

ივანე ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის
სახელმწიფო უნივერსიტეტის ზუსტ და საბუნებისმეტყველო
მეცნიერებათა ფაკულტეტი



მირანდა გამისონია

წამახვილებული ფირფიტის ღუნვის ამოცანების გამოკვლევა
ი. ვეკუას იერარქიული მოდელების მოდიფიცირებულ $N = 2$
მიახლოებაში

On a Bending of Cusped Plates in Case of $N = 2$ Approximation of
Hierarchical Models of I. Vekua's

გამოყენებითი მათემატიკა

ნაშრომი შესრულებულია გამოყენებითი მათემატიკის მაგისტრის

აკადემიური ხარისხის მოსაპოვებლად

ხელმძღვანელი: ასოცირებული პროფესორი ნატალია ჩინჩალაძე

ასისტენტ პროფესორი მაია სვანაძე

თბილისი 2022

სარჩევი

ანოტაცია	3
Summary	5
შესავალი	6
1. ძირითადი განტოლებები ფირფიტებისთვის ღუნვის და გაჭიმვა-კუმშვის დროს	9
2. იერარქიული მოდელები, N -ური მიახლოება	16
3. $N = 2$ მიახლოება	24
4. ფირფიტების დეფორმაცია $N = 2$ მიახლოებაში	26
დასკვნა	34
გამოყენებული ლიტერატურა	35

ანოტაცია

1955 წელს ილია ვეკუას [5-8] დასვა დრეკადი წამახვილებული ფირფიტების გამოკვლევის ამოცანა, ე.ი ისეთი ფირფიტები რომლის სისქე საზღვარის ნაწილზე ან მთლიან საზღვარზე ნულის ტოლია. ასეთი სხეულები, თუ განვიხილავთ, როგორც სამგანზომილებიან მოდელს, წარმოადგენენ სამგანზომილებიან არეებს, საზოგადოდ არალიფშიცური საზღვრებით. ხოლო 1965 წელს მან გამოაქვეყნა მოდელები სტანდარტული გარსებისთვის [9] და ორივე ნაშრომში ხაზი გაუსვა წამახვილებული გარსებისთვის სასაზღვრო ამოცანების შესწავლის მნიშვნელობას, რაც დაკავშირებულია გადაგვარებულ კერძოწარმოებულიან დიფერენციალურ განტოლებებსა და სისტემებთან. პრაქტიკაში, ასეთი ფირფიტები და ღეროები ხშირად გვხვდება სივრცულ კონსტრუქციებში ნაწილობრივ ჩამაგრებული ნაპირებით, როგორცაა სტადიონის სახურავები, თვითმფრინავების ფრთები, წყალქვეშა ნავების ფრთები და ა. შ. გარდა ამისა, მანქანათმშენებლობაში (საჭრელი და სარადნავი ჩარხები), კოსმონავტიკაში, ტურბინებში, და სხვა საინჟინრო სფეროებში (მაგალითად, კაშხლებში). ამ ამოცანებს სტატიკის შემთხვევაში მათემატიკურად მივყავართ რიგის გადაგვარების მქონე ელიფსური ტიპის განტოლებებისა და სისტემებისთვის სასაზღვრო ამოცანების გამოკვლევის საკითხამდე, ხოლო დინამიკის შემთხვევაში ჰიპერბოლური ტიპის განტოლებებისა და სისტემებისთვის საწყის-სასაზღვრო ამოცანების დასმისა და ამოხსნადობის გამოკვლევის საკითხებამდე (შესაბამის გამოკვლევებთან დაკავშირებით მოცემულია მიმოხილვები [10] და [11-13]-ში, აგრეთვე ილია ვეკუას კომენტარები [8]-ში გვ. 86).

პრიზმული გარსები, ფირფიტები ფართოდ გამოიყენება სხვადასხვა საინჟინრო სტრუქტურებსა და თანამედროვე ტექნოლოგიებში. აქედან გამომდინარე მნიშვნელოვანია ავაგოთ და გამოვიკვლიოთ ფირფიტების სამგანზომილებიანი მოდელების მიახლოებითი ალგორითმები.

დრეკადი წამახვილებული სიმეტრიული პრიზმული გარსებისთვის (ცვლადი სისქის მქონე ფირფიტებისთვის წამახვილებული ბოლოთი) იერარქიული მოდელები აგებულია ი. ვეკუას მიერ. ილია ვეკუას განზომილების რედუქციის მეთოდით მიღებულია ძირითად განტოლებათა სისტემა და იერარქიული მოდელების N -ურ მიახლოებაში დასმულია სასაზღვრო ამოცანები [4].

წინამდებარე ნაშრომში გამოკვლეულია წამახვილებული ფირფიტის ღუნვის ამოცანები ი. ვეკუას იერარქიული მოდელების მოდიფიცირებულ $N = 2$ მიახლოებაში. სახელდობრ, ილია ვეკუას განზომილების რედუქციის მეთოდით მიღებულია ძირითად განტოლებათა სისტემა და

იერარქიული მოდელების N -ურ მიახლოებაში, დასმულია სასაზღვრო ამოცანები. განხილულია წამახვილებული ფირფიტის ღუნვის ამოცანები $N = 2$ მიახლოებაში, დასმულია და გამოკვლეულია შესაბამისი სასაზღვრო ამოცანები.

Summary

In 1955 I. Vekua [5-8] raised the problem of investigation of elastic cusped plates, i.e., such ones whose thickness on the part of the plate boundary or on the whole one vanishes. Investigation of elastic cusped plates, considered as 3D ones, may occupy 3D domains with, in general, non-Lipschitz boundaries. In 1965 he offered analogous models for standard shells [9]. In both papers he considered a very important investigation of well-posedness of BVPs (boundary value problems) of peculiar types which could arise in the case of cusped shells. In practice, such plates and beams are often encountered in spatial structures with partly fixed edges, e.g., stadium ceilings, aircraft wings, submarine wings etc., in machine-tools design, in cutting-machines, planing machines, in astronautics, turbines and in many other application fields of engineering. The problem mathematically leads to equation of setting and solving of boundary value problems for even order equations and systems of elliptic type with the order degeneration in the statical case and of initial boundary value problems for even order equations and systems of hyperbolic type with the order degeneration in the dynamical case. (for corresponding investigations see the survey [10],[11-13] and also I. Vekua's comments in [8] (p.86)).

Prismatic shells and plates are widely used in modern engineering structures and technology. hence it is important to construct and investigate algorithms of approximation of three-dimensional models of them by two-dimensional.

In [9] N. Chinchaladze constructed hierarchical models for elastic cusped symmetric prismatic shells (i.e., plates of variable thickness with cusped edges). Using I. Vekua's dimension reduction method, governing systems are derived and in the N th approximation of hierarchical models BVPs and IBVPs are set [4].

The present work is devoted to construction of A Survey of Results on Cusped plates by bending in the modification $N = 2$ approximation of Hierarchical models of I. Vekua's. Using I. Vekua's dimension reduction method, governing systems are derived and in the N th approximation of hierarchical models BVPs and IBVPs are set. There is considered A Survey of Results on Cusped plates by bending and Bvps are set and investigat.

შესავალი

1955 წელს ილია ვეკუამ [5-8] დასვა დრეკადი წამახვილებული ფირფიტების გამოკვლევის ამოცანა, ე.ი ისეთი ფირფიტები რომლის სისქე საზღვარის ნაწილზე ან მთლიანად ნულის ტოლია. ასეთი სხეულები, თუ განვიხილავთ, როგორც სამგანზომილებიან მოდელს, წარმოადგენენ სამგანზომილებიან არეებს, საზოგადოდ არალიფშიცური საზღვრებით. ხოლო 1965 წელს მან გამოაქვეყნა მოდელები სტანდარტული გარსებისთვის [9] და ორივე ნაშრომში ხაზი გაუსვა წამახვილებული გარსებისთვის სასაზღვრო ამოცანების შესწავლის მნიშვნელობას, რაც დაკავშირებულია გადაგვარებულ კერძოწარმოებულნიან დიფერენციალურ განტოლებებსა და სისტემებთან. პრაქტიკაში, ასეთი ფირფიტები და ღეროები ხშირად გვხვდება სივრცულ კონსტრუქციებში ნაწილობრივ ჩამაგრებული ნაპირებით, როგორცაა სტადიონის სახურავები, თვითმფრინავების ფრთები, წყალქვეშა ნაგებობების ფრთები და ა. შ. გარდა ამისა, მანქანათმშენებლობაში (საჭრელი და სარადნავი ჩარხები), კოსმონავტიკაში, ტურბინებში, და სხვა საინჟინრო სფეროებში (მაგალითად, კაშხლებში). ამ ამოცანებს სტატიკის შემთხვევაში მათემატიკურად მივყავართ რიგის გადაგვარების მქონე ელიფსური ტიპის განტოლებებისა და სისტემებისთვის სასაზღვრო ამოცანების გამოკვლევის საკითხამდე, ხოლო დინამიკის შემთხვევაში ჰიპერბოლური ტიპის განტოლებებისა და სისტემებისთვის საწყის-სასაზღვრო ამოცანების დასმისა და ამოხსნადობის გამოკვლევის საკითხებამდე. (შესაბამის გამოკვლევებთან დაკავშირებით მოცემულია მიმოხილვები [10] და [11-13]-ში, აგრეთვე ილია ვეკუას კომენტარები [8]-ში გვ. 86).

ამავე პერიოდში ილია ვეკუამ შემოგვთავაზა ე.წ პრიზმული გარსების მათემატიკური მოდელი, რომელიც ეფუძნება სისქის ცვლადის მიმართ სამგანზომილებიანი წრფივი დრეკადობის თეორიის გადაადგილებების ვექტორის, ძაბვის და დეფორმაციის ტენზორების ფურიე-ლეჟანდრის ორთოგონალურ მწკრივებად გაშლას. გაშლის პირველი $N + 1$ წევრის შენარჩუნებით, მან შემოიღო ე.წ N -ური მიახლოება და განსაზღვრა შესაბამისი ორგანზომილებიანი მოდელების იერარქია. ყოველი $N = 0, 1, \dots$ მიახლოება შეიძლება განხილულ იქნეს, როგორც პრიზმული გარსების დამოუკიდებელი მოდელი. ი. ვეკუამ შემოგვთავაზა ასევე იერარქიული მოდელის სხვა ვერსია, როდესაც როდესაც ზედაპირზე დაგაადგილების ვექტორი ცნობილია. ყველა მისი შედეგები ფირფიტებისა და გარსების შესახებ გადმოცემულია ი. ვეკუას მონიგრაფიაში [8].

[11-13]-ში ლიფშიცის არეების შემთხვევაში გ. ჯაიანმა, ს. ხარიბეგაშვილმა, დ. ნატროშვილმა, ვ. ვენდლადმა, გ. გორდეზიანმა და მ. ავალიშვილმა ააგეს ორგანზომილებიანი იერარქიული მოდელები დრეკლადი წამახვილებული პრიზმული გარსებისთვის. ვარიაციული მეთოდების გამოყენებით სათანადო წონიან ფუნქციუნალურ სივრცეებში დაამტკიცეს არსებობისა და ერთადერთობის თეორემები შესაბამისი ორგანზომილებიანი საზღვრო ამოცანებისათვის ამ ორგანზომილებიანი სასაზღვრო ამოცანების ამოხსნების საშუალებით ააგეს სამგანზომილებიანი არისთვის მიახლოებითი ამონახსნების მიმდევრობა. ეს მიმდევრობა სობოლევის H^1 სივრცეში კრებადია ამოსავალი სამგანზომილებიანი სასაზღვრო ამოცანის ამონახსნისაკენ.

ზოგიერთი ამოცანა ცვლადი სისქის წამახვილებული ფირფიტებისა და ღეროებისთვის, კერძოდ კლასიკური წამახვილებული დრეკადი ფირფიტების ღუნვის შესახებ გამოკვლეული და განხილული იყო ე. მახოვერის [14], ა. ხვოლესის, ს. მიხლინის, გ.ჯაიანის [10], გ.ცისკარიშვილის, ნ. ხომასურიძის, გ. დევდარიანის, ს. უზუნოვის, ნ. ჩინჩალაძის [3] და ს.ხარიბეგაშვილის ნაშრომებში [11-13]. ამ ავტორების შრომები ძირითადად ეძღვნება ხარისხოვანი კანონით ცვლადი სისქის მქონე ფირფიტების და ღეროების შესწავლას ბერნულ-ეილერის ღეროების, კირხოფის ფირფიტების და ი. ვეკუას იერარქიული მოდელების ნულოვანი და პირველი მიახლოების ბაზაზე.

