ივანე ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტი

ანალიზი ჰომოგენურ კვაზი-მეტრიკულ სივრცეებზე

ანი ოზბეთელაშვილი

ზუსტ და საბუნებისმეტყველო მეცნიერებათა ფაკულტეტი

მათემატიკის დეპარტამენტი

ხელმძღვანელი: ასოც. პროფესორი თენგიზ კოპალიანი,

ასისტ. პროფესორი ალექსანდრე აპლაკოვი

თბილისი 2022

სარჩევი

ანოტაცია

ნაშრომი კვლევითი ხასიათისაა. ჰომოგენურ კვაზი-მეტრიკულ სივრცეებზე განხილული ზოგიერთი ფუნქციური სივრცისათვის მიღებული იქნება ექსტრაპოლაციის თეორემები. ნაშრომის ძირითადი მიზანია შესწავლილ იქნას ჰარმონიული ანალიზის ზოგიერთი საკითხი ჰომოგენური ტიპის სივრცეებზე (SHT), (ანუ კვაზი-მეტრიკული სივრცეები, რომლებზეც შემოღებულია ზომა გაორმაგების პირობით). არსებობს მრავალი მიზეზი, გარდა უშუალოდ ბუნებრივი მათემატიკური განზოგადებისა, მსგავსი ტიპის სივრცეების უფრო ღრმად და ზოგადი კუთხით შესწავლისთვის.

შევნიშნოთ რომ, ასეთ სივრცეებში არ გვაქვს ჯგუფის სტრუქტურა, ასევე არ არის განსაზღვრული ფურიეს გარდაქმნა, მიუხედავად ამისა, ჰარმონიული ანალიზის განვითარება გარკვეული აზრით არის შესაძლებელი. შეიძლება ითქვას, რომ გეომეტრია აზორციელებს ანალიზს. თავის მხრივ, ჰარმონიულ ანალიზს აქვს ფართო გამოყენებები ისეთ არსებითად სხვადასხვა მიმართულებებში, როგორებიცაა ფუნქციათა თეორია, კერძოწარმოებულიანი დიფერენციალური განტოლებები. უკანასკნელი კი თავის მხრივ არის ძირითადი აპარატი საინჟინრო და ტექნოლოგიური პრობლემების გადაჭრისათვის. ჰომოგენური ტიპის სივრცეების საჭიროება წარმოიქმნება როდესაც გვსურს განვიხილოთ რაიმე აბსტრაქტულ სიმრავლეზე შემოღებული მეტრიკული სივრცე, და მასზე ანალიზი. შევნიშნოთ, რომ ასეთი ზოგადი ტიპის შედეგები, რომლებიც მიღებულია ჰომოგენურ სივრცეებში, მყისიერად პოვებს გამოყენებებს ფრაქტალური ტიპის სიმრავლეების შესწავლისას.

1 შესავალი

ნაშრომის ძირითადი მიზანია შესწავლილ იქნას ჰარმონიული ანალიზის ზოგიერთი საკითხი ჰომოგენური ტიპის სივრცეებზე (SHT), (ანუ კვაზი-მეტრიკული სივრცეები, რომლებზეც შემოღებულია ზომა გაორმაგების პირობით). არსებობს მრავალი მიზეზი, გარდა უშუალოდ ბუნებრივი მათემატიკური განზოგადებისა, მსგავსი ტიპის სივრცეების უფრო ღრმად და ზოგადი კუთხით შესწავლისთვის. რაც მოიაზრებს შემდეგს, შევისწავლოთ გეომეტრიული და რაოდენობრივი ტიპის ობიექტები, მათი ინვარიანტულობა და ასევე დინამიური ცვალებადობა აღნიშნულ სივრცეებში. ჩვენს მიერ განსახილველი სივრცეები და მათზე ანალიზი მოითხოვს საკმაოდ რთული აპარატის შემუშავებას, რადგანაც ის აკავშირებს არსებითად სხვადასხვა შინაარსის ობიექტებს ერთმანეთთან.

აღსანიშნავია ისიც, რომ ინტერესი ასეთი ტიპის სივრცეებისადმი, ჯერ კიდევ $1920-1930$ წლებში არსებობდა,ჰარდის, ლიტლვუდის, სობოლევის და სხვათა ნაშრომების წყალობით, რადგანაც ისინი ბუნებრივად მივიდნენ ასეთი ტიპის სივრცეების საჭიროებაზე კლასიკური ინტეგრალური ოპერატორების შესწავლისას. ასევე ახალი ეტაპი, აღნიშნული სივრცეების კვლევის კუთხით იწყება კალდერონის, ზიგმუნდის, სტეინის და სხვათა შრომებში(იხ.$[7],[1],[9]$), ზოგადი ინტეგრალური ოპერატორების განხილვის დროს წონიან სივრცეებში (მაკენჰაუპტი, ფეფერმანი, უიდენი, სოიერი, და სხვები). მნიშვნელოვანია აღინიშნოს, რომ ამის პარალელურად ზემოთმოყვანილ კვლევებთან მჭიდროდ ვითარდებოდა ფუნქციურ სივრცეთა თეორია, ინტერპოლაცია და ა.შ.(ნიკოლსკი, პეტრე, და სხვები).აღნიშნული კვლევის კომპლექსურობა იმაზე მეტყველებს, რომ ზოგადი მიდგომები განპირობებულია პრაქტიკული ამოცანების გადასაწყვეტად საჭირო აპარატის შექმნით, რომლებიც თავის მხრივ მოითხოვს უფრო ზოგად სტრუქტურის შესწავლას, ვიდრე ფუნქციური სივრცეებია ევკლიდურ სივრცეზე. კერძოდ, ასეთებია კვაზი-მეტრიკული სივრცეები, რომლებიც ინდუცირდება დიფერენციალური ოპერატორებით ან კიდევ, ინტეგრალური გულით. ამ მიმართულებით აღსანიშნავია სმიტის, კალდერონის, კოიფმანისა და ვაისის, მასიასისა და სეგოვიას ნაშრომები, კერძოდ, კოიფმანისა და ვეისის ფუნდამენტური შრომები.(იხ.$[2],[6]$)

აღსანიშნავია ის ფაქტი, რომ რადგანაც ასეთ, ზოგადი ტიპის სივრცეებში არ გვაქვს დაფარვის თეორემები, კერძოდ ბეზიკოვიჩის ტიპის თეორემა, ეს წარმოშობს სირთულეებს, რომელთა გადალახვაც გარკვეული, უფრო გართულებული აპარატის საშუალებითაა შესაძლებელი, რომელიც თავის მხრივ მოიცავს ყველა კლასიკური მიდგომის შესწავლას, და დამატებით ახალი ტექნიკის შემოტანას, რომელიც მოსახერხებელია ასეთი ტიპის სივრცეებზე მუშაობის დროს. მაგ. ჰომოგენურ სივრცეებზე განსაზღვრული გლუვ-ფუნქციათა კლასი, (ბესოვის, ლიზორკინტრიბელის სივრცეები), რომლებიც აქტიურად იყო შესწავლილი ჰანისა და სოიერის მიერ. ხაზგასმით უნდა აღინიშნოს, რომ ბანახის წონიან სივრცეებში დიფერენციალური და ინტეგ-

რალური ოპერატორების თეორიისა და თავად ამ სივრცეების კვლევისადმი დიდი ინტერესი გამოწვეულია მათი მნიშვნელოვანი გამოყენებებით ცვლადი კოეფიციენტების მქონე კერძო-წარმოებულიან დიფერენციალურ განტოლებებში, ასევე სასაზღვრო ამოცანებში, სპექტრულ თეორიაში, დიფერენციალური ოპერატორების,სასაზღვრო მნიშვნელობის ამოცანების, ანალიზური ფუნქციებისა და სინგულარული ინტეგრალურ განტოლებებში, პროგნოზირების თეორიაში, კვანტურ სტატისტიკაში და ა.შ. კერძოდ, ჰომოგენურ სივრცეებზე განსაზღვრული ინტეგრალური ოპერატორების შემოსაზღვრულობის ამოცანა, ბუნებრივად წარმოიქმნება ცვლადი კოეფიციენტების მქონე კერძო-წარმოებულიანი დიფერენციალური განტოლებების შესწავლისას. ასევე სასაზღვრო ამოცანებში, სახელდობრ, მკაცრად ფსევდო ამოზნექილ არეებში, ჰაიზენბერგის ჯგუფზე (ასევე უფრო ზოგადი ჰომოგენური ჯგუფებში) როგორც ამ არეების საზღვრის მოდელი მრავალი ცვლადის კომპლექსური ფუნქციებისათვის.

