყენების ისეთ სფეროებში, როგორებიც არის ჰეჯირების და ინვესტირების ამოცანები და რისკისადმი მგრძნობიარე მართვის ამოცანები, გენერატორის ლიფშიცურის სტრუქტურა არ არის საკმარისი და აუცილებელი ხდება კვადრატულ გენერატორიანი შექცეული განტოლებების შესწავლა. ასეთი ტიპის განტოლებები პირველად შეისწავლეს ლეპელტიერმა და სან მარტინმა [14] 1998 წელს და კობილანსკიმ [13] 2000 წელს ვინერის ფილტრაციის შემთხვევაში და შემოსაზღვრული სასაზღვრო პირობით. მათი შედეგები განაზოგადეს მორლესმა [15] 2009 წელს და თევზაძემ [17] 2008 წელს უწყვეტი მარტინგალებისთვის. ამის შემდგომ ვინერის ფილტრაციის შემთხვევაში ბრაიანდმა და ჰუმ [4] 2008 წელს ერთგანზომილებიანი კვადრატული BSDE-სთვის განაზოგადეს არსებობის შედეგი შემოუსაზღვრელი სასაზღვრო პირობით. 2011 წელს დელბაენმა, ჰუმ და რიჩოუმ [9] განიხილეს კვადრატულად მზარდი ამოზნექილ გენერატორიანი BSDE ვინერის ფილტრაციის შემთხვევაში. ამოზნექილი ფუნქციების ლეჟანდრ-ფრეშეს გარდაქმნის გამოყენებით მათ აჩვენეს, რომ ასეთი განტოლების ნებისმიერი ამონახსნი შეიძლება წარმოდგეს გარკვეული

ოპტიმიზაციიის ამოცანის ფასის ფუნქციის სახით, რაც ამტკიცებს ამონახსნის ერთადერთობას ასეთი ტიპის განტოლებებისათვის.
მიმდინარე ნაშრომში დავამტკიცებთ კანტელის ჰიპოთეზას ფუნქციათა ზოგიერთი კლასისთვის, ხოლო შექცეული სტოქასტური დიფერენციალური განტოლებების საშუალებით და g ფუნქციაზე გარკვეული შეზღუდვების დაწესებით ვაჩვენებთ, რომ g იქნება მუდმივი ფუნქცია.
უფრო ზუსტად პირველ თავში ვაჩვენებთ, რომ თუ მოცემული g ფუნქცია პერიოდული, მონოტონური ან პერიოდულად მონოტონურია, მაშინ ეს ფუნქცია იქნება მუდმივი. ამისათვის ძირითადად გამოვიყენებთ მაწარმოებელი ფუნქციების მეთოდს. ასევე ანალიზური და ალბათობის თეორიის მეთოდების გამოყენებით ვაჩვენებთ, რომ g ფუნქციის პირველ წარმოებულში ჩასმული სტანდარტული ნორმალური შემთხვევითი სიდიდის მათემატიკური ლოდინი 0-ის ტოლია, ხოლო მეორე წარმოებულში ჩასმული სტანდარტული ნორმალური შემთხვევითი სიდიდის მათემატიკური ლოდინი ნაკლები ან ტოლი იქნება 0-ის.
მეორე თავში განვიხილავთ შექცეულ სტოქასტურ დიფერენციალურ განტოლებებს. თავდაპირველად კანტელის ჰიპოთეზის დაშვებიდან და მაწარმოებელი ფუნქციების საშუალებით პირველ თავში მიღებული ტოლობიდან შემოვიღებთ სტოქასტურ პროცესს, რომლისთვისაც გამოვიყვანთ შესაბამის შექცეულ სტოქასტურ დიფერენციალურ განტოლებას. შემდეგ შექცეული განტოლებების ტექნიკის გამოყენებით ვაჩვენებთ ამონახსნის მნიშვნელოვან თვისებებს. ამ ყველაფრის გამოყენებით კი დავამტკიცებთ, რომ თუ g ფუნქციის პირველ და მეორე წარმოებულში ჩასმული სტანდარტული ნორმალური შემთხვევითი სიდიდს მათემატიკური ლოდინი 0-ია, მაშინ g იქნება მუდმივი ფუნქცია.

§1. კანტელის ჰიპოთეზის დამტკიცება ფუნქციათა ზოგიერთი კლასისათვის

ვთქვათ მოცემული გვაქვს ძირითადი ალბათური სივრცე $(\Omega;\mathcal{F};P)$,სადაც Ω რაიმე სიმრავლეა, $\mathcal{F}$ Ω-ს ქვესიმრავლეთა σ-ალგებრაა, ხოლო P $\mathcal{F}$-ზე განსაზღვრული ალბათობაა.

ლემა 1.1. ვთქვათ $Z = X+\sqrt{g(X)}Y \sim N(a,\sigma^2)$, სადაც $X,Y \sim N(0;1)$, X და Y დამოუკიდებლი შემთხვევითი სიდიდეებია, $g(x)$ არაუარყოფითი და ზომადი ფუნქციაა და $g_0 = Eg(X)$. მაშინ $a=0, \sigma^2 = 1+g_0$ ანუ $Z = X+\sqrt{g(X)}Y \sim N(0{,}1+g_0)$.

დამტკიცება.