დრეკადი წამახვილებული ფირფიტების ღუნვის ამოცანების ი. ვეკუას იერარქიული მოდელების $N = 1$ მიახლოება შეესაბამება კლასიკური ღუნვის კირხოფ-ლაივის მოდელს, ის არ მოიცავს, როგორც კერძო შემთხვევას რაოდენობრივად, მაგრამ მოიცავს თვისობრივად (იხ. გ. ჯაიანის, ნ. ჩინჩალაძე [1]). აღსანიშნავია, რომ კლასიკური მოდელის ფარგლებში წამახვილებული ფირფიტებისთვის (პრიზმული გარსებისთვის) კორექტულად დასმის არაკლასიკური ამოცანები შესწავლილია [1-3]-ში. რაც შეეხება ი. ვეკუას მოდიფიცირებულ მოდელს (იხ. ი. ვეკუა [8]) ის, როგორც კერძო შემთხვევას შეიცავს კირხოფ-ლაივის ფირფიტების ღუნვის კლასიკურ მოდელს.

პრიზმული გარსების ი. ვეკუას მოდელზე დაყრდნობით $N = 0$ მიახლოებაში. გ. ჯაიანმა გამოიკვლია წამახვილებული ფორფიტების გაჭიმვა-შეკუმშვის ამოცანა და ჩამოაყალიბა სასაზღვრო პირობები კორექტურად.

პრიზმული გარსები, ფირფიტები ფართოდ გამოიყენება სხვადასხვა საინჟინრო სტრუქტურებსა და თანამედროვე ტექნოლოგიებში. აქედან გამომდინარე მნიშვნელოვანია ავადგომის და გამოვიკვლიოთ ფირფიტების სამგანზომილებიანი მოდელების მიახლოებითი ალგორითმები. თეორმოდრეკადი

პიეზოლექტრული მასალების, მათ შორის ცვლადი სისქის ფირფიტების იერარქიული მოედლების აგებას და შესაბამისი სასაზღვრო და საწყის-სასაზღვრო ამოცანების დასმასა და გამოკვლევას ეძღვნება გ. და მ. ავალიშვილების შრომები [15].

ნაშრომში გამოკვლეულია წამახვილებული ფირფიტის ღუნვის ამოცანები ი. ვეკუას იერარქიული მოდელების მოდიფიცირებულ $N = 2$ მიახლოებაში. სახელდობრ ილია ვეკუას განზომილების რედუქციის მეთოდით მიღებულია ძირითად განტოლებათა სისტემა და იერარქიული მოდელების მოდიფიცირებულ $N = 2$ მიახლოებაში დასმულია სასაზღვრო ამოცანები. შესწავლილია სასაზღვრო პირობების დასმის თავისებურებები, დასმულია სასაზღვრო ამოცანები და ამოხსნილია ცხადი სახით.

დრეკადი წამახვილებული სიმეტრიული პრიზმული გარსებისთვის (ცვლადი სისქის მქონე ფირფიტებისთვის წამახვილებული ბოლოთი) იერარქიული მოდელები აგებულია ნ. ჩინჩალაძის მიერ. ილია ვეკუას განზომილების რედუქციის მეთოდით მიღებულია ძირითად განტოლებათა სისტემა და იერარქიული მოდელების N -ურ მიახლოებაში დასმულია სასაზღვრო და საწყის-სასაზღვრო ამოცანები [9].

ნაშრომი შედგება შესავლის, ოთხი თავისა და მითითებული ლიტერატურისაგან.

პირველ თავში მოყვანილია ძირითადი განტოლებები ცვლადი სისქის ფირფიტებისთვის ღუნვის და გაჭიმვა-კუმშვის დროს და დასმულია შესაბამისი სასაზღვრო ამოცანები.

მეორე თავში ილია ვეკუას განზომილების რედუქციის მეთოდით მიღებულია ძირითად განტოლებათა სისტემა, აგებულია იერარქიული მოდელების უსასრულო და N – ური მიახლოება.

მესამე თავში მიღებულია ძირითად განტოლებათა სისტემა იერარქიული მოდელების $N = 2$ მიახლოებაში. განხილულია ცილინდრული ღუნვის შემთხვევა, როდესაც ყველა ფუნქცია (ძაბვები, დეფორმაციები, გადაადგილებები) დამოკიდებულია მხოლოდ x_2 ცვლადზე.

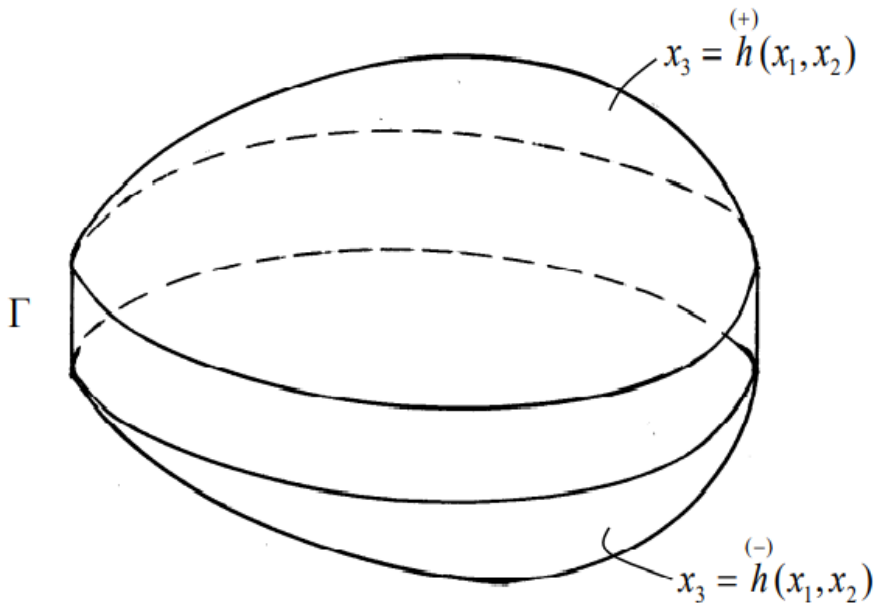
მეოთხე თავში დასმულია და გამოკვლეულია ი. ვეკუას მოდიფიცირებულ $N = 2$ მოდელის ფარგლებში წამახვილებული ფირფიტებისთვის (ზოგადად დრეკადი პრიზმული გარსებისათვის) შესაბამისი სასაზღვრო ამოცანები და ამოხსნილია ცხადი სახით.

1. ძირითადი განტოლებები ფირფიტებისთვის ლუნვის და გაჭიმვა-კუმშვის დროს

ვთქვათ, $Ox_1x_2x_3$ არის დეკარტის მართკუთხა კოორდინატთა სისტემა და x_3 ღერძი მიმართულია ვერტიკალურად ზემოთ. დრეკადი სხეულს, რომელიც ზემოდან და ქვემოდან შემოსაზღვრულია ზედაპირებით

$$x_3 = h^{(+)}(x_1, x_2) \text{ და } x_3 = h^{(-)}(x_1, x_2)$$

ხოლო გვერდიდან Γ ცილინდრული ზედაპირით, რომლის მსახველი ვერტიკალური Ox_3 ღერძის პარალელურია, ეწოდება პრიზმური გარსი



სიმეტრიულ შემთხვევაში ე.ი როცა

$$h^{(+)}(x_1, x_2) = -h^{(-)}(x_1, x_2)$$

პრიზმული გარსი წარმოადგენს ცვლადი სისქის ფირფიტას.

პრიზმული გარსის გეგმილი $Ox_1 x_2$ სიბრტყეზე აღვნიშნოთ ω -თი, მის საზღვარს გარსის საზღვარი ეწოდება.

განვიხილოთ პრიზმული გარსი, რომელსაც უკავია Ω არე¹, რომლის პროექცია $x_3 = 0$

სიბრტყეზე არის ω [ნახაზი 1,2,3]

$$\Omega := \left\{ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : (x_1, x_2) \in \omega, \overset{(+)}{h}(x_1, x_2) < x_3 < \overset{(-)}{h}(x_1, x_2) \right\}$$

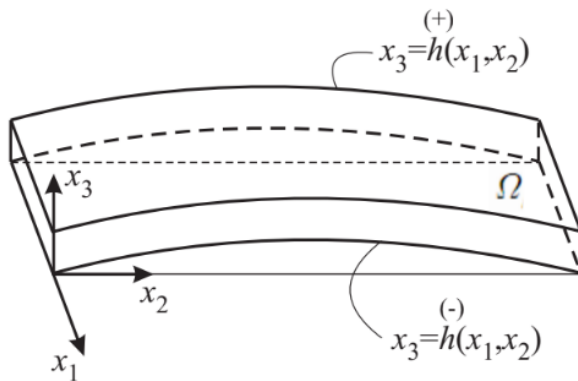
დავუშვათ

$$\overset{(\pm)}{h}(x_1, x_2) \in C^2(\omega) \cap C(\bar{\omega}).$$

სიდიდეს

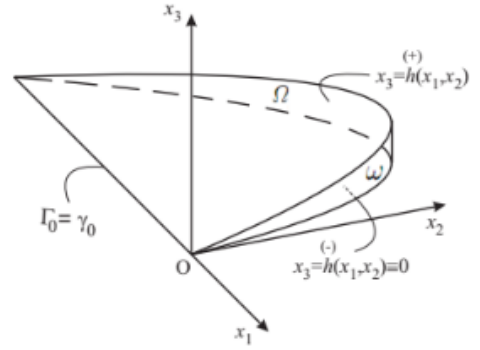
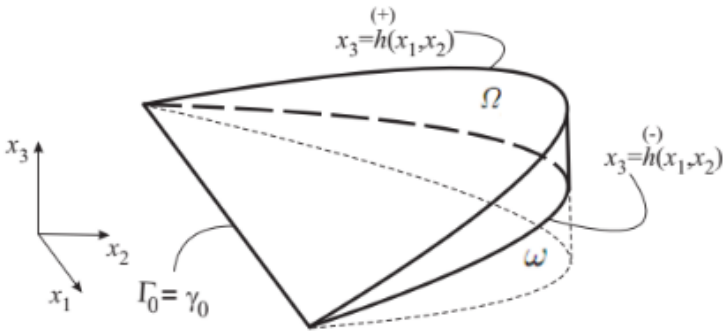
$$2h(x_1, x_2) := \overset{(+)}{h}(x_1, x_2) - \overset{(-)}{h}(x_1, x_2) \begin{cases} > 0 & (x_1, x_2) \in \omega - \text{სთვის,} \\ \geq 0 & (x_1, x_2) \in \partial\omega - \text{სთვის} \end{cases}$$

პრიზმული გარსის სისქე ეწოდება.

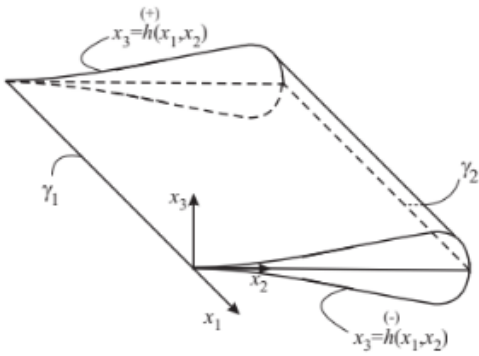


ნახაზი 1. მუდმივი სისქის პრიზმული გარსი

¹ ღია ბმული სიმრავლე



ნახაზი 2. ცალი ნაპირით წამახვილებული პრიზმული გარსი



ნახაზი 3. ორივე ნაპირით წამახვილებული ფირფიტა

პრიზმული გარსის სისქე

$$2h := h^{(+)}(x_1, x_2) - h^{(-)}(x_1, x_2) > 0, \quad (x_1, x_2) \in \omega,$$

m -ს ის ნაწილი, სადაც სისქე ქრება ე.ი $2h = 0$ ეწოდება წამახვილებული ნაპირი. თუ m -ს წამახვილებულ ნაწილს შეიცავს გლუვად ეწოდება ბლავგი წამახვილებული ნაწილი.