შევნიშნოთ რომ, ასეთ სივრცეებში არ გვაქვს ჯგუფის სტრუქტურა, ასევე არ არის განსაზღვრული ფურიეს გარდაქმნა, მიუხედავად ამისა, ჰარმონიული ანალიზის განვითარება გარკვეული აზრით არის შესაძლებელი. შეიძლება ითქვას, რომ გეომეტრია ახორციელებს ანალიზს. თავის მხრივ, ჰარმონიულ ანალიზს აქვს ფართო გამოყენებები ისეთ არსებითად სხვადასხვა მიმართულებებში, როგორებიცაა ფუნქციათა თეორია, კერძოწარმოებულიანი დიფერენციალური განტოლებები. უკანასკნელი კი თავის მხრივ არის ძირითადი აპარატი საინჟინრო და ტექნოლოგიური პრობლემების გადაჭრისათვის. ჰომოგენური ტიპის სივრცეების საჭიროება წარმოიქმნება როდესაც გვსურს განვიხილოთ რაიმე აბსტრაქტულ სიმრავლეზე შემოღებული მეტრიკული სივრცე, და მასზე ანალიზი. შევნიშნოთ, რომ ასეთი ზოგადი ტიპის შედეგები, რომლებიც მიღებულია ჰომოგენურ სივრცეებში, მყისიერად პოვებს გამოყენებებს ფრაქტალური ტიპის სიმრავლეების შესწავლისას. მეიერი აღნიშნავს, ([1]-ში) „ადამიანი გაოცებულია იმ არსებითი ცვლილებებით, რაც მოხდა ანალიზში მეოცე საუკუნის განმავლობაში. 1930-იან წლებში კომპლექსურმა მეთოდებმა და ფურიეს მწკრივებმა მნიშვნელოვანი როლი ითამაშა ანალიზის განვითარებაში. მრავალი გაუმჯობესების შემდეგ, რომელიც მიღწეული იყო კალდერონზიგმუნდის სკოლის მიერ, დღესდღეობით ძირითადად კვლევა ხორციელდება ჰომოგენური ტიპის სივრცეებზე, სადაც არ გვაქვს ჯგუფის სტრუქტურა, ასევე არ არის განსაზღვრული ფურიეს გარდაქმნა, მაგრამ ჰარმონიული ანალიზის წარმოება შესაძლებელია გარკვეული აზრით. მართლაც, გეომეტრია ახორციელებს ანალიზს."

ჰომოგენური ტიპის (SHT) სივრცე X, ρ, μ შემოიღეს კოიფმანმა და ვაისმა 1971 წელს [2]. როდესაც მოცემული გვაქვს X სიმრავლე, რომელიც აღჭურვილია ρ კვაზი-მეტრიკით, და ბორელის μ ზომით, რომელსაც აქვს გაორმაგების თვისება. არსებობს ორი სახის (SHT) სივრცეები, გეომეტრიული გაორმაგების პირობის მქონე ან ზოგადი ბორელის გაორმაგების თვისების მქონე ზომით. თუ ზომა აკმაყოფილებს გაორმაგების პირობას, ის ასევე აკმაყოფილებს

გეომეტრიული გაორმაგების პირობას. არსებობს დიდძალი ლიტერატურა, რომელიც ეძღვნება ჰომოგენური ტიპის სივრცეებს, როგორც ერთპარამეტრიან, ისე ახლახანს შემოღებულ მრავალ პარამეტრიან შემთხვევებს. ჰომოგენური ტიპის სივრცეების ზოგიერთი არაევკლიდური მაგალითი მოყვანილია კარნო–კარათეოდორის სივრცეების სახით, რომელთა თეორია შემუშავებულია ნაგელის, სტეინის და სხვების მიერ და მასთან დაკავშირებულ ნაშრომებში(იხ.[7]); სადაც კვაზიმეტრიკა განისაზღვრება ვექტორული ველების მიერ, რომლებიც აკმაყოფილებენ ჰორმანდერის ტიპის პირობებს განსახილველ მრავალნაირობაზე.

შევნიშნოთ რომ, ინტერესი ცვლადმაჩვენებლიანი ლებეგის სივრცეების მიმართ გაიზარდა 1990 წლებიდან, რადგანაც ისინი ფართოდ გამოიყენება ელექტრორეოლოგიური სითხეების მათემატიკური მოდელირებისათვის. ეს არის სითხეები, რომელთა სიბლანტე იცვლება (ხშირად მკვეთრად) ელექტრული ველის ზემოქმედებისას. მათი ფიზიკური თვისებებისა და გამოყენებებისათვის იხილეთ (.[4],[3]). ელექტრორეოლოგიური სითხეები ექსპერიმენტულად კარგად არის შესწავლილი, მიუხედავად ამისა, სრული თეორიული მოდელი ჯერ კიდევ არ არსებობს. სითხეთა დინამიკის შესწავლისას ისინი განიხილება როგორც არანიუტონისეული სითხეები. ნაშრომში ჩენ შევისწავლით ცვლადმაჩვენებლიანი ლებეგისა სივრცეებს, რომლებიც განსაზღვრულიარიან ჰომოგენური ტიპის სივრცეზე. აღნიშნული ტიპის სივრცეებისათვის ჩვენ შევისწავლით რუბიო დე ფრანსიას ექსტრაპოლაციის ტიპის თეორემებს.

2 ჰომოგენური ტიპის სივრცეები

ამ თავში წარმოგიდგენთ ერთგვაროვანი ტიპის სივრცეების ცნებას. ჩვენ ვისაუბრებთ კვაზი-მეტრიკასა და გაორმაგების თვისების მქონე ზომებზე. შემდგომ, ჩამოვაყალიბებთ და დავამტკიცებთ თეორემებს, რომლებიც გამოყენებული იქნება მომდევნო თავებში. ჰომოგენური ტიპის სივრცეების განსაზღვრისთვის დაგვჭირდება გარკვეული ცნებებისა და დებულებების ჩამოყალიბება, რომლებიც მნიშვნელოვან როლს ასრულებენ ჩვენს ნაშრომში.

2.1 კვაზი-მეტრიკული სივრცე

ვთქვათ X არის არაცარიელი სიმრავლე, კვაზი-მეტრიკა X სიმრავლეზე წარმოადგენს $\rho : X \times X \to \mathbb{R}$ ფუნქციას შემდეგი თვისებებით:

(i) დადებითობა: ყოველი $\forall x, y \in X$, $\rho(x, y) \geq 0$, გარდა ამისა $\rho(x, y) = 0$ მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $x = y$;

(ii) რეფლექსურობა: ყოველი $\forall x, y \in X$, $\rho(x, y) = \rho(y, x)$;

(iii) კვაზი სამკუთხედის უტოლობა: არსებობს $\exists k_0 \geq 1$ ისეთი, რომ ყოველი $\forall x, y, z \in X$ $\rho(x, y) \leq k_0 \cdot (\rho(x, z) + \rho(z, y))$.

შემდგომში k_0-ს ვუწოდებთ კვაზი-სამკუთხედის მუდმივას. შევნიშნოთ, რომ $k_0 = 1$ დროს, ρ არის მეტრიკა.

თუ X-არის სიმრავლე და ρ კვაზი-მეტრიკა მასზე, მაშინ წყვილს (X, ρ) ეწოდება კვაზი-მეტრიკული სივრცე.

შენიშვნა 1. მეტრიკის კიდევ ერთი კარგად შესწავლილი განზოგადება არის ფსევდომეტრიკა, სადაც სუსტდება დადებითობის პირობა. ფსევდომეტრიკული ρ-სათვის $\rho(x, y) = 0$ არ ნიშნავს, რომ $x = y$.

განვიხილოთ მაგალითები:

მაგალითი 1. დავუშვათ $X = \{\heartsuit, \clubsuit, \spadesuit\}$ განვსაზღვროთ ფუნქცია $d : X \times X \to \mathbb{R}$ ისეთი, რომ:

(i) $d(\heartsuit, \heartsuit) = d(\clubsuit, \clubsuit) = d(\spadesuit, \spadesuit) =: 0$;

(ii) $d(\heartsuit, \clubsuit) = d(\clubsuit, \heartsuit) := 5$;

(iii) $d(\clubsuit, \spadesuit) = d(\spadesuit, \clubsuit) := 3$;

(iv) $d(\heartsuit, \spadesuit) = d(\spadesuit, \heartsuit) := 4$.