სანამ Z-ის ლოდინს და დისპერსიას გამოვთვლიდეთ ვაჩვენოთ, რომ $Eg(X)<\infty$. მართლაც, $\sqrt{g(X)}Y = Z-X \Rightarrow g(X)Y^2 = (Z-X)^2$. აქედან $E(g(X)Y^2) = E(Z-X)^2 < \infty$, რადგან X და Y ორივე ნორმალურადაა განაწილებული. გამომდინარე იქიდან, რომ $g(X)\geq 0$, $Y^2 \geq 0$ და $g(X)$ დამოუკიდებელია Y^2-სგან, ამიტომ

$$E(g(X)Y^2) = Eg(X)EY^2 = Eg(X) < \infty.$$

ახლა შეგვიძლია გამოვთვალოთ ლოდინი და დისპერსია X და Y-ის დამოუკიდებლობის და მათი სტანდარტული ნორმალურობის გამოყენებით:

$$EZ = E\left(X+\sqrt{g(X)}Y\right) = EX + E\left(\sqrt{g(X)}Y\right) = 0 + E\sqrt{g(X)}\cdot EY = 0;$$

$$DZ = EZ^2-(EZ)^2 = EX^2 - 2E(X\cdot\sqrt{g(X)}Y) + E(g(X)Y^2) = 1 + Eg(X) = 1+g_0.$$

 რ.დ.გ

ამჯერად გავარკვიოთ, თუ რა სახე აქვს ნორმალური განაწილების მაწარმოებელ ფუნქციას.

ლემა 1.2. დავუშვათ X ~ N(a, σ^2), მაშინ X-ის მაწარმოებელ ფუნქციას აქვს სახე:

$\mathrm{E}e^{tX} = e^{at+\frac{t^2\sigma^2}{2}}$.

დამტკიცება.

$\mathrm{h(t)} = \mathrm{E}e^{tX} = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx}\, e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}\, dx =$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}\, dx =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{2\sigma^2 tx-(x-a)^2}{2\sigma^2}}\, dx =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{2\sigma^2 tx-x^2+2ax-a^2}{2\sigma^2}}\, dx =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2-2\sigma^2 tx-2ax+a^2}{2\sigma^2}}\, dx =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2-2x(\sigma^2 t+a)+a^2}{2\sigma^2}}\, dx =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\left(x-(\sigma^2 t+a)\right)^2-(\sigma^2 t+a)^2+a^2}{2\sigma^2}}\, dx =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\left(x-(\sigma^2 t+a)\right)^2}{2\sigma^2}}\, e^{at+\frac{t^2\sigma^2}{2}}\, dx$$

ბოლო ფორმულაში შევნიშნოთ, რომ $\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{\left(x-(\sigma^2 t+a)\right)^2}{2\sigma^2}}$ წარმოადგენს ნორმალური განაწილების სიმკვრივეს N$(\sigma^2 t + a, \sigma^2)$ პარამეტრებით. ამიტომ საბოლოოდ გვექნება:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\left(x-(\sigma^2 t+a)\right)^2}{2\sigma^2}}\, e^{at+\frac{t^2\sigma^2}{2}}\, dx = e^{at+\frac{t^2\sigma^2}{2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\left(x-(\sigma^2 t+a)\right)^2}{2\sigma^2}}\, dx = e^{at+\frac{t^2\sigma^2}{2}}.$$

 რ.დ.გ

წინადადება 1.1. დავუშვათ $X, Y \sim N(0; 1)$, $g(x)$ არაუარყოფითი და ზომადი ფუნქციაა და სრულდება კანტელის პირობა $Z = X + \sqrt{g(X)}Y \sim N(a; \sigma^2)$, მაშინ $\forall t \in \mathbb{R}$-თვის

$$Ee^{\frac{t^2}{2}g(X+t)} = e^{\frac{t^2}{2}g_0}. \qquad (1)$$

დამტკიცება. ლემა 1-დან გამომდინარე $Z = X + \sqrt{g(X)}Y \sim N(0; 1 + g_0)$. გამოვთვალოთ მისი მაწარმოებელი ფუნქცია. ამისათვის გამოვიყენოთ ფორმულა:

$Ef(X, Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} Ef(X, y) f_Y(y) dy = \int_{-\infty}^{+\infty} Ef(x, Y) f_X(x) dx$, სადაც X და Y დამოუკიდებელი შემთხვევითი სიდიდეებია და $f(x, y)$ რამე ზომადი ფუნქციაა.

$$Ee^{tZ} = Ee^{X+\sqrt{g(X)}Y} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} Ee^{t\left(x+\sqrt{g(x)}Y\right)} e^{-\frac{x^2}{2}} dx =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx} Ee^{t\sqrt{g(x)}Y} e^{-\frac{x^2}{2}} dx =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx} e^{\frac{t^2 g(x)}{2}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx =$$

$$= Ee^{tX+\frac{t^2 g(X)}{2}}$$

თუ გამოვიყენებთ ლებეგის ინტეგრალში ცვლადის გარდაქმნის ფორმულას გვექნება:

$$Ee^{tX+\frac{t^2 g(X)}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx} e^{\frac{t^2 g(x)}{2}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{t(x+t)} e^{\frac{t^2 g(x+t)}{2}} e^{-\frac{(x+t)^2}{2}} dx =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{t(x+t) + \frac{t^2 g(x+t)}{2} - \frac{x^2}{2} - tx - \frac{t^2}{2}} dx =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{t(x+t) + \frac{t^2 g(x+t)}{2} - \frac{x^2}{2} - tx - \frac{t^2}{2}} dx =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{t^2}{2} + \frac{t^2 g(x+t)}{2} - \frac{x^2}{2}} dx =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{t^2 + t^2 g(x+t)}{2}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx =$$

$$= E e^{\frac{t^2 + t^2 g(X+t)}{2}} = E e^{\frac{t^2(1+g(X+t))}{2}}$$

მივიღეთ, რომ $Ee^{tZ} = Ee^{\frac{t^2(1+g(X+t))}{2}}$, მეორეს მხრივ ლემა 1-ის და ლემა 2-ის

გათვალისწინებით გვექნება $Ee^{tZ} = e^{\frac{t^2(1+g_0)}{2}}$ საიდანაც მივიღებთ ტოლობას:

$$E e^{\frac{t^2}{2}(1+g(X+t))} = e^{\frac{t^2}{2}(1+g_0)} \quad \Longrightarrow$$

$$e^{\frac{t^2}{2}} E e^{\frac{t^2}{2} g(X+t)} = e^{\frac{t^2}{2} + \frac{t^2}{2} g_0} \quad \Longrightarrow$$

$$E e^{\frac{t^2}{2} g(X+t)} = e^{\frac{t^2}{2} g_0}.$$

რ.დ.გ

სანამ თეორემა 1.1-ს დავამტკიცებთ, დაგვჭირდება დამხმარე ლემა, რომელსაც აქვე შემოგთავაზებთ:

ლემა 1.3. თუ ξ ისეთი შემთხვევითი სიდიდეა, რომ $Ee^{\xi} < \infty$ და $Ee^{\xi} = e^{E\xi}$ (2), მაშინ ξ მუდმივია თითქმის ყველგან.