დავუშვათ

$$2\tilde{h} := h^{(+)}(x_1, x_2) + h^{(-)}(x_1, x_2) > 0, \quad (x_1, x_2) \in \omega,$$

სიმეტრიული პრიზმული გარსის შემთხვევაში ე.ი როცა

$$h^{(-)}(x_1, x_2) = -h^{(+)}(x_1, x_2)$$

გვაქვს

$$2h(x_1; x_2) = 0.$$

დავუშვათ ω არის საკმარისად გლუვი რკალით შემოსაზღვრული არე, მდებარე $x_2 > 0$ ნახევარ სიბრტყეში, ვთქვათ სისქე

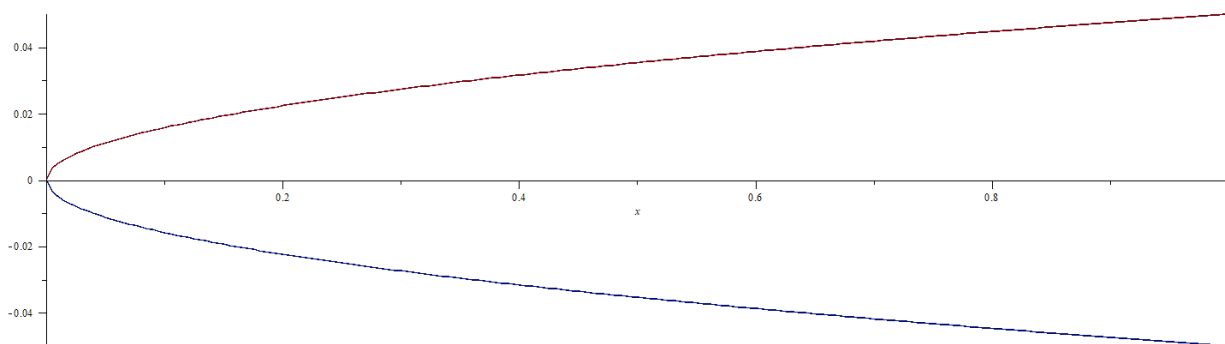
$$2h(x_1, x_2) = h_0 x_2^k, \quad h_0, k = \text{const} > 0, \quad (1.1)$$

საიდანაც გვაქვს

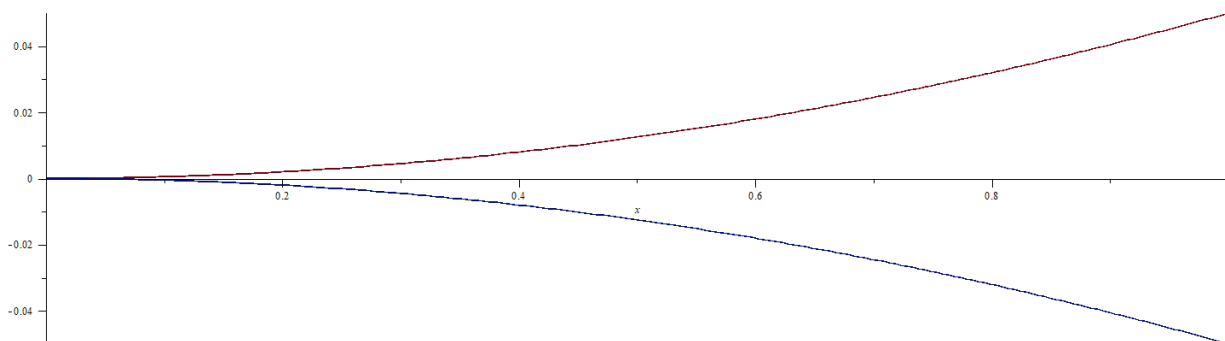
$$h^{(\pm)}(x_1, x_2) = h_0 x_2^k, \quad h_0 = \text{const}, \quad h_0^{(+)} > h_0^{(-)}, \quad 2h_0 := h_0^{(+)} - h_0^{(-)}.$$

როცა $k < 1$ ამ შემთხვევაში ვამბობთ რომ გვაქვს ბლავგი წამახვილება, ხოლო როცა $k \geq 1$ ამ შემთხვევაში ვამბობთ რომ გვაქვს მახვილი წამახვილება.

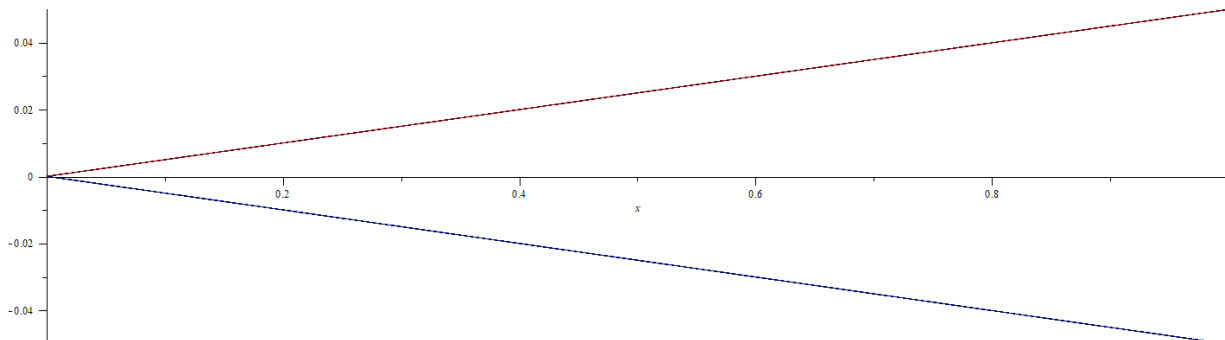
(1.1)-ის შემთხვევაში Ox_2x_3 სიბრტყეში ფირფიტის პროფილს ექნება ნახაზ 4-ზე მოცემული სახეებიდან ერთ-ერთი



$k < 1$



$k = 1$



$k > 1$

ნახაზი 4. ფირფიტების პროფილები

სიმეტრიული $(h^{(+)}(x_1, x_2) = -h^{(-)}(x_1, x_2) \geq 0)$ პრიზმული გარსის მექონე სამგანზომილებიანი სხეულის გადაადგილებები $u_i(x_1, x_2, x_3)$, $i = 1, 2, 3$ შეიძლება დავშალოთ ორ-ორ შესაკრებად $u_i(x_1, x_2, x_3, t) = \frac{1}{2} [u_i^a(x_1, x_2, x_3, t) - u_i^b(x_1, x_2 - x_3, t) + u_i^c(x_1, x_2 - x_3, t) + u_i^d(x_1, x_2, x_3, t)] = u_i^e(x_1, x_2, x_3, t) + u_i^f(x_1, x_2, x_3, t)$, $i = 1, 2, 3$.

სადაც ზედა ინდექსი c და b აღნიშნავს, შესაბამისად, გაჭიმვა-კუმშვას და ღუნვას.

რომელთაგან

$$u_\alpha^c(x_1, x_2, x_3, t) := \frac{1}{2} [u_\alpha(x_1, x_2, x_3, t) + u_\alpha(x_1, x_2 - x_3, t)] \quad \alpha = 1, 2$$

$$(x_1, x_2, x_3) \in \Omega$$

რომელიც x_3 -ის მიმართ ლუწი ფუნქციაა

და

$$u_3^c(x_1, x_2, x_3, t) := \frac{1}{2} [u_3(x_1, x_2, x_3, t) - u_3(x_1, x_2 - x_3, t)] \quad (x_1, x_2, x_3) \in \Omega$$

რომელიც x_3 -ის მიმართ კენტი ფუნქციაა, შეესაბამება გაჭივან-კუმშვას (მართლაც, შუა სიბრტყე იჭიმება ან იკუმშება, რადგან

$$u_\alpha^c(x_1, x_2, 0, t) = u_\alpha(x_1, x_2, 0, t) \neq 0, (x_1, x_2) \in \Omega),$$

ხოლო

$$u_\alpha^b(x_1, x_2, x_3, t) := \frac{1}{2} [u_\alpha(x_1, x_2, x_3, t) - u_\alpha(x_1, x_2 - x_3, t)] \quad \alpha = 1, 2$$

რომელიც x_3 -ის მიმართ კენტი ფუნქციაა და

$$u_3^b(x_1, x_2, x_3, t) := \frac{1}{2} [u_3(x_1, x_2, x_3, t) + u_3(x_1, x_2 - x_3, t)]$$

$$(x_1, x_2, x_3) \in \Omega$$

რომელიც x_3 -ის მიმართ ლუწი ფუნქციაა, შეესაბამება, ღუნვას (მართლაც, შუა სიბრტყე არც იჭიმება და არც იკუმშება, რადგან

$$u_\alpha^b(x_1, x_2, 0, t) \equiv 0, (x_1, x_2) \in \Omega),$$

მაგრამ იღუნება, რადგან

$$u_3^b(x_1, x_2, 0, t) = u_3(x_1, x_2, 0, t) \neq 0, (x_1, x_2) \in \Omega).$$

ილია ვეკუას იერარქიული მოდელების N -ურ მიახლოებაში (იხ.[5-8])

$$u_i(x_1, x_2, x_3, t) = \sum_{r=0}^N a \left(r + \frac{1}{2} \right) u_{ir}(x_1, x_2) P_r \left(\frac{x_3}{h} \right), \quad i = 1, 2, 3, \quad a := \frac{1}{h}. \quad (1.2)$$

იმის გათვალისწინებით, რომ x_3 -ის მიმართ P_r კენტი ფუნქციაა კენტი r -სათვის და ლუწია ლუწი $r \geq 0$ -სათვის, ვასკვნით, რომ

$$u_{\alpha r}, \alpha = 1, 2, r \in \{0, 1, \dots, N\} \text{ ლუწია; } u_{3r}, r \in \{0, 1, \dots, N\} \text{ კენტია} \quad (1.3)$$

შეესაბამება გაჭიმვა-კუმშვას. მართლაც,

$$u_{\alpha}^c(x_1, x_2, x_3, t) = \sum_{\substack{r=0 \\ (r \text{ ლუწია})}}^N a\left(r + \frac{1}{2}\right) u_{\alpha r}(x_1, x_2) P_r\left(\frac{x_3}{h}\right), \quad \alpha = 1, 2,$$

ლუწია x_3 -ის მიმართ,

$$u_3^c(x_1, x_2, x_3, t) = \sum_{\substack{r=0 \\ (r \text{ კენტია})}}^N a\left(r + \frac{1}{2}\right) u_{3r}(x_1, x_2) P_r\left(\frac{x_3}{h}\right),$$

კი კენტია. ხოლო

$$u_{\alpha r}, \alpha = 1, 2, r \in \{0, 1, \dots, N\} \text{ კენტია; } u_{3r}, r \in \{0, 1, \dots, N\} \text{ ლუწია} \quad (1.4)$$

შეესაბამება ლუნვას. მართლაც,

$$u_{\alpha}^b(x_1, x_2, x_3, t) = \sum_{\substack{r=0 \\ (r \text{ კენტია})}}^N a\left(r + \frac{1}{2}\right) u_{\alpha r}(x_1, x_2, t) P_r\left(\frac{x_3}{h}\right), \quad \alpha = 1, 2,$$

კენტია x_3 -ის მიმართ,

$$u_3^b(x_1, x_2, x_3, t) = \sum_{\substack{r=0 \\ (r \text{ ლუწია})}}^N a\left(r + \frac{1}{2}\right) u_{3r}(x_1, x_2, t) P_r\left(\frac{x_3}{h}\right),$$

კი ლუწია.

2. იერარქიული მოდელები, N -ური მიახლოება

ილია ვეკუს იერარქიული მოდელების განტოლებათა სისტემა (იხ.[5-8]) შეიძლება გადავწეროთ დივერგენტული ფორმით, ცხადი სახით ამოწერილი კოეფიციენტებით. N -ურ მიახლოებაში მას შემდეგი სახე აქვს:

$$\begin{aligned} & \mu \left[\left(h^{2r+1} v_{ar,j}^N \right)_{,\alpha} \right] + \lambda \delta_{\alpha j} \left(h^{2r+1} v_{\gamma r,\gamma}^N \right)_{,\alpha} + \sum_{s=r+1}^N \left(B_{ajks}^r h^{r+s+1} v_{ks}^N \right)_{,\alpha} + \sum_{l=0}^{r-1} a_{il}^r \left[\lambda \delta_{ij} h^{r+l+1} v_{\gamma l,\gamma}^N + \right. \\ & \left. \mu h^{r+l+1} \left(v_{il,j}^N + v_{jl,i}^N \right) + \sum_{s=l+1}^N B_{ijks}^l h^{r+s+1} v_{kl}^N \right] + h^r X_j = \rho h^r \frac{\partial^2 h^{r+1} v_{jr}^N}{\partial t^2}, \quad j = 1, 2, 3, \quad r = \overline{0, N}, \\ & \sum_q^p (\dots) \equiv 0 \quad p < q - \text{სთვის}, \end{aligned} \quad (2.1)$$

სადაც λ და μ ლამეს კოეფიციენტებია, ρ დრეკადი სხეულის სიმკვრივე, $v_{ir}^N := \frac{u_{ir}}{h^{r+1}}$

$$\begin{aligned} X_j^r &= X_{3j}^{(+)} - X_{\alpha j}^{(+)} h_{,\alpha}^{(+)} + (-1)^r \left[-X_{3j}^{(-)} + X_{\alpha j}^{(-)} h_{,\alpha}^{(-)} \right] + \phi_{jr} = Q_{n_j}^{(+)} \sqrt{1 + \left(h_{,1}^{(+)} \right)^2 + \left(h_{,2}^{(+)} \right)^2} + \\ & (-1)^r Q_{n_j}^{(-)} \sqrt{1 + \left(h_{,1}^{(-)} \right)^2 + \left(h_{,2}^{(-)} \right)^2} + \phi_{jr}, \quad j = 1, 2, 3, \quad r = 0, 1, 2, \dots; \end{aligned} \quad (2.2)$$

$Q_{n_j}^{(+)}$ და $Q_{n_j}^{(-)}$ მავის ვექტორის კომპონენტებია, ზედა და ქვედა ზედაპირებზე შესაბამისად n და

n ნორმალებით. N ნიშნაკი აღნიშნავს N -ურ მიახლოებას. v_{ij}^N ეწოდება წონიანი მომენტი N -ურ მიახლოებაში. შევნიშნოთ, რომ იერარქიული მოდელების განტოლებათა სისტემის შესაბამის 3D მოდელს იგივე (2.1) სახე აქვს, მხოლოდ ჯამებში N უსასრულოდ უნდა შევცვალოთ და უცნობ სიდიდეებს N ნიშნაკი მოვაშოროთ; ე.ი. თუ $N = +\infty$ მივიღებთ უსასრულო სისტემას v_{ir} -ების მიმართ, ან, რაც იგივეა, u_{ir} -ების მიმართ.

$$v_{ir}^N = \frac{u_{ir}}{h^{r+1}}, \quad i = 1, 2, 3, \quad r = 0, 1, \dots,$$

სადაც

$$u_{ir}(x_1, x_2) := \int_{h(x_1, x_2)^{(-)}}^{h(x_1, x_2)^{(+)}} u_i(x_1, x_2, x_3) P_r(ax_3 - b) dx_3, \quad b := \frac{h^{(+)} + h^{(-)}}{h^{(+)} - h^{(-)}}$$

რომელიც 3D მოდელის ექვივალენტურია.

$$P_n(\tau) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n(\tau^2 - 1)}{d\tau^n}, \quad n = 0, 1, \dots$$

პოლინომებს, კერძოდ

$$P_0(\tau) = 1, \quad P_1(\tau) = \tau, \quad P_2(\tau) = \frac{3\tau^2 - 1}{2}$$

ლეჟანდრის პოლინომები ეწოდება. ლეჟანდრის პოლინომთა სისტემა ორთოგონალურია $[-1;1]$ სეგმენტზე.