ადვილი დასანახია, რომ ამ გზით განსაზღვრული d არის მეტრიკა X სიმრავლეზე, ხოლო (X, d) წყვილს ეწოდება მეტრიკული სივრცე.

ანალოგიურად განვიხილოთ ფუნქცია $\rho : X \times X \to \mathbb{R}$, განსაზღვრული შემდეგი სახით:

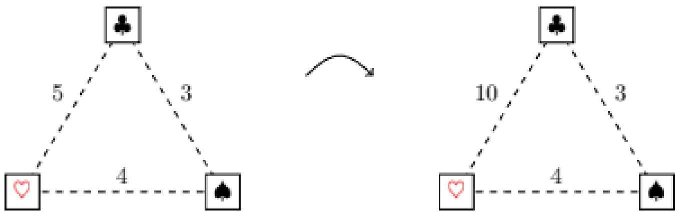
(i) $\rho(\heartsuit, \heartsuit) = \rho(\clubsuit, \clubsuit) = d(\spadesuit, \spadesuit) =: 0$;

(ii) $\rho(\heartsuit, \clubsuit) = \rho(\clubsuit, \heartsuit) := 10$;

(iii) $\rho(\clubsuit, \spadesuit) = \rho(\spadesuit, \clubsuit) := 3$;

(iv) $\rho(\heartsuit, \spadesuit) = \rho(\spadesuit, \heartsuit) := 4$.

ცხადია, რომ $\rho(\heartsuit, \clubsuit) = 10 > 7 = \rho(\heartsuit, \spadesuit) + \rho(\spadesuit, \clubsuit)$ არღვევს სამკუთხედის უტოლობას, შესაბამისად ρ არ არის მეტრიკა. თუმცა ρ კვაზი-მეტრიკაა X სიმრავლეზე, როცა $k_0 \geq 10/7$.



სურ 1: მეტრიკა (a) და კვაზი-მეტრიკა (b)

შემდგომში ჩვენ შემოვიღებთ ღია ბირთვის ცნებას.

განსაზღვრება 1. ღია ბირთვი

დავუშვათ (X, ρ) კვაზი-მეტრიკული სივრცეა. ყოველი $\forall x \in X$-სათვის და $r \in \mathbb{R}$ დადებითი $r > 0$ რიცხვისათვის განსაზღვრულ $B_\rho(x, r) = \{y \in X | \rho(x, y) < r\}$ სიმრავლეს ვუწოდოთ ღია ბირთვი ცენტრით x და r რადიუსით.

კარგად არის ცნობილი, რომ მეტრიკული (X, d) სივრცისათვის, d მეტრიკის საშუალებით შეგვიძლია განვმარტოთ τ_d ტოპოლოგია X-ზე.

განსაზღვრება 2. (მეტრიკით გამოწვეული ტოპოლოგია)

დავუშვათ (X, d) მეტრიკული სივრცეა. $(\tau_d)_{(1)}$ ტოპოლოგია ვუწოდოთ ისეთ ტოპოლოგიას, X სიმრავლეზე, რომლის ღია სიმრავლეები წარმოდგება ღია ბირთვების ნებისმიერი გაერთიანებით.

განსაზღვრება 3. დავუშვათ (X, d) მეტრიკული სივრცეა. d მეტრიკის საშუალებით $(\tau_d)_{(2)}$ ტოპოლოგია განისაზღვრება შემდეგნაირად: O სიმრავლეს ვუწოდოთ ღია, თუ მისი ნებისმიერი $x \in O$ წერტილისათვის არსებობს ღია ბირთვი $B(x, r_x)$, რომელიც მთლიანად შედის O სიმრავლეში.

ზემოთ მოყვანილი ორი განმარტება ერთმანეთის ექვივალენტურია.

განსაზღვრება 4. (ტოპოლოგია მიღებული კვაზი-მეტრიკით)

დავუშვათ (X, ρ) კვაზი-მეტრიკული სივრცეა. განვმარტოთ ტოპოლოგია τ_ρ შემდეგნაირად: O სიმრავლეს ვუწოდოთ ღია, თუ მისი ნებისმიერი $x \in O$ წერტილისათვის არსებობს $B_\rho(x, r_x)$ ღია ბირთვი, ისეთი, რომ $B_\rho(x, r_x) \subseteq O$.

მაგალითი 2. დავუშვათ $X = \{-1\} \bigcup [0, \infty)$. ρ კვაზი-მეტრიკა განვსაზღვროთ შემდეგი სახით:

$$\rho(x, y) = \begin{cases} 1/2, & \text{თუ } (x, y) = (0, 1); \\ 1/2, & \text{თუ } (x, y) = (-1, 0); \\ |x - y| & \text{დანარჩენ შემთხვევაში.} \end{cases}$$

მაშინ (X, ρ) არის კვაზი-მეტრიკული სივრცე, კვაზი სამკუთხედის მუდმივით $k = 2$. შევნიშნოთ, რომ ღია ბირთვი $B(-1, 3/4)$ შედგება მხოლოდ ორი წერტილისგან 0 და -1; $\{0, -1\} \subset B(-1, 3/4)$. მაშასადამე არ არსებობს ღია ბირთვი ცენტრით 0-წერტილში, რომელიც მთლიანად შევა $B(-1, 3/4)$ სიმრავლეში.

2.2 ზომები გაორმაგების თვისებით

შემდგომში განვიხილავთ ჰომოგენური ტიპის სივრცეებს. პირველ რიგში X სიმრავლეზე განვიხილავთ ზომებს, რომელთაც ექნებათ სპეციფიკური თვისებები.

განსაზღვრება 5. დავუშვათ (X, ρ) კვაზი-მეტრიკული სივრცეა და ვთქვათ μ არის ბორელის ზომა განსაზღვრული X-ზე, ისეთი, რომ ნებისმიერი ღია ბირთვი μ ზომადი სიმრავლეა. მაშინ μ წარმოადგენს X სიმრავლეზე გაორმაგების თვისების მქონე ზომას, თუ არსებობს $k_1 \geq 1$ ისეთი, რომ, ყოველი $\forall x \in X$ და $r > 0$-სათვის $\mu(B(x, 2r)) \leq k_1 \times \mu(B(x, r))$.

სადაც k_1-ს უწოდებენ გაორმაგების მუდმივას.

განსაზღვრება 6. (ჰომოგენური ტიპის სივრცე)

სამეულს (X, ρ, μ), სადაც X არის არაცარიელი სიმრავლე, ρ არის კვაზი-მეტრიკა X-ზე, ხოლო μ-არის ზომა, ვუწოდებთ ჰომოგენური ტიპის სივრცეს, თუ სრულდება შემდეგი:

1. μ-ზომად სიმრავლეთა σ-ალგებრა წარმოადგენს იმ უმცირეს, σ-ალგებრას რომელიც შეიცავს, როგორც ბორელის აზრით ზომად სიმრავლეებს, აგრეთვე ღია ρ ბირთვებს.

2. μ ზომას გააჩნია გაორმაგების თვისება.

ხშირად სამეულის დაწერის ნაცვლად გამოვიყენებთ შემოკლებულ აღნიშვნას X-ს. ასევე ჰომოგენური ტიპის სივრცის ნაცვლად გამოვიყენებთ აბრევიატურას "SHT".

ლემა 1. *დავუშვათ X "SHT"ტიპის სივრცეა. ვთქვათ $x \in X$ და $R > r > 0$. მაშინ არსებობს a მუდმივა და $C \geq 1$ რომელიც დამოკიდებულია კვაზი-სამკუთხედის უტოლობის მუდმივა k_1-ზე და R/r ფარდობაზე ისეთი, რომ:*

$$\mu(B(x,R)) \leq C \cdot \mu(B(x,r)),$$

უფრო მეტიც, შეგვიძლია C ავიღოთ შემდეგნაირად $C = k_1^{\log_2([R/r])}$.

დამტკიცება.