დამტკიცება. რადგან $y = e^x$ ქვემოთ ამოზნექილი ფუნქციაა, ამიტომ $\forall\ x$ და $x_0 \in \mathbb{R}$ −თვის

$$e^x \geq e^{x_0} + (x - x_0)e^{x_0} \text{ (3)}$$

თუ (3)-ში შემოვიღებთ აღნიშვნას $x = \xi$ და $x_0 = E\xi$ და გავითვალისწინებთ (2)-ს მივიღებთ:

$$e^{\xi} = e^{\xi_0} + \xi e^{\xi_0} - \xi_0 e^{\xi_0} \qquad (4)$$

აქედან თუ ტოლობის ორივე მხარეს გავყობთ e^{ξ_0}-ზე, მივიღებთ:

$$e^{\xi - \xi_0} = 1 + \xi - \xi_0 \qquad (5)$$

შემოვიტანოთ აღნიშვნა $\xi - \xi_0 \equiv t$ (6). ჩავსვათ (6) (5)-ში და მივიღებთ

$e^t = 1 + t$. ეს უკანასკნელი ტოლობა კი მხოლოდ მაშინაა შესაძლებელი, როდესაც $t = 0$ ესე იგი $\xi - \xi_0 = 0 \Rightarrow \xi = \xi_0 \Rightarrow \xi = const$.

რ.დ.გ

განსაზღვრება 1.1. g ფუნქციას ვუწოდოთ პერიოდულად მონოტონური თუ $\exists \ \lambda \in \mathbb{R}$ ისეთი, რომ $g(x) \leq g(x + \lambda)$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

შენიშვნა: თუ $\exists$ ისეთი β, რომ $g(x + \beta) \leq g(x)$, მაშინ g იქნება პერიოდულად მონოტონური. მართლაც, თუ $y = x + \beta$, მაშინ $g(y) \leq g(y - \beta)$ და თუ ავიღებთ

$\lambda = -\beta$ მივიღებთ $g(y) \leq g(y + \lambda)$, $\forall y \in \mathbb{R}$ რაც ნიშნავს პერიოდულად მონოტონურობას.

თეორემა 1.1. დავუშვათ g ისეთი არაუარყოფითი, ზომადი ფუნქციაა რომლისთვისაც სრულდება კანტელის ჰიპოთეზის პირობა, მაშინ სამართლიანია შემდეგი დებულებები:

(i) თუ g პერიოდულია, მაშინ g მუდმივია;

(ii) თუ g მონოტონურია, მაშინ g მუდმივია;

(iii) თუ g პერიოდულად მონოტონურია, მაშინ g მუდმივია.

დამტკიცება.

i) ვაჩვენოთ, რომ თუ g პერიოდულია, მაშინ g მუდმივია. მართლაც, დავუშვათ g ფუნქციის პერიოდია T. თუ (1) ფორმულაში $t = T$, მივიღებთ

$$Ee^{\frac{T^2}{2}g(X+T)} = Ee^{\frac{T^2}{2}g(X)} = e^{\frac{T^2}{2}Eg(X)} \qquad (7)$$

შემოვიტანოთ აღნიშვნა $\xi \equiv \frac{T^2}{2}g(X)$, $\xi_0 \equiv E\xi$, მაშინ (7)-დან გაკეთებული აღნიშვნების საფუძველზე გვექნება $Ee^{\xi} = e^{E\xi}$. აქედან **ლემა 5**-ის გამოყენებით მივიღებთ, რომ

$\xi = const \;\; \Rightarrow \;\; \frac{T^2}{2}g(X) = const \;\; \Rightarrow \;\; g = const.$

ii) ვაჩვენოთ, რომ თუ g მონოტონურია, მაშინ g მუდმივია. დავუშვათ g ფუნქცია არაკლებადია, მაშინ ნებისმიერი დადებითი და ფიქსირებული t-თვის იენსენის უტოლობის გამოყენებით მივიღებთ:

$$e^{\frac{t^2}{2}g_0} = Ee^{\frac{t^2}{2}g(X+t)} \geq \; Ee^{\frac{t^2}{2}g(X)} \geq e^{E\frac{t^2}{2}g(X)} = e^{\frac{t^2}{2}g_0} \qquad (8)$$

აქედან $Ee^{\frac{t^2}{2}g(X)} = e^{\frac{t^2}{2}g_0}$. შემოვიტანოთ აღნიშვნა $\xi \equiv e^{\frac{t^2}{2}g(X)}$, $\xi_0 \equiv E\xi$, მაშინ (8)-დან გაკეთებული აღნიშვნების საფუძველზე გვექნება $Ee^{\xi} = e^{E\xi}$. აქედან **ლემა 5**-ის გამოყენებით მივიღებთ, რომ $\xi = const \Rightarrow \; g = const.$

შევნიშნოთ, რომ თუ g ფუნქცია არაზრდადია, მაშინ $g(X+t)$-ში შეგვიძლია t ავიღოთ უარყოფითი და დამტკიცება იქნება არაკლებადი შემთხვევის ანალოგიურად.