$\left(r + \frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}} h^{-\frac{1}{2}} P_r\left(\frac{x_3}{h}\right)$, $r = 0, 1, 2, \dots$ სისტემა ორთონორმალურია, ხოლო $\left(r + \frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}} h^{-\frac{1}{2}} u_{ir}(x_1, x_2)$ ფურიე-ლეჟანდრის კოეფიციენტებია, თუ თითოეული $u_i(x_1, x_2, x_3)$, $i = 1, 2, 3$, x_3 ცვლადის მიმართ N -ური რიგის პოლინომებია ან $N = +\infty$ ე.ი. ვლებულობთ უსასრულო სისტემას u_{ir} -ის მიმართ.

ფირფიტებისთვის

$$\begin{matrix} (+) & & (-) \\ h(x_1, x_2) + & h(x_1, x_2) \equiv 0, & (x_1, x_2) \in \omega. \end{matrix} \quad (2.3)$$

b_{js}^r და a_{js}^r გამოისახებიან შემდეგი სახით (იხ. გ. ჯაიანი [10])

$$b_{ks}^r = \begin{cases} 0, & \text{თუ } s < r, \text{ ან } k = \alpha, r + s \text{ კენტია, } s > r; \\ \text{ან } k = 3, r + s \text{ ლუწია, } s > r; \text{ ან } k = 3, r = s; \\ -(2s + 1)h_{,\alpha}h^{-1}, & \text{თუ } k = \alpha, r + s \text{ ლუწია, } s > r; \\ (2s + 1)h^{-1}, & \text{თუ } k = 3, r + s \text{ კენტია, } s > r; \\ -(r + 1)h_{,\alpha}h^{-1}, & \text{თუ } k = \alpha, r = s; \end{cases} \quad (2.4)$$

$$a_{is}^r = \begin{cases} 0, & \text{თუ } i = \alpha, r + s \text{ კენტია, } s \neq r; \text{ ან } i = 3, r + s \text{ ლუწია;} \\ (2s + 1)h_{,\alpha}h^{-1}, & \text{თუ } i = \alpha, r + s \text{ ლუწია, } s \neq r; \\ -(2s + 1)h^{-1}, & \text{თუ } i = 3, r + s \text{ კენტია;} \\ rh_{,\alpha}h^{-1}, & \text{თუ } i = \alpha, r = s; \end{cases} \quad (2.5)$$

$$B_{\alpha\beta\gamma s}^r = \lambda\delta_{\alpha\beta}b_{\gamma s}^r + \mu\delta_{\gamma\beta}b_{\alpha s}^r + \mu\delta_{\alpha\gamma}b_{\beta s}^r$$

$$= \begin{cases} 0, \text{თუ } s < r, \text{ ან } r + s \text{ კენტიია, } s > r; \\ -(r+1)h^{-1}[\lambda\delta_{\alpha\beta}h_{,\gamma} + \mu\delta_{\gamma\beta}h_{,\alpha} + \mu\delta_{\alpha\gamma}h_{,\beta}], \text{თუ } r = s; \\ -(2s+1)h^{-1}[\lambda\delta_{\alpha\beta}h_{,\gamma} + \mu\delta_{\gamma\beta}h_{,\alpha} + \mu\delta_{\alpha\gamma}h_{,\beta}], \text{თუ } r + s \text{ ლუწია, } s > r; \end{cases} \quad (2.6)$$

$${}^r B_{\alpha\beta 3s} = \lambda\delta_{\alpha\beta} {}^r b_{3s} = \begin{cases} 0, \text{თუ } s < r, \text{ ან } r + s \text{ ლუწია, } s \geq r; \\ \lambda(2s+1)h^{-1}\delta_{\alpha\beta}, \text{თუ } r + s \text{ კენტიია, } s > r; \end{cases} \quad (2.7)$$

$${}^r B_{\alpha 3\gamma s} = \mu\delta_{\alpha\gamma} {}^r b_{3s} = \begin{cases} 0, \text{თუ } s < r, \text{ ან } r + s \text{ ლუწია, } s \geq r; \\ \mu(2s+1)h^{-1}\delta_{\alpha\gamma}, \text{თუ } r + s \text{ კენტიია, } s > r; \end{cases} \quad (2.8)$$

$${}^r B_{\alpha 33s} = \mu b_{\alpha s} = \begin{cases} 0, \text{თუ } s < r, \text{ ან } r + s \text{ კენტიია, } s > r; \\ -(r+1)\mu h^{-1}h_{,\alpha}, \text{თუ } r = s; \\ -(2s+1)\mu h^{-1}h_{,\alpha}, \text{თუ } r + s \text{ ლუწია, } s > r; \end{cases} \quad (2.9)$$

$${}^r B_{3\beta\gamma s} = \mu\delta_{\gamma\beta} {}^r b_{3s} = \begin{cases} 0, \text{თუ } s < r, \text{ ან } r + s \text{ ლუწია, } s \geq r; \\ (2s+1)\mu h^{-1}\delta_{\gamma\beta}, \text{თუ } r + s \text{ კენტიია, } s > r \end{cases} \quad (2.10)$$

$${}^r B_{3\beta 3s} = \mu b_{\beta s} = \begin{cases} 0, \text{თუ } s < r, \text{ ან } r + s \text{ კენტიია, } s > r; \\ -(r+1)\mu h^{-1}h_{,\beta}, \text{თუ } r = s; \\ -(2s+1)\mu h^{-1}h_{,\beta}, \text{თუ } r + s \text{ ლუწია, } s > r; \end{cases} \quad (2.11)$$

$${}^r B_{33\gamma s} = \lambda b_{\gamma s} = \begin{cases} 0, \text{თუ } s < r, \text{ ან } r + s \text{ კენტიია, } s > r; \\ -(r+1)\mu h^{-1}h_{,\gamma}, \text{თუ } r = s; \\ -(2s+1)\mu h^{-1}h_{,\gamma}, \text{თუ } r + s \text{ ლუწია, } s > r; \end{cases} \quad (2.12)$$

$$\begin{aligned} {}^r B_{333s} &= \lambda b_{3s} + \mu b_{3s} + \mu b_{3s} = (\lambda + 2\mu) {}^r b_{3s} \\ &= \begin{cases} 0, \text{თუ } s < r, \text{ ან } r + s \text{ კენტიია, } s \geq r; \\ (2s+1)(\lambda + 2\mu)h^{-1}, \text{თუ } r + s \text{ ლუწია, } s > r. \end{cases} \end{aligned} \quad (2.13)$$

N -ურ მიახლოებაში, იზოტროპული სხეულის შემთხვევაში, ძაბვისა და დეფორმაციის ტენზორის კომპონენტები ერთმანეთთან დაკავშირებულია შემდეგი გამოსახულებებით

$$X_{ijr}^N = \lambda \theta_r \delta_{ij} + 2\mu e_{ijr}^N, \quad r = 0, 1, \dots, N$$

სადაც

$$e_{ijr}^N = \frac{1}{2} h^{r+1} (v_{ir,j} + v_{jr,i}) + \frac{1}{2} \sum_{s=r+1}^N h^{s+1} (b_{is}^r v_{js} + b_{js}^r v_{is}),$$

$$\theta_r = e_{iir}^N = h^{r+1} v_{\gamma 0, \gamma} + \sum_{s=r+1}^N h^{s+1} b_{is}^r v_{is}, \quad r = 0, 1, \dots, N$$

ცხადია,

$$X_{nir}^N = X_{jir}^N n_j, \quad r = 0, 1, \dots, N$$

კერძოდ, $N = 1$ მიახლოებაში

$$e_{\alpha\beta 0}^1 = \frac{1}{2} h (v_{\alpha 0, \beta} + v_{\beta 0, \alpha}) - h (h_{, \alpha} v_{\beta 1} + h_{, \beta} v_{\alpha 1})$$

$$e_{\alpha\beta 1}^1 = \frac{1}{2} h (v_{\alpha 1, \beta} + v_{\beta 1, \alpha})$$

$$e_{33r}^r \equiv 0, \quad r = 0, 1, \quad e_{\alpha 30}^1 = \frac{1}{2} h v_{30, \alpha}, \quad e_{\alpha 31}^1 = \frac{1}{2} h^2 v_{31, \alpha}$$

რადგან

$$b_{ar}^r = -(r+1) \frac{h_{, \alpha}}{h}$$

$$X_{n\alpha 0}^1 = X_{\beta\alpha 0}^1 n_\beta = \mu h (v_{\alpha 0, \beta} + v_{\beta 0, \alpha}) n_\beta - \mu h (h_{, \alpha} v_{\beta 1} + h_{, \beta} v_{\alpha 1}) n_\beta$$

$$X_{n\alpha 1}^1 = X_{\beta\alpha 1}^1 n_\beta = \mu h^2 (v_{\alpha 1, \beta} + v_{\beta 1, \alpha}) n_\beta$$

$$X_{n30}^1 = X_{\beta 30}^1 n_\beta = \mu h v_{30, \beta} n_\beta, \quad X_{n31}^1 = X_{\beta 31}^1 n_\beta = \mu h^2 v_{31, \beta} n_\beta.$$

ვთქვათ $N = 1$, მაშინ $r = 0$ -ისთვის (2.1) განტოლება გადაიწერება შემდეგნაირად

$$\mu \left[(h^1 v_{\alpha 0, \beta})_{, \alpha} + (h^1 v_{\beta 0, \alpha})_{, \alpha} \right] + \lambda (h^1 v_{\gamma 0, \gamma})_{, \beta} + 3\lambda (h^1 v_{31})_{, \beta} + X_\beta^0 = \rho \frac{\partial^2 h^1 v_{\beta 0}}{\partial t^2}, \quad \beta = 1, 2, \quad (2.14)$$

და

$$\mu \left(h^1 v_{30, \alpha} \right)_{, \alpha} + 3\mu \left(h^1 v_{\alpha 1} \right)_{, \alpha} + X_3^0 = \rho \frac{\partial^2 h^1 v_{30}}{\partial t^2} \quad (2.15)$$

ხოლო $r = 1$ -ისთვის (2.1) განტოლება გადაიწერება შემდეგნაირად

$$\mu \left[\left(h^3 v_{\alpha 1, \beta} \right)_{, \alpha} + \left(h^3 v_{\beta 1, \alpha} \right)_{, \alpha} \right] + \lambda \left(h^3 v_{\gamma 1, \gamma} \right)_{, \beta} - \left(\mu h^1 v_{30, \beta} + 3\mu h^1 v_{\beta 1} \right) + h X_\beta^1 = \rho h \frac{\partial^2 h^2 v_{\beta 1}}{\partial t^2}, \quad \beta = 1, 2, \quad (2.16)$$

და

$$\mu \left(h^3 v_{31, \alpha} \right)_{, \alpha} - \lambda h^1 v_{\gamma 0, \gamma} - 3(\lambda + 2\mu) h^1 v_{31} + h X_3^1 = \rho h \frac{\partial^2 h^1 v_{31}}{\partial t^2} \quad (2.17)$$

(2.15) და (2.16) არის ლუნვის სისტემა და (2.14) და (2.17) გაჭიმვა-კუმშვის სისტემა.