გაორმაგების პირობიდან გვექნება:

$$\begin{aligned}
&\mu(B(x,r)) \leq k_1 \cdot \mu(B(x,R/2)) \\
&\leq k_1^2 \cdot \mu(B(x,R/4)) \\
&\leq \dots \\
&\leq k_1^n \mu(B(x,R \cdot 2^{-n})).
\end{aligned}$$

სადაც, ავარჩიოთ n ისეთი, რომ $R \cdot 2^{-n} < r$. ∎

შენიშვნა 2. აღსანიშნავია, რომ ზოგიერთი ავტორი მუდმივას იყენებს შემდეგი მნიშვნელობით: $C = k_1^{\log_2([1+R/r])}$.

შოვიყვანოთ რამოდენიმე განსაზღვრება.

განსაზღვრება 7. დავუშვათ X არის სიმრავლე, რომელზეც განმარტებულია ρ და ρ' ორი კვაზი-მეტრიკა. ვიტყვით, რომ ρ და ρ' ექვივალენტურია ერთმანეთის, როგორც კვაზი-მეტრიკა (ან უბრალოდ ექვივალენურია ერთმანეთის), თუ არსებობს მუდმივა $0 < a < A < \infty$, ისეთი რომ:

$$a \cdot \rho(x,y) \leq \rho'(x,y) \leq A \cdot \rho(x,y)$$

ყოველი $\forall x, y \in X$.

განსაზღვრება 8. გეომეტრიული მუდმივა

დავუშვათ (X, ρ, μ) ჰომოგენური ტიპის სივრცეა კვაზი-სამკუთხედის უტოლობის k_0 მუდმივათი და გაორმაგების k_1 მუდმივით. ნებიმიერ მუდმივას, რომელიც დამოკიდებულია მხოლოდ k_0-სა და k_1-ზე ვუწოდებთ გეომეტრიულ მუდმივას.

მაგალითი 3. ვთქვათ X ჰომოგენური ტიპის სივრცეა. ქვემოთ მოყვანილი ყველა მუდმივა წარმოადგენს გეომეტრიულ მუდმივას:

- $3 \cdot k_0$;
- k_1/k_0;
- k_1^α ფიქსირებული α-სთვის.

2.3 ალტერნატიული განმარტებები

ჩვენ ახლა მოვიყვანთ განმარტებას, რომელიც მნიშვნელოვანია ჰომოგენური ტიპის სივრცეებისათვის.

ალვარადო და მიტრეა თავიანთ მონოგრაფიაში მცირე ვარიაციას გვთავაზობენ ჰომოგენური ტიპის სივრცის განმარტებაში. ავტორები კვაზი-მეტრიკას განიხილავენ, როგორც ექვივალენტობის კლასებს, განსხვავებით ჩვენი განსაზღვრებისა. აღნიშნულ მონოგრაფიაში კვაზი-სამკუთხედის უტოლობას აქვს შემდეგი სახე:

$$\rho(x, y) \leq k_0 \cdot max \{\rho(x, z), \rho(z, y)\},$$

აღნიშნული თვისებით კვაზი-მეტრიკას უწოდებენ "კვაზი-ულტრამეტრიკას". უფრო მეტიც, ხშირად სიმეტრიულობის თვისების ნაცვლად იყენებენ შემდეგ პირობას, არსებობს მუდმივა $C \geq 1$ ისეთი, რომ ყოველი $\forall x, y \in X$,

$$\rho(x, y) \leq C \cdot \rho(y, x).$$

ზემოთ ხსენებული ავტორებისათვის მოყვანილ თვისებებს აქვს გადამწყვეტი მნიშვნელობა, რისი წყალობითაც ხდება გარკვეული ამოცანების და პრობლემების გადაჭრა.

მოვიყვანოთ ზოგიერთი განმარტება და მაგალითი ჰომოგენური ტიპის სივრცეებსა და კვაზი-მეტრიკულ სივრცეებზე.

განსაზღვრება 9. (ტრივიალური ზომა)

თუ (X, μ) ზომადი სივრცეა, ისეთი, რომ $\mu(x) \equiv 0$ ან $\mu(x) \equiv \infty$, მაშინ ვიტყვით, რომ μ არის ტრივიალური ზომა.

მაგალითი 4. დავუშვათ (X, ρ) კვაზი-მეტრიკული სივრცეა. μ და μ' განვსაზღვროთ შემდეგი სახით:

$$.\mu(S) := 0, \mu'(S) := \infty, \quad \text{სადაც, ყოველი} \quad S \quad \text{ზომადი სიმრავლეა.}$$

მაშინ (X, ρ, μ) და $(X, \rho, \mu\prime)$ ასევე წარმოადგენენ ჰომოგენური ტიპის სივრცეებს ტრივიალური ზომით.

ქვემოთ საილუსტრაციოდ განვიხილავთ ჰომოგენური სივრცის რამდენიმე მაგალითს.

მაგალითი 5. ვთქვათ X არის უსასრულო სიმრავლე, ρ დისკრეტული მეტრიკა და μ არის არატრივიალური ზომა, მაშინ (X, ρ, μ) არ არის ჰომოგენური ტიპის სივრცე.

დამტკიცება.

მართლადდც, შევნიშნოთ, რომ ნებისმიერი $x \in X$-სთვის:

$$B(x, 3/4) = \{x\};$$

$$B(x, 3/2) = X$$

ზემოთ მოყვანილი ტოლობები და ზომის გაორმაგების თვისება გვაძლევს $\mu(x) \leq k_1 \cdot \mu(\{x\})$, ყოველი $x \in X$.

როცა μ არა ტრივიალურია და $\mu(X) > 0$, მაშინ:

$$\mu(\{x\}) > \frac{\mu(X)}{k_1} > 0$$

ყოველი x წერტილისათვის X-დან. მაგრამ, რადგამ X იყო უსასრულო სიმრავლე, მაშინ გვექნება, რომ $\mu(X) = \infty$. ამგვარად, უტოლობიდან მივიღებთ, რომ $\mu(\{x\}) = \infty$ ყოველი x წერტილისათვის, რაც ნიშნავს, რომ μ არის ტრივიალური. ■

მაგალითი 6. განვსაზღვროთ (X, ρ, μ) სამეული შემდეგნაირად, $X := \mathbb{Z}$, $\rho(x, y) := |x - y|$, და $\mu(\{x_1, \ldots, x_n\}) := \sum_{i=1}^{n} e^{|x_i|}$. მაშინ (X, ρ) კვაზი-მეტრიკული სივრცეა, მაგრამ μ ზომა არ წარმოადგენს გაორმაგების თვისების მქონე ზომას.

დამტკიცება:

ვთქვათ $x, r \in \mathbb{Z}$ სადაც, $2x > r > 0$. მაშინ:

$$\mu(B(x, r)) = \sum_{i=x-r+1}^{x+r-1} e^i < (2r - 1)e^{x+r-1} < 2re^{(x+r)}$$

და

$$\mu(B(x, 2r)) = \sum_{i=x-2r+1}^{x+2r-1} e^i > e^{x+2r-1} > e^{(x+2r)}$$

საიდანაც გვექნება,

$$\frac{\mu(B(x, 2r))}{\mu(B(x, r))} > \frac{e^r}{2r}$$

მაშასადამე ზომას არ გააჩნია გაორმაგების თვისება.

მაგალითი 7. დავუშვათ $X = \mathbb{R}$, განვმარტოთ ბორელის ზომა შემდეგნაირად:

$$\mu(S) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_S e^{-x^2} dx.$$

μ ზომას $\mathbb{R}$-ზე არ აქვს გაორმაგების თვისება.