iii) ვაჩვენოთ, რომ თუ g მონოტონურად პერიოდულია მაშინ g მუდმივია. მართლაც,

$$Ee^{\frac{t^2}{2}g(X+\lambda)} \geq \; Ee^{\frac{t^2}{2}g(X)} \geq e^{E\frac{t^2}{2}g(X)} = e^{\frac{t^2}{2}g_0} \Rightarrow Ee^{\frac{t^2}{2}g(X)} = e^{\frac{t^2}{2}g_0} \qquad (9).$$

შემოვიტანოთ აღნიშვნა $\xi \equiv e^{\frac{t^2}{2}g(X)}$, $\xi_0 \equiv E\xi$, მაშინ (7)-დან გაკეთებული აღნიშვნების საფუძველზე გვექნება $Ee^{\xi} = e^{E\xi}$. აქედან **ლემა 5**-ის გამოყენებით მივიღებთ, რომ $\xi = const \Rightarrow \; g = const.$ რ.დ.გ

კანტელის ჰიპოთეზის დაშვებიდან გვაქვს ტოლობა $Ee^{\frac{\lambda^2}{2}g(W_1+\lambda)} = e^{\frac{\lambda^2}{2}Eg(W_1)}$ საიდანაც იენსენის უტოლობით მივიღებთ, რომ $e^{\frac{\lambda^2}{2}Eg(W_1+\lambda)} \le e^{\frac{\lambda^2}{2}Eg(W_1)} \Longrightarrow Eg(W_1+\lambda) \le Eg(W_1)$ $\forall\ \lambda$-თვის. (10)

შემოვიღოთ ფუნქცია $f(x) = Eg(W_1 + x)$. ზემოთქმულიდან ცხადია, რომ $f(x) \le f(0)$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

ლემა 1.4. თუ g ფუნქცია წარმოებადია და თან $|g'(x)| \le c$, მაშინ $f'(x) = Eg'(W_1 + x)$.

დამტკიცება.

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{Eg(W_1+x+h)-Eg(W_1+x)}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} E\frac{1}{h}\big(g(W_1+x+h)-g(W_1+x)\big) \qquad (11)$$

ცხადია, რომ $\left|\frac{g(W_1+x+h)-g(W_1+x)}{h}\right| = |g'(a)| \le c$, სადაც $a \in (W_1 + x; W_1 + x + h)$.

ამიტომ მაჟორირებადი კრებადობის თეორემით (11)-ში შეგვიძლია ზღვრის და მათემატიკური ლოდინის გადანაცვლება:

$$\lim_{h\to 0} E\frac{1}{h}\big(g(W_1+x+h)-g(W_1+x)\big) = E\lim_{h\to 0}\frac{g(W_1+x+h)-g(W_1+x)}{h} = Eg'(W_1+x).$$

ანალოგიურად შეგვიძლია ვაჩვენოთ, რომ თუ $|g''(x)| \le c$, მაშინ $f''(x) = Eg''(w_1 + x)$.

 რ. დ. გ.

(10)-დან მივიღებთ, რომ $f(x) \le f(0)$ $\forall\ x \in \mathbb{R}$-თვის ანუ $x = 0$ არის f-ის მაქსიმუმის წერტილი ანუ $f'(0) = 0$ და $f''(0) \le 0$, რაც იმას ნიშნავს, რომ $f'(0) = Eg'(W_1) = 0$ და $f''(0) = Eg''(W_1) \le 0$.

ახლა შეგვიძლია ვაჩვენოთ, რომ კანტელის ჰიპოთეზის დაშვების გათვალისწინებით g იქნება შემოსაზღვრული ფუნქცია. როგორც ვიცით

$$Ee^{\lambda X+\frac{\lambda^2}{2}g(X)} = e^{\frac{\lambda^2}{2}(1+g_0)}, \quad \forall\, \lambda \in \mathbb{R}.$$

შემოვიღოთ სიმრავლეები $A_\epsilon = \{x: g(x) \geq 1 + g_0 + \epsilon\}$ და $A'_\epsilon = A_\epsilon \cap [a; +\infty)$, სადაც $\epsilon \geq 0$.

დავუშვათ $\nu(A'_0) > 0$, სადაც $\nu(B) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_B e^{-\frac{x^2}{2}}dx$, მაშინ

$$1 = Ee^{\lambda X+\frac{\lambda^2}{2}(g(X)-1-g_0)} \geq Ee^{\lambda X+\frac{\lambda^2}{2}(g(X)-1-g_0)} \times I_{\{x\in A'_\epsilon\}} \geq$$

$$\geq e^{\lambda a+\frac{\lambda^2}{2}\epsilon} \times P(x \in A'_\epsilon) = e^{\lambda a+\frac{\lambda^2}{2}\epsilon}\nu(A'_\epsilon).$$

თუ დავუშვებთ, რომ $\nu(A'_0) > 0$, მაშინ $\forall\epsilon > 0$-თვის $\nu(A'_\epsilon) > 0$ და გამოვა, რომ $e^{\lambda a+\frac{\lambda^2}{2}\epsilon}\nu(A'_\epsilon) \to \infty$, როცა $\lambda \to \infty$, რაც წინააღმდეგობაა ანუ $\nu(A'_0) = 0$.

რადგანაც a ნებისმიერია, ამიტომ მივიღებთ, რომ $\nu\{x: g(x) \geq 1 + g_0\} = 0$ ანუ $g(x) \leq 1 + g_0$.

§2. შექცეული სტოქასტური დიფერენციალური განტოლებები

ვთქვათ $(W_t)_{t\geq 0}$ ვინერის პროცესია, რაც იმას ნიშნავს, რომ $W(\omega, t)$ წარმოადგენს შემთხვევით პროცესს, რომელსაც გააჩნია შემდეგი თვისებები:

(i) $W_0 = 0$ და $W_t \sim N(0;t) \quad \forall\, t > 0$-თვის;

(ii) $W_t - W_s \perp W_s \ \ \forall\, s < t$-თვის;

(iii) $W_t - W_s \sim N(0; t-s) \ \ \forall\, s < t$-თვის.