ახლა ვთქვათ ფირფიტის სისქე მუდმივი რიცხვია

$$\overset{(+)}{h}(x_1, x_2) - \overset{(-)}{h}(x_1, x_2) = h(x_1, x_2) = \text{const},$$

მაშინ (2.15), (2.16) ლუნვის სისტემა სტატიკის შემთხვევაში მიიღებს შემდეგ სახეს

$$\mu \Delta^1 v_{30} + 3\mu \left(v_{11,1}^1 + v_{21,2}^1 \right) + h^{-1} X_3^0 = 0 \quad (2.18)$$

$$\mu \Delta^1 v_{11} + (\lambda + \mu) \left(v_{11,1}^1 + v_{21,2}^1 \right)_{,1} - \mu h^{-2} v_{30,1}^1 - 3\mu h^{-2} v_{11}^1 + h^{-2} X_1^1 = 0 \quad (2.19)$$

$$\mu \Delta^1 v_{21} + (\lambda + \mu) \left(v_{11,1}^1 + v_{21,2}^1 \right)_{,2} - \mu h^{-2} v_{30,2}^1 - 3\mu h^{-2} v_{21}^1 + h^{-2} X_2^1 = 0 \quad (2.20)$$

ბოლო ორი განტოლების x_1 და x_2 -ის მიმართ ინტეგრებით და შეკრებით მივიღებთ

$$(\lambda + 2\mu) \Delta \left(v_{11,1}^1 + v_{21,2}^1 \right) - \mu h^{-2} v_{30}^1 - 3\mu h^{-2} \left(v_{11,1}^1 + v_{21,2}^1 \right) + h^{-2} \left(X_{1,1}^1 + X_{2,2}^1 \right) = 0 \quad (2.21)$$

(2.18)-დან განვსაზღვროთ

$$v_{11,1}^1 + v_{21,2}^1 = -\frac{1}{3} \Delta v_{30}^1 - \frac{1}{3\mu} h^{-1} X_3^0 \quad (2.22)$$

და ჩავსვათ (2.19)-ში, სადაც ჩავთვლით, რომ $\phi_j \equiv 0$, $j = 1, 2, 3$; $Q_{n\alpha}^{(\pm)} \equiv 0$, $\alpha = 1, 2$;

$$X_\alpha^1 = 0, \alpha = 1, 2, X_3^0 = Q_{n_3}^{(+)} + Q_{n_3}^{(-)} = q^{(+)} + q^{(-)} = q.$$

მაშინ

$$-\frac{\lambda+2\mu}{3} \Delta \Delta v_{30}^1 - \frac{\lambda+2\mu}{3\mu} h^{-1} q + h^{-3} q = 0.$$

აქედან გამომდინარე, თუ q დატვირთვა ჰარმონიულია, ე.ი. $\Delta q = 0$, მივიღებთ

$$\Delta \Delta u_3 = \frac{q}{D'}$$

სადაც

$$u_3 := \frac{1}{2} v_{30}$$

ჩაღუნვაა, ხოლო

$$D' = \frac{2}{3} (\lambda + 2\mu) h^3 = \frac{(1-\sigma)^2}{1-2\sigma} D.$$

ამრიგად, მუდმივი სისქის ფირფიტის შემთხვევაში $N = 1$ მიახლოებაში ღუნვის განტოლება და მისი შესაბამისი მათემატიკური მოდელი თვისობრივად არ განსხვავდება ს. ჟერმენ-ლაგრანჟის განტოლებისა და შესაბამისად ღუნვის კლასიკური თეორიისაგან. მათ შორის განსხვავება მხოლოდ რაოდენობრივია, ამასთან, გარკვეული აზრით, ეს სხვაობა მცირეა.

ზემოთ მიღებული შედეგების გათვალისწინებით, გაჭიმვა-კუმშვის და ღუნვის სისტემას, შემდეგი კონკრეტული შემთხვევისთვის

$$2h(x_1, x_2) = h_0 x_2^k, \quad h_0, k = \text{const} < 0,$$

მივყავართ შემდეგ დასკვნამდე.

1. $N = 1$ მიახლოებაში გაჭიმვა-კუმშვით

$$u_\alpha^c(x_1, x_2, x_3, t) = \frac{1}{2} v_{\alpha 0}, \quad \alpha = 1, 2$$

$$u_3^c(x_1, x_2, x_3, t) = \frac{3}{2} v_{30}(x_1, x_2, t) x_3$$

და ვთქვათ $q \equiv 0$ სასაზღვრო ამოცანა, შემდეგი სასაზღვრო პირობით კორექტულადაა დასმული γ -ზე

$$u = g$$

ან γ_0 -ზე

$${}^1v_{\alpha 0} = v_{\alpha}^0 \text{ მაშინ და მხოლოდ მაშინ როცა } I_0(x_2) := \int_0^{x_2} \frac{dt}{h(t)} < +\infty \quad (k < 1)$$

$${}^1v_{31} = v_3^1 \text{ მაშინ და მხოლოდ მაშინ როცა } I_1(x_2) := \int_0^{x_2} \frac{dt}{h^3(t)} < +\infty \quad (k < 1/3)$$

ან

$${}^1X_{n\alpha 0} = \psi_{\alpha} \neq 0 \quad \alpha = 1, 2$$

$${}^1X_{n30} \equiv 0,$$

$${}^1X_{n\alpha 1} \equiv 0 \quad \alpha = 1, 2.$$

2. $N = 1$ მიახლოებაში ღუნვით

$$u_{\alpha}^b(x_1, x_2, x_3, t) = \frac{1}{2} {}^1v_{\alpha 1} x_3, \quad \alpha = 1, 2$$

$$u_3^b(x_1, x_2, x_3, t) = \frac{1}{2} {}^1v_{30}(x_1, x_2, t)$$

და სასაზღვრო ამოცანა, შემდეგი სასაზღვრო პირობით კორექტულადაა დასმული γ -ზე

$$u = g$$

ან γ_0 -ზე

$${}^1v_{\alpha 1} = v_{\alpha}^1 \text{ მაშინ და მხოლოდ მაშინ როცა } I_1(x_2) < \infty \quad (k < 1/3)$$

$${}^1v_{30} = v_3^0 \text{ მაშინ და მხოლოდ მაშინ როცა } I_0(x_2) < \infty \quad (k < 1)$$

ან

$${}^1X_{n\alpha 0} \equiv 0, \quad \alpha = 1, 2$$

$${}^1X_{n31} = \phi_3.$$

3. ზოგადი ძაბვის შემთხვევაში $N = 1$ მიახლოებისთვის

$$u_\alpha = u_\alpha^c + u_\alpha^b = \frac{1}{2}({}^1v_{\alpha 0} + 3{}^1v_{31}x_3), \quad \alpha = 1, 2,$$

$$u_3 = u_3^c + u_3^b = \frac{1}{2}({}^1v_{30} + 3{}^1v_{31}x_3)$$

და სასაზღვრო ამოცანა, შემდეგი სასაზღვრო პირობით კორექტულადაა დასმული γ -ზე

$$u = g$$

ან γ_0 -ზე

$${}^1v_{\alpha 0} = v_\alpha^0 \text{ მაშინ და მხოლოდ მაშინ როცა } I_0(x_2) < \infty \quad (k < 1),$$

$${}^1v_{31} = v_3^1 \text{ მაშინ და მხოლოდ მაშინ როცა } I_1(x_2) < \infty \quad (k < 1/3),$$

$${}^1v_{\alpha 1} = v_\alpha^1 \text{ მაშინ და მხოლოდ მაშინ როცა } I_1(x_2) < \infty \quad (k < 1/3),$$

$${}^1v_{30} = v_3^0 \text{ მაშინ და მხოლოდ მაშინ როცა } I_0(x_2) < \infty \quad (k < 1/3)$$

ან

$${}^1X_{n\alpha 0} = \psi_\alpha, \quad \alpha = 1, 2$$

$${}^1X_{n30} = \psi_3,$$

$${}^1X_{n\alpha 1} = \phi_\alpha \quad \alpha = 1, 2$$

$${}^1X_{n30} = \phi_3$$

სადაც სიდიდეები: $g, v_j^r, (r = 0, 1), \psi_i, \phi_i (i = 1, 2, 3)$ ცნობილია და

$${}^0v_{ir} := \frac{{}^0u_{ir}}{h^{r+1}}, \quad {}^1v_{ir} := \frac{{}^1u_{ir}}{h^{r+1}}, \quad r = 1, 2.$$

3. $N = 2$ მიახლოება

ვთავათ $N = 2$, მაშინ $r = 1, 2, 3$ და გაჭიმვა-კუმშვასთან დაკავშირებული წევრების უგულვებელყოფით (2.1)-დან ვღებულობთ შემდეგ სტატიკურ სისტემას

$$\begin{aligned} & \mu \left(h^2 v_{30,\alpha} \right)_{,\alpha} + \left(3\mu h^2 v_{\alpha 1} \right)_{,\alpha} - \left(5\mu h^2 h_{,\alpha} v_{32} \right)_{,\alpha} \\ & + Q_{n_3}^{(+)} \sqrt{1 + \left(h_{,1}^{(+)} \right)^2 + \left(h_{,2}^{(+)} \right)^2} + Q_{n_3}^{(-)} \sqrt{1 + \left(h_{,1}^{(-)} \right)^2 + \left(h_{,2}^{(-)} \right)^2} + \phi_{3r} = 0 \end{aligned} \quad (3.1)$$

$$(N = 2, r = 0, j = 3 - \text{სთვის}),$$

$$\begin{aligned} & \mu \left[\left(h^3 v_{\alpha 1,\beta} \right)_{,\alpha} + \left(h^3 v_{\beta 1,\alpha} \right)_{,\alpha} \right] + \lambda \left(h^3 v_{\gamma 1,\gamma} \right)_{,\beta} + 5\lambda \left(h^3 v_{32} \right)_{,\beta} - 3\mu h^2 v_{30,\beta} + 15\mu h^2 h_{,\beta} v_{32} + \\ & h \left[Q_{n_\beta}^{(+)} \sqrt{1 + \left(h_{,1}^{(+)} \right)^2 + \left(h_{,2}^{(+)} \right)^2} + Q_{n_\beta}^{(-)} \sqrt{1 + \left(h_{,1}^{(-)} \right)^2 + \left(h_{,2}^{(-)} \right)^2} + \phi_{\beta r} \right] = 0 \end{aligned} \quad (3.2)$$

$$\beta = 1, 2 (N = 2, r = 1, j = \beta - \text{სთვის})$$

$$\begin{aligned} & \mu \left(h^5 v_{32,\alpha} \right)_{,\alpha} + \mu h^2 h_{,\alpha} v_{30,\alpha} - 3\lambda h^3 v_{\alpha 1,\alpha} + 3\mu h^2 h_{,\alpha} v_{\alpha 1} - 5\mu h^3 \left(h_{,1}^2 + h_{,2}^2 \right) v_{32} \\ & + h^2 \left[Q_{n_3}^{(+)} \sqrt{1 + \left(h_{,1}^{(+)} \right)^2 + \left(h_{,2}^{(+)} \right)^2} + Q_{n_3}^{(-)} \sqrt{1 + \left(h_{,1}^{(-)} \right)^2 + \left(h_{,2}^{(-)} \right)^2} + \phi_{3r} \right] = 0 \end{aligned} \quad (3.3)$$

$$(N = 2, r = 2, j = 3 - \text{სთვის}),$$

ცხადია

$$u_3^b(x_1, x_2, x_3, t) = \frac{1}{2} v_{30}^2(x_1, x_2) + \frac{5}{2} (x_3^2 - h^2) v_{32}^2(x_1, x_2)$$

$$u_\alpha^b(x_1, x_2, x_3) = \frac{3}{2} x_3^2 v_{\alpha 1}^2(x_1, x_2)$$

შემოვიტანოთ შემდეგი აღნიშვნები

$$F_{30} = -Q_{n_3}^{(+)} \sqrt{1 + \left(h_{,1}^{(+)}\right)^2 + \left(h_{,2}^{(+)}\right)^2} - Q_{n_3}^{(-)} \sqrt{1 + \left(h_{,1}^{(-)}\right)^2 + \left(h_{,2}^{(-)}\right)^2} - \phi_{30} \quad (3.4)$$

$$F_{11} = -h \left[Q_{n_1}^{(+)} \sqrt{1 + \left(h_{,1}^{(+)}\right)^2 + \left(h_{,2}^{(+)}\right)^2} + Q_{n_1}^{(-)} \sqrt{1 + \left(h_{,1}^{(-)}\right)^2 + \left(h_{,2}^{(-)}\right)^2} + \phi_{11} \right] \quad (3.5)$$

$$F_{21} = -h \left[Q_{n_2}^{(+)} \sqrt{1 + \left(h_{,1}^{(+)}\right)^2 + \left(h_{,2}^{(+)}\right)^2} + Q_{n_2}^{(-)} \sqrt{1 + \left(h_{,1}^{(-)}\right)^2 + \left(h_{,2}^{(-)}\right)^2} + \phi_{21} \right] \quad (3.6)$$

$$F_{32} = -h^2 \left[Q_{n_3}^{(+)} \sqrt{1 + \left(h_{,1}^{(+)}\right)^2 + \left(h_{,2}^{(+)}\right)^2} + Q_{n_3}^{(-)} \sqrt{1 + \left(h_{,1}^{(-)}\right)^2 + \left(h_{,2}^{(-)}\right)^2} + \phi_{32} \right] \quad (3.7)$$