მაგალითი 8. დავუშვათ $x \in \mathbb{R}^2$ და $R > 2$-სთვის განვსაზღვროთ "რგოლი"$Y(x,R)$ ცენტრით x და რადიუსით $R > 2$ შემდეგი სახით:

$$Y(x,R) := \left\{ y \in \mathbb{R}^2 : ||y-x|| < 1 \quad \text{ან} \quad R-1 < ||y-x|| < R \right\}.$$

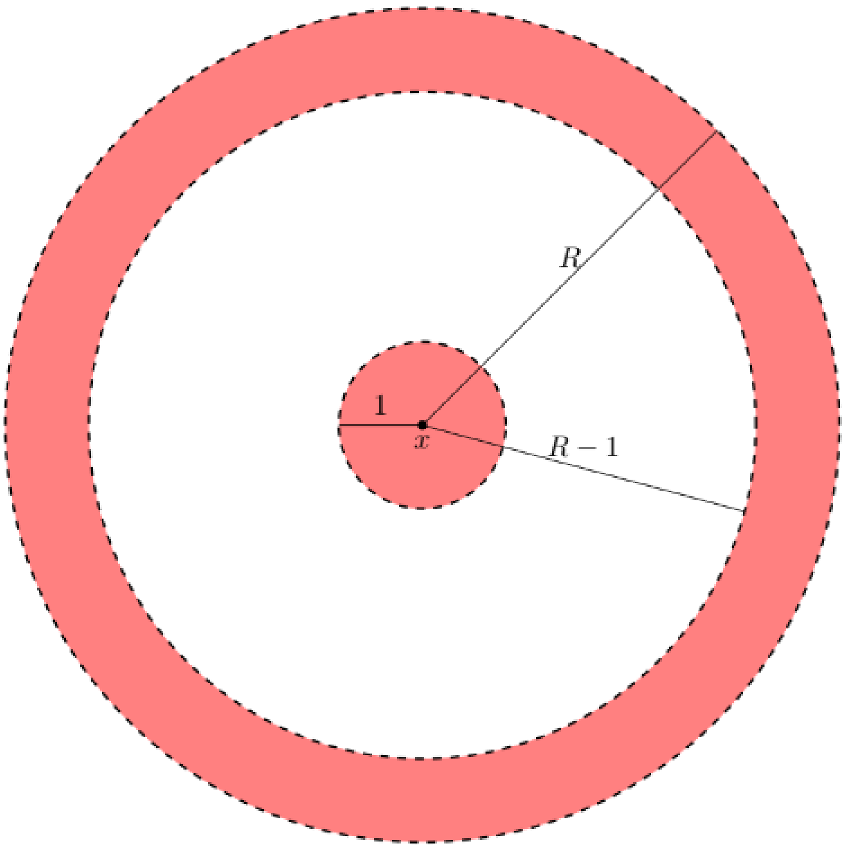
სადაც $||.||$ ევკლიდური ნორმაა. შევნიშნოთ, რომ $Y(x,R)$ სიმრავლის ზომას(ფართობს) აქვს სახე $\pi R^2 - \pi(R-1)^2 + \pi = 2\pi R$.

ახლა განვსაზღვროთ X, როგორც $Y(x,R)$ ტიპის სიმრავლეების შემდეგი გაერთიანება:

$$X := \bigcup_{n=1}^{\infty} Y(x_n, n+1)$$

სადაც x_n წერტილები შერჩეულია ისე, რომ არცერთი ორი ასეთი სიმრავლე $Y(x_i, n+1)$ ერთმანეთს არ კვეთს, ანუ:

$$Y(x_n, n+1) \cap Y(x_m, m+1) = \emptyset; \forall m \neq n.$$



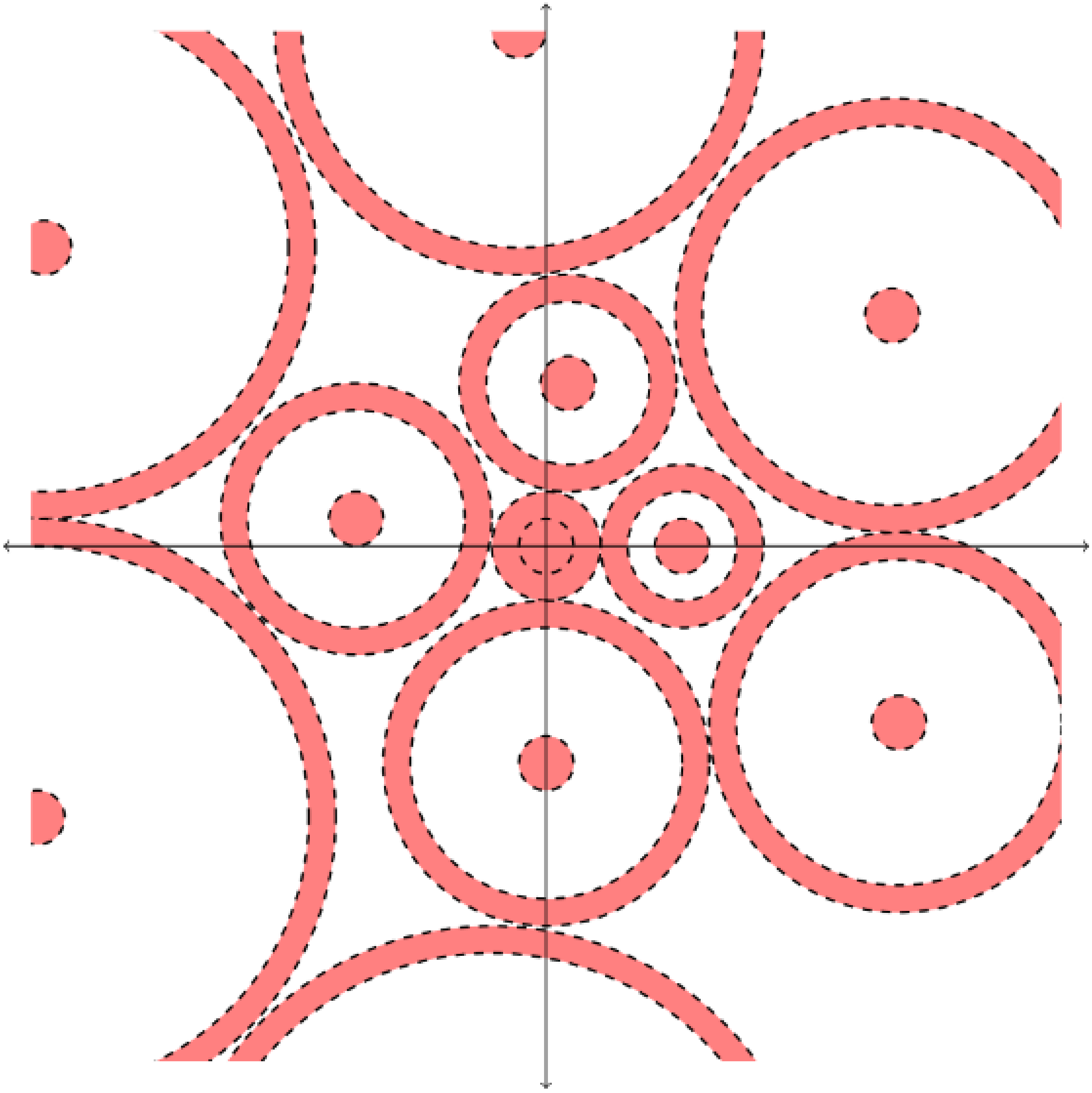
სურ 2:

განვიხილოთ $(X, ||.||, m)$ მეტრიკული სივრცე, სადაც m ჩვეულებრივი ლებეგის ზომაა $\mathbb{R}^2$-ზე, მარტივია ჩვენება იმისა, რომ აღნიშნული სივრცე არ არის ჰომოგენური ტიპის.მართლაც:

$$\mu(B(x_n, (n+1)/2)) = \pi;$$

$$\mu(B(x_n, (n+1))) = 2\pi(n+1).$$

შეფარდება შესაბამისი ზომების მიდის უსასრულობისკენ, როცა $n \to \infty$, რაც გამორიცხავს გაორმაგებული ზომის მუდმივის არსებობას. მიუხედავად ამისა, ფაქტია, რომ $X \subset \mathbb{R}^2$ და $(\mathbb{R}^2, ||.||, m)$ არის ჰომოგენური ტიპის სივრცე, უფრო მეტიც $\mathbb{R}^2$ წარმოადგენს მეტრიკულ სივრცეს გაორმაგების ზომით.



სურ 3:

2.4 გეომეტრიულად გაორმაგების თვისებების მქონე კვაზი-მეტრიკული სივრცეები

ამ თავში ჩვენ ვისაუბრებთ გეომეტრიულად გაორმაგების თვისებების მქონე კვაზი-მეტრიკულ სივრცეებზე, რასაც გამოვიყენებთ მოგვიანებით.