ამასთან შემოვიღოთ ვინერის პროცესის მიერ წარმოქმნილი σ-ალგებრების ნაკადი

$\mathcal{F}_t^W = \sigma\big(W_s^{-1}(B) : s \leq t,\ B \in \mathfrak{B}(R)\big)$, სადაც $\mathfrak{B}(R)$ R-ის ბორელის σ-ალგებრაა.

განვიხილოთ შემდეგი შექცეული სტოქასტური დიფერენციალური განტოლება

$t \in [0;T]$ ინტერვალზე:

$$\begin{cases} Y_t = Y_0 - \int_0^t f(s, Z_s)ds + \int_0^t Z_S dW_s \\ Y_T = \eta \end{cases},$$

სადაც გენერატორი $f\colon [0;T] \times \Omega \times \mathbb{R} \ \to \mathbb{R}$ არის ზომადი ფუნქცია და ყოველი z-სთვის $f(\cdot,\ \cdot, z)$ არის ჭვრეტადი პროცესი, ხოლო η $\mathcal{F}_T^W$ ზომადი შემთხვევითი სიდიდეა. ამასთან $\int_0^t Z_S dW_s$ სტოქასტური ინტეგრალია ვინერის პროცესის მიმართ.

განსაზღვრება 2.1. შექცეული სტოქასტური დიფერენციალური განტოლების ამონახსნს ვუწოდებთ წყვილს (Y, Z), სადაც Y სემიმარტინგალია, Z ჭვრეტადი და ვინერის პროცესით ინტეგრებადი პროცესია და (Y, Z) წყვილი აკმაყოფილებს ზემოხსენებულ განტოლებას.

$\forall\, \lambda \neq 0$-სთვის შემოვიღოთ პროცესი $V_t(\lambda) = \frac{2}{\lambda^2} \ln E\left[e^{\frac{\lambda^2}{2} g(W_1+\lambda)} \middle| \mathcal{F}_t^W \right]$, სადაც W_1 ვინერის პროცესია გაჩერებული $t = 1$ მომენტში. ცხადია, რომ W_1-ს აქვს სტანდარტული ნორმალური განაწილება: $W_1 \sim N(0;1)$.

კანტელის ჰიპოტეზის დაშვებიდან გამომდინარე ცხადია, რომ

$$V_0(\lambda) = \frac{2}{\lambda^2} \ln E\left[e^{\frac{\lambda^2}{2} g(W_1+\lambda)}\right] = \frac{2}{\lambda^2} \ln e^{\frac{\lambda^2}{2} Eg(W_1)} = Eg(W_1) = g_0.$$

ამასთან მარტივი დასანახია, რომ $V_1(\lambda) = g(W_1 + \lambda)$.

ადვილი დასანახია, რომ თუ $g(x) \leq C$, მაშინ $V_t(\lambda) \leq \frac{2}{\lambda^2} \ln E\left[e^{\frac{\lambda^2}{2}C} \middle| \mathcal{F}_t^W\right] = \frac{2}{\lambda^2} \ln e^{\frac{\lambda^2}{2}C} = C$.

ანუ $V_t(\lambda)$ შემოსაზღვრული პროცესია.

წინადადება 2.1. თუ $g(x)$ ზომადი და შემოსაზღვრული ფუნქციაა, მაშინ $V_t(\lambda)$ არის შემდეგი შექცეული სტოქასტური დიფერენციალური განტოლების ერთადერთი შემოსაზღვრული ამონახსნი:

$$\begin{cases} Y_t = Y_0 - \frac{\lambda^2}{4} \int_0^t Z_s^2 ds + \int_0^t Z_s dW_s \\ Y_1 = g(W_1 + \lambda) \end{cases}. \qquad (12)$$

დამტკიცება.

(არსებობა) ცხადია, რომ $\exp\left\{\frac{\lambda^2}{2} V_t(\lambda)\right\}$ მარტინგალია, სადაც $V_t(\lambda)$-ს სემიმარტინგალური გაშლა არის

$$V_t(\lambda) = V_0(\lambda) - A_t + \int_0^t \phi_s(\lambda) dW_s .$$

$f(x) = e^{\frac{\lambda^2}{2}x}$ ფუნქციისათვის იტოს ფორმულის გამოყენებით გვექნება:

$$\exp\left\{\frac{\lambda^2}{2} V_t(\lambda)\right\} = e^{\frac{\lambda^2}{2} V_0(\lambda)} - \frac{\lambda^2}{2} \int_0^t e^{\frac{\lambda^2}{2} V_s(\lambda)} dA_s + \frac{\lambda^2}{2} \int_0^t e^{\frac{\lambda^2}{2} V_s(\lambda)} \phi_s(\lambda) dW_s + \frac{\lambda^4}{8} \int_0^t e^{\frac{\lambda^2}{2} V_s(\lambda)} \phi_s^2(\lambda) ds$$

$$= e^{\frac{\lambda^2}{2} V_0(\lambda)} + \frac{\lambda^2}{2} \int_0^t e^{\frac{\lambda^2}{2} V_s(\lambda)} \left(\frac{\lambda^2}{4} \phi_s^2(\lambda) ds - dA_s\right) + \frac{\lambda^2}{2} \int_0^t e^{\frac{\lambda^2}{2} V_s(\lambda)} \phi_s(\lambda) dW_s.$$

გამომდინარე იქედან, რომ $\exp\left\{\frac{\lambda^2}{2}V_t(\lambda)\right\}$ მარტინგალია მისი სასრული ვარიაციის ნაწილი უნდა იყოს 0, რაც იმას ნიშვავს, რომ $A_t = \frac{\lambda^2}{4}\int_0^t \phi_s^2(\lambda)ds$. ჩავსვათ მიღებული გამოსახულება $V_t(\lambda)$-ს სემიმარტინგალურ გაშლაში და მივიღებთ (12) ტოლობას.