თუ განვიხილავთ ცილინდრული ღუნვის შემთხვევას, ანუ შემთხვევას, როდესაც (3.1)-(3.3) განტოლებებში შემავალი ყველა ფუნქცია დამოკიდებულია მხოლოდ x_2 -ზე, მაშინ (3.1)-(3.3) განტოლებათა სისტემა მიიღებს შემდეგ სახეს:

$$(\mu h v_{30,2})_{,2} + (2\mu h v_{21})_{,2} - (5\mu h^2 h_{,2} v_{32})_{,2} - F_{30} = 0 \quad (3.8)$$

$$\mu (h^3 v_{11,2})_{,2} - F_{11} = 0 \quad (3.9)$$

$$(2\mu + \lambda)(h^3 v_{21,2})_{,2} + 5\lambda (h^3 v_{32})_{,2} - 3(\mu h v_{30,2} - 5\mu h^2 h_{,2} v_{32}) - F_{21} = 0 \quad (3.10)$$

$$\mu (h^5 v_{32,2})_{,2} - 3\lambda h^3 v_{21,2} + h h_{,2} (\mu h v_{30,2} + 3\mu h v_{21} - 5\mu h^2 h_{,2} v_{32}) - F_{32} = 0 \quad (3.11)$$

4. ფირფიტების დეფორმაცია $N = 2$ მიახლოებაში

(3.9) გადაგვარებული დიფერენციალური განტოლებაა, უცნობი ფუნქციის კოეფიციენტი h^3 ნული ხდება საზღვრის ერთ წერტილში, კონკრეტულად $x_2 = 0$ -ისთვის. (3.9) განტოლებას ვხსნით $x_2 \in (0; L]$ შუალედში და შემდეგ შევისწავლით v_{11} -ის ყოფაქცევას, როდესაც $x_2 \rightarrow 0$. $(0; L]$ შუალედში (3.9) განტოლების ზოგად ამონახსნს აქვს შემდეგი სახე

$$v_{11}(x_2) = \begin{cases} \frac{8}{h_0^3 \mu} \int_{x_2}^L \left(\frac{\xi^{1-3k}}{1-3k} - \frac{x_2^{1-3k}}{1-3k} \right) F_{11}(\xi) d\xi + \frac{8c_1}{h_0^3} \left(\frac{L^{1-3k}}{1-3k} - \frac{x_2^{1-3k}}{1-3k} \right) + c_2 \text{ თუ } k \neq \frac{1}{3} \\ \frac{8}{h_0^3 \mu} \int_{x_2}^L (\ln \xi - \ln x_2) F_{11}(\xi) d\xi + \frac{8c_1}{h_0^3} (\ln L - \ln x_2) + c_2 \text{ თუ } k = \frac{1}{3} \end{cases} \quad (4.1)$$

თუ განვიხილავთ $\lim_{x_2 \rightarrow 0^+} v_{11}(x_2)$, ვნახავთ რომ ამონახსნი არ არის შემოსაზღვრული, როცა $k \geq \frac{1}{3}$.

აქედან გამომდინარე, დირიხლეს ამოცანას აქვს შემდეგი სახე:

ამოცანა 1. ვთქვათ $k < \frac{1}{3}$. ვიპოვოთ (3.9) განტოლების ამონახსნი $v_{11} \in C^2([0, L]) \cap C([0, L])$,

შემდეგი სასაზღვრო პირობების გათვალისწინებით:

$$v_{11}(0) = V_0, \quad v_{11}(L) = V_L$$

ამოხსნა. (4.1)-ის გათვალისწინებით გვექნება

$$c_2 = V_L$$

$$c_1 = \frac{h_0^3(1-3k)}{8L^{1-3k}}(V_0 - V_L) - \frac{1}{\mu L^{1-3k}} \int_0^L \xi^{1-3k} F_{11}(\xi) d\xi$$

$$v_{11}(x_2) = \frac{8}{h_0^3 \mu} \int_{x_2}^L \left(\frac{\xi^{1-3k}}{1-3k} - \frac{x_2^{1-3k}}{1-3k} \right) F_{11}(\xi) d\xi + \frac{(V_0 - V_L)}{L^{1-3k}} (L^{1-3k} - x_2^{1-3k}) - \frac{8}{h_0^3} \left(\frac{L^{1-3k}}{1-3k} - \frac{x_2^{1-3k}}{1-3k} \right) \frac{1}{\mu L^{1-3k}} \int_0^L \xi^{1-3k} F_{11}(\xi) d\xi + V_L, \text{ როცა } k < \frac{1}{3}.$$

ამოცანა 2. ვთქვათ k ნებისმიერია. ვიპოვოთ (3.9) განტოლების ამონახსნი $v_{11} \in C^2([0, L])$ შემდეგი სასაზღვრო პირობების გათვალისწინებით:

$$v_{11}(0) = O(1) \quad v_{11}(L) = V_L$$

ამოხსნა. იმისათვის რომ ამონახსნი იყოს შემოსაზღვრული $c_1 = 0$, ხოლო (4.1)-ის

გათვალისწინებით $c_2 = V_L$

$$v_{11}(x_2) = \begin{cases} \frac{8}{h_0^3 \mu} \int_{x_2}^L \left(\frac{\xi^{1-3k}}{1-3k} - \frac{x_2^{1-3k}}{1-3k} \right) F_{11}(\xi) d\xi + V_L \text{თუ } k \neq \frac{1}{3} \\ \frac{8}{h_0^3 \mu} \int_{x_2}^L (\ln \xi - \ln x_2) F_{11}(\xi) d\xi + V_L \text{თუ } k = \frac{1}{3} \end{cases}$$

განვიხილოთ შემთხვევა, როდესაც $v_{21} \equiv 0$, მაშინ (3.8),(3.9),(3.11) განტოლებათა სისტემის ამონახსნები ჩაიწერება ცხადი სახით, (3.10)-დან F_{21} -ისთვის დაიწერება დამატებით პირობა და დაისმევა შესაბამისი სასაზღვრო ამოცანები.

(3.8) და (3.11) განტოლებები გადაიწერება შემდეგი სახით:

$$(\mu h v_{30,2})_{,2} + (2\mu h v_{21})_{,2} - F_{30} = 0 \quad (4.2)$$

$$\mu(h^5 v_{32,2})_{,2} + h h_2 (\mu h v_{30,2} - 5\mu h^2 h_2 v_{32}) - F_{32} = 0 \quad (4.3)$$

(4.2), (4.3) განტოლებების ზოგად ამონახსნს აქვს შემდეგი სახე:

$$v_{32}(x_2) = \frac{32}{\mu h_0^5} \int_{x_2}^L \left(\frac{\xi^{1-5k}}{1-5k} - \frac{x_2^{1-5k}}{1-5k} \right) F_{32}(\xi) d\xi + \frac{64c_1^1}{h_0^7 \mu} \left(\frac{L^{1-3k}}{1-3k} - \frac{x_2^{1-3k}}{1-3k} \right) - \frac{64c_1^1}{h_0^7 \mu} \left(\frac{L^{1-5k} x_2^{2k}}{1-5k} - \frac{x_2^{1-3k}}{1-5k} \right) + \frac{128k}{h_0^7 \mu} \int_{x_2}^L \left(\frac{x_2^{-5j} \xi^{2k}}{2k} - \frac{x_2^{-3k}}{2k} \right) F_{30}(\xi) d\xi + \frac{32c_2^1(L^{1-5k} - x_2^{1-5k})}{h_0^5(1-5k)} + c_3^1 \quad (4.4)$$

$$v_{30}(x_2) = \frac{2}{\mu h_0} \int_{x_2}^L (\ln x_2 - \ln \xi) F_{30}(\xi) d\xi + \frac{2c_1^1}{\mu h_0} (\ln L - \ln x_2) + \frac{40k}{\mu h_0^3} \int_{x_2}^L \left(\frac{x_2^{1-5k}}{1-5k} - \frac{\eta^{1-5k}}{1-5k} \right) \eta^{2k-1} \int_{x_2}^{\eta} F_{32}(\xi) d\xi d\eta + \frac{10k^2}{\mu h_0} \int_{x_2}^L \left(\frac{x_2^{1-5k}}{1-5k} - \frac{\eta^{1-5k}}{1-5k} \right) \eta^{2k-1} \int_{x_2}^{\eta} \tau^{2k-1} \int_{x_2}^{\tau} F_{30}(\xi) d\xi d\tau d\eta + \frac{5c_1^1 k}{\mu h_0} \left(\frac{1}{(1-5k)^2} (L^{1-5k} - x_2^{1-5k}) - \frac{1}{(1-5k)(1-3k)} (x_2^{2k} L^{1-3k} - x_2^{1-k}) - \frac{x_2^{1-5k}}{1-5k} (\ln L - \ln x_2) + \frac{1}{2k(1-5k)} (x_2^{1-3k} L^{2k} - x_2^{1-k}) \right) + \frac{40c_2^1 k}{\mu h_0^3} \frac{1}{1-5k} \left(\frac{L^{1-3k}}{1-3k} - \frac{x_2^{1-3k}}{1-3k} - \frac{x_2^{1-5k} L^{2k}}{2k} + \frac{x_2^{1-3k}}{2k} \right) + \frac{5c_3^1 h_0^2}{4} (L^{2k} - x_2^{2k}) + c_4^1 \quad (4.5)$$

(3.10)-დან

$$F_{21} = 5\lambda(h^3 v_{32})_{,2} - 3\mu h v_{30,2} + 15\mu h^2 h_2 v_{32} = 5\lambda(h^3 \left(\frac{32}{\mu h_0^5} \int_{x_2}^L \left(\frac{\xi^{1-5k}}{1-5k} - \frac{x_2^{1-5k}}{1-5k} \right) F_{32}(\xi) d\xi + \frac{64c_1^1}{h_0^7 \mu} \left(\frac{L^{1-3k}}{1-3k} - \frac{x_2^{1-3k}}{1-3k} \right) - \frac{64c_1^1}{h_0^7 \mu} \left(\frac{L^{1-5k} x_2^{2k}}{1-5k} - \frac{x_2^{1-3k}}{1-5k} \right) + \frac{128k}{h_0^7 \mu} \int_{x_2}^L \left(\frac{x_2^{-5j} \xi^{2k}}{2k} - \frac{x_2^{-3k}}{2k} \right) F_{30}(\xi) d\xi + \frac{32c_2^1(L^{1-5k} - x_2^{1-5k})}{h_0^5(1-5k)} + c_3^1 \right)_{,2} - 3\mu h v_{30,2} + 15\mu h^2 h_2 v_{32})$$

$$\begin{aligned}
& 3\mu h \left(\frac{2}{\mu h_0} \int_{x_2}^L (\ln x_2 - \ln \xi) F_{30}(\xi) d\xi + \frac{2c_1^1}{\mu h_0} (\ln L - \ln x_2) + \frac{40k}{\mu h_0^3} \int_{x_2}^L \left(\frac{x_2^{1-5k}}{1-5k} - \frac{\eta^{1-5k}}{1-5k} \right) \eta^{2k-1} \int_{x_2}^{\eta} F_{32}(\xi) d\xi d\eta + \right. \\
& \frac{10k^2}{\mu h_0} \int_{x_2}^L \left(\frac{x_2^{1-5k}}{1-5k} - \frac{\eta^{1-5k}}{1-5k} \right) \eta^{2k-1} \int_{x_2}^{\eta} \tau^{2k-1} \int_{x_2}^{\tau} F_{30}(\xi) d\xi d\tau d\eta + \frac{5c_1^1 k}{\mu h_0} \left(\frac{1}{(1-5k)^2} (L^{1-5k} - x_2^{1-5k}) - \right. \\
& \frac{1}{(1-5k)(1-3k)} (x_2^{2k} L^{1-3k} - x_2^{1-k}) - \frac{x_2^{1-5k}}{1-5k} (\ln L - \ln x_2) + \frac{1}{2k(1-5k)} (x_2^{1-3k} L^{2k} - x_2^{1-k}) + \frac{40c_2^1 k}{\mu h_0^3} \frac{1}{1-5k} \left(\frac{L^{1-3k}}{1-3k} - \right. \\
& \left. \frac{x_2^{1-3k}}{1-3k} - \frac{x_2^{1-5k} L^{2k}}{2k} + \frac{x_2^{1-3k}}{2k} \right) + \frac{5c_3^1 h_0^2}{4} (L^{2k} - x_2^{2k}) + c_4^1 \left. \right) + 15\mu h^2 h_{,2} \left(\frac{32}{\mu h_0^5} \int_{x_2}^L \left(\frac{\xi^{1-5k}}{1-5k} - \frac{x_2^{1-5k}}{1-5k} \right) F_{32}(\xi) d\xi + \right. \\
& \left. \frac{64c_1^1}{h_0^7 \mu} \left(\frac{L^{1-3k}}{1-3k} - \frac{x_2^{1-3k}}{1-3k} \right) - \frac{64c_1^1}{h_0^7 \mu} \left(\frac{L^{1-5k} x_2^{2k}}{1-5k} - \frac{x_2^{1-3k}}{1-5k} \right) + \frac{128k}{h_0^7 \mu} \int_{x_2}^L \left(\frac{x_2^{-5j} \xi^{2k}}{2k} - \frac{x_2^{-3k}}{2k} \right) F_{30}(\xi) d\xi + \frac{32c_2^1 (L^{1-5k} - x_2^{1-5k})}{h_0^5 (1-5k)} + c_3^1 \right)
\end{aligned}$$