განსაზღვრება 10. დავუშვათ (X,ρ) კვაზი-მეტრიკული სივრცეა. თუ არსებობს არაუმეტეს $\gamma_0 \in \mathbb{N}$ რაოდენობა ბირთვები, ისეთი, რომ ყოველი $x \in X$ და $r > 0$-სთვის, ბირთვი $B(x,r)$ შეიძლება დაფარული იყოს ბირთვებით, რომელთა რადიუსებია $r/2$, მაშინ ვიტყვით, რომ X სივრცე გეომეტრიულად გაორმაგებული თვისებების მქონეა. სხვა სიტყვებით, რომ ვთქვათ არსებობს სასრული სიმრავლე $\{x_1, x_2, \dots x_{\gamma_0}\} \subseteq B(x,r)$ ისეთი, რომ

$$B(x,r) \subseteq \bigcup_{n=1}^{\gamma_0} B(x_n, r/2); \forall x \in X, \forall r > 0.$$

თეორემა 1. ***(გეომეტრიული გაორმაგება ქვესიმრავლეებზე)***

დავუშვათ (X,ρ) გეომეტრიული გაორმაგების თვისებების მქონე კვაზი-მეტრიკული სივრცეა, გეომეტრიული გაორმაგების მუდმივით γ_0. მაშინ, ნებისმიერი $E \subseteq X$, $(E, \rho|_E)$ ასევე წარმოადგენს კვაზი-მეტრიკულ სივრცეს გაორმაგების თვისებით, გეომეტრიული გაორმაგების $\gamma_0^{log_2 k_0} \cdot \gamma_0$ მუდმივით.

2.5 გაორმაგების თვისებების მქონე ზომებისა და გეომეტრიული გაორმაგების თვისების მქონე კვაზი-მეტრიკული სივრცეები

შევნიშნოთ, რომ კვაზი-მეტრიკული სივრცეების გეომეტრიული გაორმაგების თვისება არის წმინდა გეომეტრიულ თვისება და არ მოითხოვს სივრცეზე რაიმე ზომის არსებობას.
იმ შემთხვევაში, თუ კვაზი-მეტრიკული ჰომოგენური სივრცეებია, მაშინ მას აუცილებლად ექნება გეომეტრიული გაორმაგების თვისება. სახელდობრ სამართლიანია შემდეგი:

თეორემა 2. *დავუშვათ $X = (X, \rho, \mu)$ ჰომოგენური ტიპის სივრცეა არა ტრივიალური ზომით. (X,ρ) კვაზი-მეტრიკულ სივრცეს გააჩნია გეომეტრიული გაორმაგების თვისება.*

შენიშვნა 3. მუდმივა γ_0 დამოკიდებულია, როგორ k_0-ზე, ისე k_1-ზე. რაც ნიშნავს, რომ, თუ ჩვენ განვიხილავთ მხოლოდ კვაზი-მეტრიკულ სივრცეს და უგულვებელვყოფთ ზომას, მაშინ γ_0 არ არის მკაცრად გეომეტრიული მუდმივა.

2.6 გაფანტვის წერტილები

ჩვენ დავასრულებთ მოცემულ თავს კიდევ ერთი განსაზღვრების ჩამოყალიბებით, რომელსაც გამოვიყენებთ შემდგომ პარაგრაფებში.

განსაზღვრება 11. დავუშვათ $R > 0$. წერტილთა სიმრავლე $\{x_a\}_{a\in A} \subseteq X$, სადაც A არის რაიმე ინდექსების სიმრავლე, არის R-გაბნევა, თუ $\inf_{a,b\in A;a\neq b} \rho(x_a, x_b) > R$. A-შესაძლებელია იყოს არა თვლადი, როცა ჩვენ განვიხილავთ მხოლოდ კვაზი-მეტრიკულ სივრცეს. მაგალითად, როცა $X = \mathbb{R}$, დისკრეტული მეტრიკით, მაშინ ყველა X არის $1/2$-გაფანტვის სიმრავლე X-ში. თუმცა, A აუცილებელია იყოს თვლადი, როცა X არის ჰომოგენური ტიპის სივრცე.

2.7 ტრივიალური ზომები

მაგალითი 9. განვიხილოთ $\mathbb{R}$ ნამდვილ რიცხვთა სიმრავლე, ჩვეულებრივი მეტრიკითა და ზომით

$$\mu(S) := \int_S \frac{dx}{|x|}$$

სადაც S ლებეგის აზრით ზომადი სიმრავლეა. აღნიშნულ ზომას აქვს შემდეგი თვისება, ცუდი სინგულარობა ნულ წერტილში. აღნიშნული ზომის მიმართ ზოგიერთ შემოსაზღვრულ სიმრავლეს შეიძლება ჰქონდეს უსასრულო ზომა, მაგალითად $[0, 1]$. მსგავსი ტიპის შემთხვევა არ გვაქვს ჰომოგენური ტიპის სივრცის შემთხვევაში.

ლემა 2. ***ლემა ტრივიალური ზომის შესახებ***

დავუშვათ (X, ρ, μ) ჰომოგენური ტიპის სივრცეა, მაშინ შემდეგი ორი წინადადება ჭეშმარიტია:

1. *თუ არსებობს ბირთვი $B_0 \subseteq X$, ისეთი რომ $\mu(B_0) = 0$, მაშინ $\mu(B) \equiv 0$,*
2. *თუ არსებობს ბირთვი $B_\infty \subseteq X$, ისეთი რომ $\mu(B_\infty) = \infty$, მაშინ $\mu(B) \equiv \infty$ ყოველი B ბირთვისათვის.*

დამტკიცება. (1 პუნქტი) ვთქვათ $B(x, r)$ ბირთვია ზომით $\mu(B(x, r)) = 0$, და დავუშვათ $U \subseteq X$ შემოსაზღვრული ზომადი სიმრავლეა. მაშინ არსებობს $R \geq r$ ისეთი, რომ

$$[B(x, r) \cup U] \subseteq B(x, R).$$

წინა თავებში აღნიშნული ლემის თანახმად:

$$\mu(B(x, R)) \leq \cdot\mu(B(x, r)) = 0,$$

სადაც C გეომეტრიული მუდმივაა. საიდანაც გვექნება $\mu(U) = 0$. რაც გვიჩვენებს, რომ ყოველი შემოსაზღვრული ზომადი სიმრავლის μ ზომა არის ნული. ამავე დროს, X შეიძლება დავფაროთ შემოსაზღვრული სიმრავლეების შემდეგი გაერთიანებით:

$$X = \bigcup_{n=1}^{\infty} B(x, n)$$

ნებისმიერი $x \in X$, ამრიგად $\mu \equiv 0$. ■

დამტკიცება. (2 პუნქტი) ვთქვათ $B(x,r)$ სხვა რაიმე ბირთვია ზომით $\mu(B(x,r)) = \infty$, და დავუშვათ $B(y,r\prime)$ რაიმე სხვა ბირთვია. შეგვიძლია შევარჩიოთ ისეთი $R \geq r'$ ისეთი, რომ $B(x,r) \subseteq B(y,R)$. მაშინ ზომის ერთ-ერთი თვისებიდან გამომდინარე $\mu(B(y,R)) = \infty$. ლემის 1 თანახმად:

$$\infty = \mu(B(y,R)) \leq C \cdot \mu(B(y,r'))$$

რაიმე C მუდმივასათვის, რომელიც დამოკიდებულია k_1, k_0, r-სა და R-ზე. ეს ნიშნავს, რომ $\mu(B(y,r')) = \infty$.

ზემოთ მოყვანილი დებულების შედეგია ის, რომ ჰომოგენურ სივრცეებში ბირთვებს ყოველთვის აქვთ დადებითი, სასრული ზომა. მაშასადამე მაგალით 12-ში მოყვანილ ზომას არ შეიძლება ჰქონდეს გაორმაგების თვისება. თუ დავუბრუნდებით ზემოთ მოყვანილი ინტეგრალით განსაზღვრულ ზომას, შევნიშნავთ, რომ:

$$\mu(B(3/2,1)) = \mu(B(1/2,5/2)) = \ln 5$$

ხოლო

$$\mu(B(3/2,2)) = \mu((-1/2,7/2)) = \infty.$$

რადგან $0 \in (-1/2,7/2)$.

■

2.8 ჰომოგენური სივრცეები სასრული ზომით

თეორემა 3. *დავუშვათ, რომ (X,ρ,μ) ჰომოგენური ტიპის სივრცეა არა ტრივიალური ზომით. ე.ი $\mu \neq 0,\infty$, მაშინ შემდეგი წინადადებები ექვივალენტურია:*

1. $\mu(X) < \infty$;
2. $X \subseteq B(x,r)$ *ზოგიერთი* $x \in X$ *და* $r > 0$.