(ერთადერთობა) ვთქვათ $Y_t(\lambda)$ (12)-ის ამონახსნია, მაშინ (12)-დან გვექნება:

$$\exp\left\{\frac{\lambda^2}{2}\left(Y_t(\lambda) - Y_0(\lambda)\right)\right\} = \exp\left\{\frac{\lambda^2}{2}\int_0^t \phi_s(\lambda)dW_s - \frac{\lambda^4}{8}\int_0^t \phi_s^2(\lambda)ds\right\} = \mathcal{E}_t\left(\frac{\lambda^2}{2}\phi(\lambda)\cdot W\right),$$

საიდანაც ვიღებთ, რომ $\exp\left\{\frac{\lambda^2}{2}\left(Y_t(\lambda) - Y_0(\lambda)\right)\right\}$ მარტინგალია. მაშასადამე გვექნება, რომ

$$\exp\left\{\frac{\lambda^2}{2}\left(Y_t(\lambda) - Y_0(\lambda)\right)\right\} = E\left[\frac{\lambda^2}{2}\left(Y_1(\lambda) - Y_0(\lambda)\right)\middle|\mathcal{F}_t^W\right]$$

საიდანაც (12)-ის სასაზღვრო პირობის გამოყენებით მივიღებთ, რომ

$$\exp\left\{\frac{\lambda^2}{2}Y_t(\lambda)\right\} = E\left[\frac{\lambda^2}{2}g(W_1+\lambda)\middle|\mathcal{F}_t\right] \quad \Rightarrow \quad Y_t(\lambda) = V_t(\lambda).$$

 რ. დ. გ.

საინტერესოა რა ხდება, როცა $\lambda = 0$. თუ (12)-ში ჩავსვამთ $\lambda = 0$, მაშინ გვექნება:

$$\begin{cases} V_t(0) = g_0 + \int_0^t \phi_s(0)dW_s \\ V_1(0) = g(W_1) \end{cases}. \qquad (13)$$

ცხადია, რომ $V_t(0)$ მარტინგალია და თან $V_1(0) = g(W_1)$, ამიტომ

$$V_t(0) = E[V_1(0)|\mathcal{F}_t^W] = E[g(W_1)|\mathcal{F}_t^W].$$

მეორეს მხრივ, ვაჩვენოთ, რომ

$$V_t(\lambda) = \frac{2}{\lambda^2} \ln E\left[e^{\frac{\lambda^2}{2} g(W_1+\lambda)} \middle| \mathcal{F}_t^W\right] \rightarrow E[g(W_1)|\mathcal{F}_t^W] = V_t(0), \lambda \rightarrow 0$$

თუ დამატებით მოვითხოვთ, რომ $g'(x)$ შემოსაზღვრული ფუნქციაა.

მართლაც, ლოპიტალის წესის გამოყენებით გვექნება:

$$\lim_{\lambda \to 0} V_t(\lambda) = \lim_{\lambda \to 0} \frac{2 \ln E\left[e^{\frac{\lambda^2}{2} g(W_1+\lambda)} \middle| \mathcal{F}_t^W\right]}{\lambda^2} =$$

$$= \lim_{\lambda \to 0} \frac{2E\left[\left(\lambda g(W_1+\lambda) + \frac{\lambda^2}{2} g'(W_1+\lambda)\right) e^{\frac{\lambda^2}{2} g(W_1+\lambda)} \middle| \mathcal{F}_t^W\right]}{2\lambda E\left[e^{\frac{\lambda^2}{2} g(W_1+\lambda)} \middle| \mathcal{F}_t^W\right]} =$$

$$= \lim_{\lambda \to 0} \frac{E\left[\left(g(W_1+\lambda) + \frac{\lambda}{2} g'(W_1+\lambda)\right) e^{\frac{\lambda^2}{2} g(W_1+\lambda)} \middle| \mathcal{F}_t^W\right]}{E\left[e^{\frac{\lambda^2}{2} g(W_1+\lambda)} \middle| \mathcal{F}_t^W\right]} = E[g(W_1)|\mathcal{F}_t^W] = V_t(0).$$

ბოლოსწინა ტოლობაში შეგვიძლია ზღვარზე გადასვლა, რადგან დაშვების თანახმად g და g' შემოსაზღვრული ფუნქციებია და შესაბამისად შეგვიძლია მაჟორირებადი კრებადობის თეორემის გამოყენება.

ლემა 2.1. თუ g ფუნქციისათვის $g(x) \leq C$, მაშინ საკმარისად მცირე λ-სთვის $E \int_0^1 \phi_s^2(\lambda) ds \leq 2C^2$.

დამტკიცება. დაშვების თანახმად $g(x) \leq C$. გამოვიყენოთ იტოს ფორმულა $f(x) = x^2$-სთვის (12) განტოლებაში შედეგად გვექნება:

$$V_t^2(\lambda) = g_0^2 - \frac{\lambda^2}{2} \int_0^t V_s(\lambda) \phi_s^2(\lambda) ds + 2 \int_0^t V_s(\lambda) \phi_s(\lambda) dW_s + \int_0^t \phi_s^2(\lambda) ds.$$

ავიღოთ $t = 1$ და ტოლობის ორივე მხარეს მათემატიკური ლოდინები:

$$Eg^2(W_1+\lambda) = g_0^2 - \frac{\lambda^2}{2} E\int_0^1 V_s(\lambda)\phi_s^2(\lambda)ds + E\int_0^1 \phi_s^2(\lambda)ds \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad E\int_0^1 \phi_s^2(\lambda)ds \le Eg^2(W_1+\lambda) + \frac{\lambda^2}{2} E\int_0^1 V_s(\lambda)\phi_s^2(\lambda)ds \le C^2 + \frac{\lambda^2 C}{2} E\int_0^1 \phi_s^2(\lambda)ds \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ \left(1 - \frac{\lambda^2 C}{2}\right) E\int_0^1 \phi_s^2(\lambda)ds \le C^2 \quad \Rightarrow \quad E\int_0^1 \phi_s^2(\lambda)ds \le \frac{2C^2}{2-\lambda^2 C} \le 2C^2.$$

აქ λ ისეთია, რომ $\lambda^2 C < 1$.