ამოცანა 1. ვთქვათ $k < \frac{1}{5}$. ვიპოვოთ (3.8), (3.9), (3.11) განტოლბათა სისტემის ამონახსნები

$v_{32}, v_{30}, v_{11} \in C^2([0, L]) \cap C([0, L])$ შემდეგი სასაზღვრო პირობების გათვალისწინებით:

$$v_{11}(0) = V_0, \quad v_{11}(L) = V_L, \quad v_{32}(0) = V_0^1, \quad v_{32}(L) = V_L^1, \quad v_{30}(0) = V_0^2, \quad v_{30}(L) = V_L^2$$

ამოხსნა. (4.1), (4.4), (4.5)-ის გათვალისწინებით, მუდმივებს აქვს შემდეგი სახე:

$$c_2 = V_L$$

$$c_1 = \frac{h_0^3(1-3k)}{8L^{1-3k}} (V_0 - V_L) - \frac{1}{\mu L^{1-3k}} \int_0^L \xi^{1-3k} F_{11}(\xi) d\xi$$

$$c_3^1 = V_L^1$$

$$c_1^1 = \frac{h_0^7 \mu (1-3k)}{64L^{1-3k}} (V_0^1 - V_L^1 - \frac{32c_2^1 L^{1-5k}}{h_0^5 (1-5k)} - \frac{128k}{h_0^7 \mu} \int_0^L \left(\frac{\eta^{-5k} \xi^{2k}}{2k} - \frac{\eta^{-3k}}{2k} \right) F_{30}(\xi) d\eta - \frac{32}{\mu h_0^5} \int_0^L \frac{\xi^{1-5k}}{1-5k} F_{32}(\xi) d\xi)$$

$$c_4^1 = V_L^2$$

$$\begin{aligned}
c_2^1 = & \frac{\mu h_0^3 (1-5k)(1-3k)}{40kL^{1-3k}} (V_0^2 - V_L^2 - \frac{5V_L^1 h_0^2}{4} L^{2k} - \frac{2}{\mu h_0} \int_0^L \ln \xi F_{30}(\xi) d\xi - \frac{2c_1^1}{\mu h_0} \ln L \\
& - \frac{40k}{\mu h_0^3} \int_0^L \left(\frac{\eta^{1-5k}}{1-5k} \right) \eta^{2k-1} \int_0^{\eta} F_{32}(\xi) d\xi d\eta \\
& - \frac{10k^2}{\mu h_0} \int_0^L \left(\frac{\eta^{1-5k}}{1-5k} \right) \eta^{2k-1} \int_0^{\eta} \tau^{2k-1} \int_0^{\tau} F_{30}(\xi) d\xi d\tau d\eta - \frac{5c_1^1 k}{\mu h_0} \frac{1}{(1-5k)^2} L^{1-5k}
\end{aligned}$$

$$v_{11}(x_2) = \frac{8}{h_0^3 \mu} \int_{x_2}^L \left(\frac{\xi^{1-3k}}{1-3k} - \frac{x_2^{1-3k}}{1-3k} \right) F_{11}(\xi) d\xi + \frac{(V_0 - V_L)}{L^{1-3k}} (L^{1-3k} - x_2^{1-3k}) - \frac{8}{h_0^3} \left(\frac{L^{1-3k}}{1-3k} - \frac{x_2^{1-3k}}{1-3k} \right) \frac{1}{\mu L^{1-3k}} \int_0^L \xi^{1-3k} F_{11}(\xi) d\xi + V_L.$$

$$\begin{aligned} v_{30}(x_2) = & \frac{2}{\mu h_0} \int_{x_2}^L (\ln x_2 - \ln \xi) F_{30}(\xi) d\xi + \frac{2}{\mu h_0} (\ln L - \ln x_2) \left(\frac{h_0^7 \mu (1-3k)}{64 L^{1-3k}} (V_0^1 - V_L^1 - \frac{32 c_2^1 L^{1-5k}}{h_0^5 (1-5k)} \right. \\ & - \frac{128k}{h_0^7 \mu} \int_0^L \left(\frac{\eta^{-5k} \xi^{2k}}{2k} - \frac{\eta^{-3k}}{2k} \right) F_{30}(\xi) d\xi - \frac{32}{\mu h_0^5} \int_0^L \frac{\xi^{1-5k}}{1-5k} F_{32}(\xi) d\xi \Big) \\ & + \frac{40k}{\mu h_0^3} \int_{x_2}^L \left(\frac{x_2^{1-5k}}{1-5k} - \frac{\eta^{1-5k}}{1-5k} \right) \eta^{2k-1} \int_{x_2}^{\eta} F_{32}(\xi) d\xi d\eta \\ & + \frac{10k^2}{\mu h_0} \int_{x_2}^L \left(\frac{x_2^{1-5k}}{1-5k} - \frac{\eta^{1-5k}}{1-5k} \right) \eta^{2k-1} \int_{x_2}^{\eta} \tau^{2k-1} \int_{x_2}^{\tau} F_{30}(\xi) d\xi d\tau d\eta + \frac{5k}{\mu h_0} \left(\frac{h_0^7 \mu (1-3k)}{64 L^{1-3k}} (V_0^1 \right. \\ & - V_L^1 - \frac{32 c_2^1 L^{1-5k}}{h_0^5 (1-5k)} - \frac{128k}{h_0^7 \mu} \int_0^L \left(\frac{\eta^{-5k} \xi^{2k}}{2k} - \frac{\eta^{-3k}}{2k} \right) F_{30}(\xi) d\xi \\ & - \frac{32}{\mu h_0^5} \int_0^L \frac{\xi^{1-5k}}{1-5k} F_{32}(\xi) d\xi \Big) \left(\frac{1}{(1-5k)^2} (L^{1-5k} - x_2^{1-5k}) \right. \\ & - \frac{1}{(1-5k)(1-3k)} (x_2^{2k} L^{1-3k} - x_2^{1-k}) - \frac{x_2^{1-5k}}{1-5k} (\ln L - \ln x_2) + \frac{1}{2k(1-5k)} (x_2^{1-3k} L^{2k} \\ & \left. - x_2^{1-k}) \right) + \frac{40 c_2^1 k}{\mu h_0^3} \frac{1}{1-5k} \left(\frac{L^{1-3k}}{1-3k} - \frac{x_2^{1-3k}}{1-3k} - \frac{x_2^{1-5k} L^{2k}}{2k} + \frac{x_2^{1-3k}}{2k} \right) + \frac{5 V_L^1 h_0^2}{4} (L^{2k} - x_2^{2k}) + V_L^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v_{32}(x_2) = & \frac{32}{\mu h_0^5} \int_{x_2}^L \left(\frac{\xi^{1-5k}}{1-5k} - \frac{x_2^{1-5k}}{1-5k} \right) F_{32}(\xi) d\xi + \frac{64 c_1^1}{h_0^7 \mu} \left(\frac{L^{1-3k}}{1-3k} - \frac{x_2^{1-3k}}{1-3k} \right) - \frac{64 c_1^1}{h_0^7 \mu} \left(\frac{L^{1-5k} x_2^{2k}}{1-5k} - \frac{x_2^{1-3k}}{1-5k} \right) \\ & + \frac{128k}{h_0^7 \mu} \int_{x_2}^L \left(\frac{\eta^{-5k} \xi^{2k}}{2k} - \frac{\eta^{-3k}}{2k} \right) F_{30}(\xi) d\xi + \frac{32(L^{1-5k} - x_2^{1-5k})}{h_0^5 (1-5k)} \left(\frac{\mu h_0^3 (1-5k)(1-3k)}{40k L^{1-3k}} (V_0^2 \right. \\ & - V_L^2 - \frac{5 V_L^1 h_0^2}{4} L^{2k} - \frac{2}{\mu h_0} \int_0^L \ln \xi F_{30}(\xi) d\xi - \frac{2 c_1^1}{\mu h_0} \ln L \\ & - \frac{40k}{\mu h_0^3} \int_0^L \left(\frac{\eta^{1-5k}}{1-5k} \right) \eta^{2k-1} \int_0^{\eta} F_{32}(\xi) d\xi d\eta \\ & \left. - \frac{10k^2}{\mu h_0} \int_0^L \left(\frac{\eta^{1-5k}}{1-5k} \right) \eta^{2k-1} \int_0^{\eta} \tau^{2k-1} \int_0^{\tau} F_{30}(\xi) d\xi d\tau d\eta - \frac{5 c_1^1 k}{\mu h_0} \frac{1}{(1-5k)^2} L^{1-5k} \right) + V_L^1 \end{aligned}$$

ამოცანა 2. ვთქვათ k ნებისმიერია. ვიპოვოთ (3.8), (3.9), (3.11) განტოლებათა სისტემის ამონახსნები $v_{11}, v_{32}, v_{30} \in C^2([0, L])$ შემდეგი სასაზღვრო პირობების გათვალისწინებით:

$$v_{11}(0) = O(1), \quad v_{11}(L) = V_L, \quad v_{32}(0) = O(1), \quad v_{32}(L) = V_L^1, \quad v_{30}(0) = O(1), \quad v_{30}(L) = V_L^2$$

ამოსხნა. იმისათვის რომ ამონახსნები იყოს შემოსაზღვრული $c_1 = 0$, $c_1^1 = 0$, $c_2^1 = 0$, ხოლო (4.1),

(4.4), (4.5)-ის გათვალისწინებით, მუდმივებს აქვს შემდეგი სახე:

$$c_2 = V_L,$$

$$c_3^1 = V_L^1,$$

$$c_4^1 = V_L^2$$

$$v_{11}(x_2) = \begin{cases} \frac{8}{h_0^3 \mu} \int_{x_2}^L \left(\frac{\xi^{1-3k}}{1-3k} - \frac{x_2^{1-3k}}{1-3k} \right) F_{11}(\xi) d\xi + V_L \text{ თუ } k \neq \frac{1}{3} \\ \frac{8}{h_0^3 \mu} \int_{x_2}^L (\ln \xi - \ln x_2) F_{11}(\xi) d\xi + V_L \text{ თუ } k = \frac{1}{3} \end{cases}$$

$$v_{32}(x_2) = \frac{32}{\mu h_0^5} \int_{x_2}^L \left(\frac{\xi^{1-5k}}{1-5k} - \frac{x_2^{1-5k}}{1-5k} \right) F_{32}(\xi) d\xi + V_L^1$$

$$v_{30}(x_2) = \frac{2}{\mu h_0} \int_{x_2}^L (\ln x_2 - \ln \xi) F_{30}(\xi) d\xi + \frac{40k}{\mu h_0^3} \int_{x_2}^L \left(\frac{x_2^{1-5k}}{1-5k} - \frac{\eta^{1-5k}}{1-5k} \right) \eta^{2k-1} \int_{x_2}^{\eta} F_{32}(\xi) d\xi d\eta + \frac{10k^2}{\mu h_0} \int_{x_2}^L \left(\frac{x_2^{1-5k}}{1-5k} - \frac{\eta^{1-5k}}{1-5k} \right) \eta^{2k-1} \int_{x_2}^{\eta} \tau^{2k-1} \int_{x_2}^{\tau} F_{30}(\xi) d\xi d\tau d\eta + \frac{5V_L^1 h_0^2}{4} (L^{2k} - x_2^{2k}) + V_L^2.$$

განვიხილოთ შემთხვევა, როდესაც $v_{30} \equiv 0$ და $v_{32} \equiv 0$, მაშინ (3.9),(3.10) განტოლებათა სისტემის ამონახსნები ჩაიწერება ცხადი სახით, (3.8), (3.11)-დან F_{30} -ისა და F_{32} -ისთვის დაიწერება დამატებით პირობა და დაისმევა შესაბამისი სასაზღვრო ამოცანები.