შედეგი 1. ***(სივრცეები ექვივალენტური მეტრიკით)***

დავუშვათ, რომ (X,ρ,μ) ჰომოგენური ტიპის სივრცეა და ვთქვათ ρ ექვივალენტურია ρ' კვაზი-მეტრიკის. ე.ი ყოველი $x,y \in X$, არსებობს $C > 1$ მუდმივასათვის:

$$\frac{1}{C} \cdot \rho\prime(x,y) \leq \rho(x,y) \leq C \cdot \rho\prime(x,y).$$

მაშინ (X,ρ',μ) ასევე ჰომოგენური ტიპის სივრცეა გაორმაგების მუდმივათი $k_1' \le k_1^{1+\log_2([2C^2])}$. უფრო მეტიც, არსებობს მუდმივა $A \ge 1$ ისეთი, რომ

$$\frac{1}{A}\cdot\mu(B'(x,r)) \le \mu(B(x,r)) \le A\cdot\mu(B'(x,r)), \quad (*)$$

სადაც B არის ღია ბირთვი ρ მეტრიკის მიმართ, ხოლო B' ღია ბირთვი ρ' მეტრიკის მიმართ.

დამტკიცება.

პირველ რიგში შევნიშნოთ, რომ ნებისმიერი $x,y \in X$ და $r>0$, თუ $\rho(x,y)<r$, მაშინ $\rho'(x,y)<Cr$. ამგვარად $B(x,r)\subset B'(x,Cr)$. ანალოგიურად $B'(x,r)\subseteq B(x,Cr)$. კერძოდ, ρ და ρ' კვაზი-მეტრიკებით მიღებული ტოპოლოგიები ერთი და იგივეა. ვთქვათ $x\in X$ და $r>0$. თუ გამოვიყენებთ ლემას 1-ს, მაშინ გვექნება შემდეგი:

$$\mu(B'(x,2r)) \le \mu(B(x,2Cr)) \le k_1^{1+log_2([2C^2])}\cdot\mu(B(x,r/C)) \le k_1^{1+log_2([2C^2])}\cdot\mu(B'(x,r)).$$

ეს გვიჩვენებს, რომ k_1', შეგვიძლია გამოვიყენოთ როგორც გაორმაგების მუდმივა (X,ρ',μ) სივრცისათვის. აგრეთვე გვაქვს შემდეგი უტოლობები:

$$\mu(B'(x,r)) \le \mu(B(x,Cr)) \le k_1^{log_2([C])}\cdot\mu(B(x,r))$$

და

$$mu(B(x,r)) \le \ mu(B'(x,Cr)) \le (k_1')^{log_2([C])}\cdot\mu(B'(x,r))$$

ვინაიდან $k_1' > k_1$, საკმარისია $(*)$-ში A-მუდმივად ავიღოთ რიცხვი $A := (k_1')^{log_2([C])}$.

■

თეორემა 4. *დავუშვათ (X,ρ) კვაზი-მეტრიკული სივრცეა, კვაზი-სამკუთხედის უტოლობის k_0 მუდმივათი. მაშინ შემდეგი წინადადებები ექვივალენტურია:*

1. *ρ კვაზი-მეტრიკას გააჩნია გეომეტრიული გაორმაგების თვისება γ_0 მუდმივით.*
2. *არსებობს მუდმივა $\gamma_1\in\mathbb{N}$ ისეთი, რომ ნებისმიერი ბირთვი $B(x,r)$ შეიძლება შეიცავდეს არაუმეტეს $\gamma_1\in\mathbb{N}$ რაოდენობის $r/2$ გაფანტვის წერტილებს.*

დამტკიცება.

დავამტკიცოთ, რომ $(2)\Longrightarrow(1)$.

დავუშვათ $B := B(x,r)$ რაიმე ბირთვია და ვთქვათ $\{x_1,\ldots,x_N\}\subseteq B$ წარმოადგენს $r/2$ გაფანტვის წერტილების სიმრავლეს. ე.ი ყოველი $y\in B(x,r)$-სთვის, $\rho(y,x_i)<r/2$ ერთი x_i წერტილისთვის მაინც. შევნიშნოთ, რომ $N\le\gamma_1$. მაშინ სიმრავლე $\{B(x_i,r/2)\}_{i=1}^N$ წარმოადგენს $B(x,r)$ ბირთვის დაფარვას, არაუმეტეს $\gamma_0 := \gamma_1$ ელემენტებით.

დავამტკიცოთ, რომ $(1) \Longrightarrow (2)$.

დავუშვათ საწინააღმდეგო, ვთქვათ წინადადება მცდარია. ვიგულისხმოთ, რომ ρ აქვს გაორმაგების თვისება, მაგრამ გაფანტვის წერტილების რაოდენობა არ არის შემოსაზღვრული. მაშინ ნებისმიერი $C \in \mathbb{N}$ შეგვიძლია მოვძებნოთ ბირთვი $B(x,r)$, რომელიც შეიცავს არანაკლებ C რაოდენობის $r/2$ გაფანტვის წერტილს.

დავაფიქსიროთ $C > \gamma_0^a$, სადაც $a \geq 2$ არის მთელი რიცხვი, რომელიც შემდგომში განისაზღვრება. მოიძებნება ბირთვი $B_1 := B(x,r)$, რომელიც შეიცავსC რაოდენობის $r/2$ გაფანტვის წერტილებს, აღვნიშნოთ ეს წერტილები შემდეგნაირად $\{x_i\}_{i=1}^{C}$.

ვინაიდან ρ კვაზი-მეტრიკაა გეომეტრიულად გაორმაგების თვისებით, ჩვენ შეგვიძლია ვიპოვოთ ბირთვები $r/2$ რადიუსით და ცენტრით $\{y_{n,1}\}_{n=1}^{\gamma_0}$ ისეთი, რომ

$$B_1 \subseteq \bigcup_{n=1}^{\gamma_0} B(y_{n,1}, r/2),$$

ანუ აგებული ბირთვების გაერთიანება ფარავს B_1 ბირთვს.

ანალოგიური სქემით შეგვიძლია ვიპოვოთ B_2 ბირთვი და $\{y_{n,2}\}_{n=1}^{\gamma_0}$ წერტილები ისეთი, რომ

$$B_2 \subseteq \bigcup_{n=1}^{\gamma_0} B(y_{n,2}, r/4).$$

თუ ამ პროცესს გავაგრძელებთ არაუმეტეს a ბიჯის შემდეგ ვიპოვით B_a ბირთვს, რადიუსით $r \cdot 2^{-a}$, რომელიც შეიცავს ზუსტად ორ x_i წერტილს.

ავღნიშნოთ ეს ორი წერტილი x_1 და x_2, ხოლო B_a-ს ცენტრი y-ით. მაშინ,

$$\rho(x_1, y) < r \cdot 2^{-a} \quad \text{და} \quad \rho(x_2, y) < r \cdot 2^{-a}.$$

გარდა ამისა,

$$\frac{r}{2} < \rho(x_1, x_2) \leq k_0(\rho(x_1, y) + \rho(x_2, y)) < k_0 r \cdot 2^{-a+1}.$$

საიდანაც გვექნება

$$2^{a-2} < k_0.$$

ამრიგად, ჩვენ შეგვიძლია ავირჩიოთ a საკმარისად დიდი, რომლისთვისაც შესრულდება უკანასკნელი უტოლობა. რაც ნიშნავს, რომ $C \leq \gamma_1 := \gamma_0^a$. ■

შედეგი 2. *ვთქვათ (X, ρ) კვაზი-მეტრიკული სივრცეა, კვაზი სამკუთხედის მუდმივათი k_0. ასევე დავუშვათ, რომ X გეომეტრიულად ორმაგია γ_0 გაორმაგების მუდმივით. მაშინ რადიუსების ნებისმიერი წყვილისთვის, r_1 და r_2, არსებობს ნატურალური რიცხვი N, რომელიც დამოკიდებულია მხოლოდ γ_0-ზე და r_1/r_2 თანაფარდობაზე, ისე რომ ნებისმიერი ბირთვი $B(x, r_1)$ შეიცავს მაქსიმუმ N რაოდენობა r_2 გაფანტვის წერტილებს.*

3 წონიანი სივრცეები

3.1 ზოგიერთი ლემა წონებთან დაკავშირებით

ვთქვათ X კვაზი-მეტრიკული სივრცეა, რომელზედაც განსაზღვრულია μ ზომა. თუ v ზომა არის აბსოლუტურად უწყვეტი μ-ის მიმართ და არსებობს არაუარყოფითი ლოკალურად ინტეგრირებადი ფუნქცია ω ისეთი, რომ $dv(x) = \omega(x)d\mu(x)$, მაშინ ω-ს ეწოდება წონა.