 რ. დ. გ.

წინადადება 2.2. თუ g შემოსაზღვრული ფუნქციაა, მაშინ $E\int_0^1 \big(\phi_s(\lambda) - \phi_s(0)\big)^2 ds \to 0$, როდესაც $\lambda \to 0$.

დამტკიცება. (12) და (13) ტოლობიდან ცხადია, რომ

$$V_t(\lambda) - V_t(0) = -\frac{\lambda^2}{4}\int_0^t \phi_s^2(\lambda)ds + \int_0^t \big(\phi_s(\lambda) - \phi_s(0)\big)dW_s.$$

კვლავ გამოვიყენოთ იტოს ფორმულა $f(x) = x^2$-სთვის და ისევე როგორც წინა ლემაში და მივიღებთ:

$$E\big(V_1(\lambda) - V_1(0)\big)^2 = -\frac{\lambda^2}{2} E\int_0^1 \big(V_1(\lambda) - V_1(0)\big)\phi_s^2(\lambda)ds + E\int_0^1 \big(\phi_s(\lambda) - \phi_s(0)\big)^2 ds.$$

აქედან კი მივიღებთ:

$$E\int_0^1 \big(\phi_s(\lambda) - \phi_s(0)\big)^2 ds \le E\big(g(W_1+\lambda) - g(W_1)\big)^2 + \lambda^2 C E\int_0^1 \phi_s^2(\lambda)ds$$

$$\le E\big(g(W_1+\lambda) - g(W_1)\big)^2 + \lambda^2 C^3.$$

g-ს უწყვეტობისა და მაჟორირებადი კრებადობის თეორემის გამოყენებით გვექნება, რომ $E\big(g(W_1+\lambda)-g(W_1)\big)^2 \to \; 0$, როდესაც $\lambda \to 0$, ანუ მივიღებთ, რომ $\lim\limits_{\lambda\to 0} E\int_0^1 \big(\phi_s(\lambda)-\phi_s(0)\big)^2 ds = 0$.

 რ. დ. გ.

ამჯერად დავამტკიცოთ ეგრეთ წოდებული პირობითი თეორემა. ჩვენ პირველ თავში ვაჩვენეთ, რომ $Eg'(W_1)=0$ და $Eg''(W_1)\le 0$. შემდეგი თეორემა გვეუბნება, რომ თუ - $Eg'(W_1)$-თან ერთად $Eg''(W_1)$-იც იქნება 0-ის ტოლი, მაშინ კანტელის ჰიპოთეზა სამართლიანი იქნება ისეთი ფუნციების კლასში, რომლის პირველი და მეორე წარმოებულები შემოსაზღვრულია.

თეორემა 2.1. თუ უწყვეტი g ფუნქციის პირველი და მეორე წარმოებულები შემოსაზღვრულია, სრულდება კანტელის ჰიპოთეზის დაშვება და ამასთან $Eg'(W_1)=Eg''(W_1)=0$, მაშინ $g(x)\equiv const$.

დამტკიცება. ცხადია, რომ $V_1(0)-EV_1(0)=\int_0^1 \phi_s(0)dW_s$, საიდანაც

$$E\big(g(W_1)-Eg(W_1)\big)^2 = E\left(\int\limits_0^1 \phi_s(0)dW_s\right)^2 = E\int\limits_0^1 \phi_s^2(0)ds.$$

ვაჩვენოთ, რომ საზოგადოდ $Eg''(W_1) = -\frac{1}{2}E\int_0^1 \phi_s^2(0)ds$. მართლაც:

$$Eg''(W_1) = E\lim_{h\to 0}\frac{g(W_1+2h)-2g(W_1+h)+g(W_1)}{h^2} =$$

$$= E\lim_{h\to 0}\frac{1}{h^2}\left[-h^2\int\limits_0^1 \phi_s^2(2h)ds + \int\limits_0^1 \phi_s(2h)dW_s + \frac{h^2}{2}\int\limits_0^1 \phi_s^2(h)ds - 2\int\limits_0^1 \phi_s(h)dW_s \right.$$
$$\left. + \int\limits_0^1 \phi_s(0)dW_s\right] =$$

$$= E \lim_{h \to 0} \left[-\int_0^1 \phi_s^2(2h) ds + \frac{1}{2} \int_0^1 \phi_s^2(h) ds + \int_0^1 \frac{\phi_s(2h) - 2\phi_s(h) + \phi_s(0)}{h^2} dW_s \right] =$$

$$= \lim_{h \to 0} \left[-E \int_0^1 \phi_s^2(2h) ds + \frac{1}{2} E \int_0^1 \phi_s^2(h) ds \right] = -E \int_0^1 \phi_s^2(0) ds + \frac{1}{2} E \int_0^1 \phi_s^2(0) ds$$

$$= -\frac{1}{2} E \int_0^1 \phi_s^2(0) ds.$$

ანუ გამოდის, რომ თუ $Eg''(W_1) = 0$, მაშინ $E \int_0^1 \phi_s^2(0) ds = 0$, საიდანაც გვექნება, რომ $E\big(g(W_1) - Eg(W_1)\big)^2 = 0$, რაც იმას ნიშნავს, რომ $g(W_1) = Eg(W_1)$ P თ.ა, აქედან კი g-ს უწყვეტობის გათვალისწინებით გვექნება, რომ $g(x) \equiv g_0 = Eg(W_1)$.