(3.10) განტოლება გადაიწერება შემდეგი სახით.

$$(2\mu + \lambda)(h^3 v_{21,2})_{,2} - F_{21} = 0 \tag{4.6}$$

(4.6) განტოლების ზოგად ამონახსნს აქვს შემდეგი სახე:

$$v_{21}(x_2) = \begin{cases} \frac{8}{(2\mu+\lambda)h_0^3} \int_{x_2}^L \left(\frac{\xi^{1-3k}}{1-3k} - \frac{x_2^{1-3k}}{1-3k} \right) F_{21}(\xi) d\xi + \frac{8c_5^1}{h_0^3} \left(\frac{L^{1-3k}}{1-3k} - \frac{x_2^{1-3k}}{1-3k} \right) + c_6^1 \text{ თუ } k \neq \frac{1}{3} \\ \frac{8}{(2\mu+\lambda)h_0^3} \int_{x_2}^L (\ln \xi - \ln x_2) F_{21}(\xi) d\xi + \frac{8c_5^1}{h_0^3} (\ln L - \ln x_2) + c_6^1 \text{ თუ } k = \frac{1}{3} \end{cases} \tag{4.7}$$

(3.8)-დაბ

$$F_{30} = (2\mu h v_{21})_{,2} =$$

$$\left(2\mu \left(h \begin{cases} \frac{8}{(2\mu+\lambda)h_0^3} \int_{x_2}^L \left(\frac{\xi^{1-3k}}{1-3k} - \frac{x_2^{1-3k}}{1-3k} \right) F_{21}(\xi) d\xi + \frac{8c_5^1}{h_0^3} \left(\frac{L^{1-3k}}{1-3k} - \frac{x_2^{1-3k}}{1-3k} \right) + c_6^1 & \text{თუ } k \neq \frac{1}{3} \\ \frac{8}{(2\mu+\lambda)h_0^3} \int_{x_2}^L (\ln \xi - \ln x_2) F_{21}(\xi) d\xi + \frac{8c_5^1}{h_0^3} (\ln L - \ln x_2) + c_6^1 & \text{თუ } k = \frac{1}{3} \end{cases} \right) \right)_{,2}$$

ხოლო (3.11)-დაბ $F_{32} = 3\mu h_2 h^2 v_{21} - 3\lambda h^3 v_{21,2} =$

$$3\mu h_2 h^2 \left(\begin{cases} \frac{8}{(2\mu+\lambda)h_0^3} \int_{x_2}^L \left(\frac{\xi^{1-3k}}{1-3k} - \frac{x_2^{1-3k}}{1-3k} \right) F_{21}(\xi) d\xi + \frac{8c_5^1}{h_0^3} \left(\frac{L^{1-3k}}{1-3k} - \frac{x_2^{1-3k}}{1-3k} \right) + c_6^1 & \text{თუ } k \neq \frac{1}{3} \\ \frac{8}{(2\mu+\lambda)h_0^3} \int_{x_2}^L (\ln \xi - \ln x_2) F_{21}(\xi) d\xi + \frac{8c_5^1}{h_0^3} (\ln L - \ln x_2) + c_6^1 & \text{თუ } k = \frac{1}{3} \end{cases} \right) -$$

$$3\lambda h^3 \left(\begin{cases} \frac{8}{(2\mu+\lambda)h_0^3} \int_{x_2}^L \left(\frac{\xi^{1-3k}}{1-3k} - \frac{x_2^{1-3k}}{1-3k} \right) F_{21}(\xi) d\xi + \frac{8c_5^1}{h_0^3} \left(\frac{L^{1-3k}}{1-3k} - \frac{x_2^{1-3k}}{1-3k} \right) + c_6^1 & \text{თუ } k \neq \frac{1}{3} \\ \frac{8}{(2\mu+\lambda)h_0^3} \int_{x_2}^L (\ln \xi - \ln x_2) F_{21}(\xi) d\xi + \frac{8c_5^1}{h_0^3} (\ln L - \ln x_2) + c_6^1 & \text{თუ } k = \frac{1}{3} \end{cases} \right)_{,2}$$

ამოცანა 1. ვთქვათ $k < \frac{1}{3}$. ვიპოვოთ (3.9), (3.10) განტოლებათა სისტემის ამონახსნები $v_{11}, v_{21} \in$

$C^2([0, L]) \cap C([0, L])$, შემდეგი სასაზღვრო პირობების გათვალისწინებით:

$$v_{11}(0) = V_0, \quad v_{11}(L) = V_L, \quad v_{21}(0) = V_0^3, \quad v_{21}(L) = V_L^3$$

ამოხსნა. (4.1) და (4.7)-ის გათვალისწინებით მუდმივებს აქვს შემდეგი სახე:

$$c_2 = V_L,$$

$$c_1 = \frac{h_0^3(1-3k)}{8L^{1-3k}} (V_0 - V_L) - \frac{1}{\mu L^{1-3k}} \int_0^L \xi^{1-3k} F_{11}(\xi) d\xi$$

$$c_6^1 = V_L^3$$

$$c_5^1 = \frac{h_0^3(1-3k)}{8L^{1-3k}} (V_0^3 - V_L^3) - \frac{1}{(2\mu+\lambda)L^{1-3k}} \int_0^L \xi^{1-3k} F_{21}(\xi) d\xi$$

$$v_{11}(x_2) = \frac{8}{h_0^3 \mu} \int_{x_2}^L \left(\frac{\xi^{1-3k}}{1-3k} - \frac{x_2^{1-3k}}{1-3k} \right) F_{11}(\xi) d\xi + \frac{(V_0 - V_L)}{L^{1-3k}} (L^{1-3k} - x_2^{1-3k}) - \frac{8}{h_0^3} \left(\frac{L^{1-3k}}{1-3k} - \frac{x_2^{1-3k}}{1-3k} \right) \frac{1}{\mu L^{1-3k}} \int_0^L \xi^{1-3k} F_{11}(\xi) d\xi + V_L, \text{ როცა } k < \frac{1}{3}.$$

$$v_{21}(x_2) = \frac{8}{(2\mu + \lambda)h_0^3} \int_{x_2}^L \left(\frac{\xi^{1-3k}}{1-3k} - \frac{x_2^{1-3k}}{1-3k} \right) F_{21}(\xi) d\xi + \frac{8}{h_0^3} \left(\frac{L^{1-3k}}{1-3k} - \frac{x_2^{1-3k}}{1-3k} \right) \left(\frac{h_0^3(1-3k)}{8L^{1-3k}} (V_0^3 - V_L^3) \right. \\ \left. - \frac{1}{(2\mu + \lambda)L^{1-3k}} \int_0^L \xi^{1-3k} F_{21}(\xi) d\xi \right) + V_L^3 \quad \text{როცა } k < \frac{1}{3}.$$

ამოცანა 2. ვთქვათ k ნებისმიერია. ვიპოვოთ (3.9), (3.10) განტოლებების ამონახსნი $v_{21}, v_{11} \in C^2([0, L])$ შემდეგი სასაზღვრო პირობების გათვალისწინებით:

$$v_{11}(0) = O(1), \quad v_{11}(L) = V_L, \quad v_{21}(0) = O(1), \quad v_{21}(L) = V_L^3$$

ამოხსნა. იმისათვის რომ ამონახსნი იყოს შემოსაზღვრული $c_1 = 0, c_5^1 = 0$, ხოლო (4.1) და (4.7)-ის გათვალისწინებით

$$c_2 = V_L,$$

$$c_6^1 = V_L^3,$$

$$v_{11}(x_2) = \begin{cases} \frac{8}{h_0^3 \mu} \int_{x_2}^L \left(\frac{\xi^{1-3k}}{1-3k} - \frac{x_2^{1-3k}}{1-3k} \right) F_{11}(\xi) d\xi + V_L \quad \text{თუ } k \neq \frac{1}{3} \\ \frac{8}{h_0^3 \mu} \int_{x_2}^L (\ln \xi - \ln x_2) F_{11}(\xi) d\xi + V_L \quad \text{თუ } k = \frac{1}{3} \end{cases}$$

$$v_{21}(x_2) = \begin{cases} \frac{8}{(2\mu + \lambda)h_0^3} \int_{x_2}^L \left(\frac{\xi^{1-3k}}{1-3k} - \frac{x_2^{1-3k}}{1-3k} \right) F_{21}(\xi) d\xi + V_L^3 \quad \text{თუ } k \neq \frac{1}{3} \\ \frac{8}{(2\mu + \lambda)h_0^3} \int_{x_2}^L (\ln \xi - \ln x_2) F_{21}(\xi) d\xi + V_L^3 \quad \text{თუ } k = \frac{1}{3} \end{cases}$$

და ბოლოს, სრული სისტემის შემთხვევაში ამონახსნები არ არის დაწერილი ცხადი სახით, თუმცა დაისმევა შემდეგი სასაზღვრო ამოცანები:

ამოცანა 1. (დირიხლეს ამოცანა) ვთქვათ $k < \frac{1}{5}$. ვიპოვოთ (3.8)-(3.11) განტოლებათა სისტემის ამონახსნები $v_{11}, v_{32}, v_{30}, v_{21} \in C^2([0, L]) \cap C([0, L])$, შემდეგი სასაზღვრო პირობების გათვალისწინებით:

$$v_{11}(0) = V_0, v_{32}(0) = V_0^1, v_{30}(0) = V_0^2, v_{21}(0) = V_0^3, v_{11}(L) = V_L, v_{32}(L) = V_L^1, \\ v_{30}(L) = V_L^2, v_{21}(L) = V_L^3.$$

ამოცანა 2. ვთქვათ k ნებისმიერია. ვიპოვოთ (3.8)-(3.11) განტოლებათა სისტემის ამონახსნები

$v_{11}, v_{32}, v_{30}, v_{21} \in C^2([0, L])$, შემდეგი სასაზღვრო პირობების გათვალისწინებით:

$$v_{11}(0) = O(1), v_{32}(0) = O(1), v_{30}(0) = O(1), v_{21}(0) = O(1), v_{11}(L) = V_L, v_{32}(L) = V_L^1, \\ v_{30}(L) = V_L^2, v_{21}(L) = V_L^3.$$

დასკვნა

ნაშრომში გამოკვლეულია წამახვილებული ფირფიტის ღუნვის ამოცანები ი. ვეკუას იერარქიული მოდელების მოდიფიცირებულ $N = 2$ მიახლოებაში. მიღებულია განტოლებათა სისტემა $N = 2$ მიახლოებაში, შესწავლილია სასაზღვრო პირობების კორექტულად დასმის თავისებურებები, დასმულია სასაზღვრო ამოცანები და რიგ შემთხვევაში ამოხსნილია ცხადი სახით.

გამოყენებული ლიტერატურა

- [1] G. Jaiani, N. Chinchaladze. A survey of results on cusped standard and prismatic shells, in particular plates, and bars and on the corresponding singular PDEs. *Continuum Mech. Thermodyn.* (2021).
<https://doi.org/10.1007/s00161-020-00965-2>
- [2] G. Jaiani. *Theory of Cusped Euler-Bernoulli Beams and Kirchoff-Love Plates*, Lecture Notes of TICMI, **3**, 2002
- [3] N. Chinchaladze. On some Nonclassical Problems for Differential Equations and Their Applications to the Theory of Cusped Prismatic Shells. *Lecture Notes of TICMI*, **9**, 2008
- [4] I. Vekua. On two ways of constructing the theory of elastic shells. *Applied mechanics*. In: Becker, E., Mikhailov, G.K. (eds.) *Proceedings of the Thirteenth International Congress of Theoretical and Applied Mechanics*. Moscow, August 1972. Springer, Berlin (1973)
- [6] I. Vekua. The theory of thin shallow shells of variable thickness. *Proceedings of A. Razmadze Institute of Mathematics of Georgian Academy of Sciences*, 1965, 30, 5-103 (Russian).
- [7] I. Vekua. *Some general methods of constructing of various versions of theory of shells*. Nauka, Moscow, 1982, 286 p. (Russian).
- [8] I. Vekua. *Shell theory: general methods of construction*. Pitman Advanced Publishing Program, Boston-London-Melbourne, 1985.
- [9] I. Vekua. The theory of thin shallow shells of variable thickness. *Proceeding of A. Razmadze Institute of Mathematics of Georgian Academy of Sciences*, 30:5103, 1965 (Russian)
- [10] G. Jaiani. Elastic bodies with non-smooth boundaries—cusped plates and shells. *ZAMM-Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik*, 1996, 76 (2), 117-120.
- [11] G. Jaiani, S. Kharibegashvili, D. Natroshvili, W. Wendland. Hierarchical models for cusped plates. Preprint 2002/13. University of Stuttgart, Mathematical Institute A, Stuttgart, 2002.
- [12] G. Jaiani, S. Kharibegashvili, D. Natroshvili, W. Wendland. Hierarchical models for elastic cusped plates and beams. *Lecture Notes of TICMI*, 2003, 4 (free available also electronically on <http://www.viam.science.tsu.ge/others/ticmi/Int/vol4/cb.pdf>).
- [13] G. Jaiani, S. Kharibegashvili, D. Natroshvili, W. Wendland. Two-dimensional hierarchical models for prismatic shells with thickness vanishing at the boundary. *Journal of Elasticity*, 2004, 77 (2), 95-122.
- [14] E. Makhover. Bending of a plate of variable thickness with a cusped edge. *Scientific Notes of Leningrad State Ped. Institute*, 1957, 17 (2), 28-39 (Russian).
- [15] G. Avalishvili, M. Avalishvili. *One Static Hierarchical Two-Dimensional Models of Thermoelastic Piezoelectric Plates With variable Thickness* (2018).