 რ. დ. გ.

დასკვნა

ნაშრომი თეორიული ხასიათისაა და ის ეხება კანტელის ცნობილი ჰიპოთეზის ამოხსნადობის საკითხებს. ნაშრომში შესწავლილია კანტელის ჰიპოთეზა ფუნქციათა ზოგიერთი კლასისათვის. დამტკიცებული გვაქვს, რომ მონუტონურ, პერიოდულ და პერიოდულად მონოტონურ ფუნქციათა კლასებში სამართლიანია კანტელის ჰიპოთეზა. ამის გარდა ვაჩვენეთ, რომ კანტელის ჰიპოთეზის პირობებში თუ g ფუნქციის პირველი და მეორე წარმოებული შემოსაზღვრულია, მაშინ პირველ წარმოებულში ჩასმული სტანდარტული ნორმალური შემთხვევითი სიდიდის მათემატიკური ლოდინი ნულია, ხოლო მეორე წარმოებულში ჩასმული სტანდარტული ნორმალური შემთხვევითი სიდიდის მათემატიკური ლოდინი ნაკლებია ან ტოლი ნულზე. ამასთან შექცეული სტოქასტური დიფერენციალური განტოლებების გამოყენებით დავამტკიცეთ ე.წ პირობითი თეორემა, რომ თუ მეორე წარმოებულის შემთხვევაში ნაცვლად ნაკლებია ან ტოლიასი გვექნება ტოლობა, მაშინ g ფუნქცია გამოდის მუდმივი. ამ ნაშრომის გამოყენება შეიძლება იმ თვალსაზრისით, რომ თუ დამტკიცდება, რომ მეორე წარმოებულის შემთხვევაში მათემატიკური ლოდინი მეტია ან ტოლი ნულზე, მაშინ დამტკიცდება კანტელის ჰიპოთეზა შემოსაზღვრული პირველი და მეორე წარმოებულის მქონე ფუნქციათა კლასში.

გამოყენებული ლიტერატურა

[1] ARKIN, V., and M. SAKSONOV: “Necessary Optimality Conditions for Stochastic Differential Equations,” (1979) *Soviet Math. Dokl.*, 20, 1–5.

[2] BISMUT, J. M.: “Conjugate Convex Functions in Optimal Stochastic Control,” (1973) *J. Math. Anal. Appl.*, 44, 384–404.

[3] J. M. Bismut, “Controle des systemes linearies quadratiques: applications de l’integrale stochastique,” *seminaire de Probabilites XII (eds.: C. Dellacherie, P. A. Meyer, and M. Weil), Lecture Notes im Mathematics 649, Springer-Verlag, Berlin/Heidelberg* (1978), 180-264.

[4] P. Briand and Y. Hu, Quadratic BSDEs with convex generators and unbounded terminal conditions, *Probab. Theory Related Fields* **141**: 3-4 (2008), 543-567.

[5] CADENILLAS, A., and I. KARATZAS (1995): “The Stochastic Maximum Principle for Linear Convex

[6] CANTELLI, F. P. (1918). Sullo schema lexiano della dispersione ipernormale. *Memorie Accad. Naz. Lincei* **12** 395–411.

[7] R. Chitashvili, Martingale ideology in the theory of controlled stochastic processes, in: *Probability theory and mathematical statistics (Tbilisi,* 1982*)*, 73-92, Lecture notes im Math., 1021, Springer, Berlin, 1983.

[8] DE MEYER, B., ROYNETTE, B.,VALLOIS, P. andYOR, M. (2002). On independent times and positions for Brownian motions. *Rev. Mat. Iberoam.* **18** 541–586. MR1954864

[9] F. Delbaen, Y. Hu and A. Richou, On the uniqueness of solutions to quadratic BSDEs with convex generators and unbounded terminal conditions, *Ann. Inst. Henri Poincare Probab. stat.* **47**:2 (2011), 559 – 574.

[10] DUDLEY, R. M. (1974). The Gaussian process and how to approach it. In *Proceedings of the International Congress of Mathematicians* (*Vancouver*, *BC*, 1974), *Vol.* 2, 143–146. Canad. Math. Congress, Montreal, Que. MR0482972

[11] KABANOV, Y. (1978): "On the Pontryiagin Maximum Principle for the Linear Stochastic Differential Equations," in *Probabilistic Models and Control of Economical Processes*, CEMI.

[12] V.Kleptsyn and A.Kurtzmann. A counterexample to the Cantelli conjecture through the Skorokhod embedding problem. *The annals of probability (2015),* Vol. 43, No. 5, 2250–2281 DOI: 10.1214/14-AOP932

[13] M. Kobylanski, Backward stochastic differential equations and partial differential equations with quadratic growth, *Ann. Probab.* **28**:2 (2000) 558-602.

[14] J. P. Lepeltier and J. San Martin, Existence for BSDE with superlinear-quadratic coefficient, *Stochastics Stochastics Rep.* **63**:3-4 (1998) 227-240.

[15] M. A. Morlais, Quadratic BSDEs driven by a continuos martingale and applications to the utility maximization problem, *Finance Stoch.* **13**:1 (2009), 121-150.

[16] PARDOUX, E., and S. PENG (1990): "Adapted Solution of a Backward Stochastic Differential Equation," *Systems Control Lett.*, 14, 55–61.

[17] R. Tevzadze, Solvability of backward stochastic differential equations with quadratic growth, *Stochastic Process. Appl.* **118**:3 (2008), 503-515.

[18] TORTORICI, P. (1948). Soluzione approssimata di un'equazione integrale di Cantelli. *Ann. Mat. Pura Appl.* (4) **27** 75–86. MR0030112

[19] TRICOMI, F. G. (1967). Einige ungelöste Probleme der klassischen Analysis. *Abh. Math. Semin. Univ. Hambg.* **31** 25–32. MR0216906