ამ თავში ჩვენ ძირითადად განვიხილავთ v-სა და μ ზომებს შორის სხვადასხვა კავშირებს, ω წონაზე სხვადასხვა პირობებსა და ჰარდი-ლიტლვუდის მაქსიმალური ოპერატორის უწყვეტობის საკითხებს. პირობები, რომლებიც მხედველობაში გვაქვს წონებისთვის, წარმოადგენს მაკენჰაუპტის კარგად ცნობილ A_p პირობას, ჰელდერის შებრუნებულ პირობას, RH_r და D_b გაორმაგების პირობას. გარდა ტრივიალური შედეგებისა, ეს პირობები ერთმანეთისგან დამოუკიდებელია და, შესაბამისად, მათი დეტალური შესწავლა გამართლებულია.

ამ თავში წარმოდგენილი შედეგების უმეტესობა კარგად არის ცნობილი $X = R^n$ და μ ლებეგის ზომის შემთხვევაში.

დავუშვათ, რომ X კვაზი-მეტრიკული სივრცე μ ზომით არის ჰომოგენური ტიპის სივრცე. რომელიც, უნდა აკმაყოფილებს შემდეგ თვისებებს:

1. $d(x, x) = 0\ \forall x \in X$;

2. $d(x, y) > 0\ \forall x \neq y \in X$;

3. $\exists c_0 \geq 1$ ისეთი, რომ $d(x, y) \leq c_0 d(y, x) \forall x, y \in X$;

4. $\exists c_1 > 0$ ისეთი, რომ $d(x, y) \leq c_1(d(x, z) + d(y, z)) \forall x, y, z \in X$;

5. $x \in X$ წერტილის ნებისმიერი N მიდამოსათვის, არსებობს $r >$ და ბირთვი $B(x, r) = \{y \in X : d(x, y) < r\}$ რომელიც მოთავსებულია N-ში;

6. $\forall x \in X$ და $r > 0$ ბირთვები $B(x, r)$ ზომადია ;

7. (გაორმაგობის D_b პირობა) არსებობს მუდმივა $k > 0$ და რიცხვი $b > 0$ ისეთი, რომ ყოველი $x \in X$, $t \geq 1$ და $r > 0$ გვაქვს:

$$\mu(B(x, tr)) \leq kt^b \mu(B(x, r))$$

შემდგომში დავწერთ $\mu \in D_b$, რათა აღვნიშნოთ, რომ μ აკმაყოფილებს D_b-ს პირობას.

ლემა 3. *ვთქვათ* $a > 0$. *მაშინ არსებობს მუდმივა* $c_2 = c1^2(1+a) + c_0c_1$ *ისეთი, რომ, თუ* $B(x,r) \cap B(y,r\prime) \neq \emptyset$ *და* $r \leq ar'$, *მაშინ* $B(x,r) \subseteq B(y, c_2r')$.

დამტკიცება.

დავუშვათ $z \in B(x,r)$ და $z_1 \in B(x,r) \cap B(y,r')$. მაშინ,

$$\begin{aligned} d(y,z) &\leq c_1(d(y,x) + d(z,x)) \\ &\leq c_1(c_1d(y,z_1) + c_1d(x,z_1)) + c_0c_1d(x,z) \\ &\leq c_1^2r' + c_1^2r + c_0c_1r \\ &\leq c_1^2r' + c_1^2ar\prime + c_0c_1ar' = c_2r', \end{aligned}$$

რაც ნიშნავს, რომ $z \in B(y, c_2r')$.

■

ლემა 4. *ვთქვათ* F *არის* $B(x,r)$ *ბირთვების ოჯახი შემოსაზღვრული რადიუსებით. არსებობს თვლადი ქვეოჯახი* $B(x_i, r_i)$, *რომელიც შედგება წყვილ-წყვილად თანაუკვეთი ბირთვებისგან ისე, რომ* F *ერთობლიობიდან აღებული ნებისმიერი ბირთვი შედის რომელიღაც* $B(x_i, cr_i)$ *ბირთვში, სადაც* c *აღებულია ლემა 3-დან.*

დამტკიცება. დავუშვათ M იყოს ბირთვების რადიუსების ზუსტი ზედა ზღვარი. თითოეული $n = 0, 1, 2, \ldots$ მნიშვნელობისათვის ჩვენ ინდუქციურად ავაგებთ ბირთვების ოჯახს $B(X_{i,n}, r_{i,n})$ შემდეგი თვისებებით:

1. $B(X_{i,n}, r_{i,n}) \in F$ და $2^{-n-1}M < r_{i,n} \leq 2^{-n}M$.

2. $B(X_{i,m}, r_{i,m})$ წყვილ-წყვილად თანაუკვეთია, როცა $0 \leq m \leq n$.

■

დავუშვათ, რომ $B(x,r) \in F$ თუ $2^{-n-1}M < r \leq 2^{-n}M$, მაშინ $B(x,r)$ კვეთს ერთ-ერთ ბირთვს $B(x_{i,m}, r_{i,m})$ როცა $m \leq n$ ამ შემთხვევაში $r < 2r_{i,m}$ და ლემა 3-ის ძალით
$B(x,r) \subseteq B(x_{i,m}, cr_{i,m})$.

ვთქვათ f ლოკალურად ინტეგრებადი ფუნქციაა. განვსაზღვროთ ჰარდი-ლიტვუდის მაქსიმალურ ოპერატორი $M_\mu f$, f შემდეგნაირად:

$$M_\mu f(x) = sup_{x \in B(y,r)} \frac{1}{\mu(B(y,r))} \int_{B(y,r)} |f| d\mu.$$

საინტერესოა განვსაზღვროთ, თუ როდის არის ჰარდი-ლიტვუდის მაქსიმალური ოპერატორი სუსტი $(1,1)$ ტიპის ან (p,p) ტიპის $L^p(\mu)$ სივრცეზე.

3.2 ჰარდი-ლიტვუდის თეორემა

სამართლიანია შემდეგი თეორემა.

თეორემა 5. ***(ჰარდი ლიტვუდი)***

ჰარდი ლიტვუდის მაქსიმალური ფუნქცია M_μ არის სუსტი ტიპის $(1,1)$ და (p,p) ტიპის, როცა $1 < p \leq \infty$ $L^p(\mu)$-ზე. სახელდობრ სამართლიანია:

$$\nu \{M_\mu f > \lambda\} \leq c_1 \lambda^{-1} ||f||^1_{L^1(\mu)},$$

ყოველი $\lambda > 0$ და

$$||M_\mu f||_{L^p(\nu)} \leq c_p ||f||_{L^p(\mu)}. \quad 1 < p < \infty.$$

დავუშვათ ν არის კიდევ ერთი ზომა განსაზღვრული X-ზე. ჩვენი ინტერესია, შევისწავლოთ, თუ როდის არის ჰარდი-ლიტვუდის მაქსიმალური ოპერატორი M_μ სუსტი $(1,1)$ ტიპის ან (p,p) ტიპის $L^p(\nu)$-ზე. უფრო ზუსტად, ჩვენ ვეძებთ ν ზომაზე პირობებს, რომელიც უზრუნველყოფს შემდეგ უტოლობას:

$$\nu \{M_\mu f > \lambda\} \leq c_p \lambda^{-p} ||f||^p_{L^p(\nu)}, \quad (1)$$

ყოველი $\lambda > 0$ და

$$||M_\mu f||_{L^p(\nu)} \leq c_p ||f||_{L^p(\nu)}. \qquad (2)$$

თუ χ_E აღნიშნავს $E \subseteq B$ მახასიათებელ ფუნქციას, ცხადია მარტივი დასანახია, რომ

$$M_\mu \chi_E(x) \geq \mu(E)/\mu(B) \qquad (3)$$

ყოველი $x \in B$-თვის, და თუ $(1)_p$ უტოლობა სამართლიანია, მაშინ მივიღებთ, რომ:

$$\nu(E)/\nu(B) \geq c_p^{-1} \left(\mu(E)/\mu(B)\right)^p$$

ყველა $E \subseteq B$.

შევნიშნოთ, რომ, თუ $\mu \in D_b$ და ასევე გავითვალისწინებთ ბოლო უტოლობას, მივიღებთ, რომ $\nu \in D_{pb}$. გარდა ამისა, უკანასკნელი უტოლობა ნიშნავს, რომ არსებობს c მუდმივი ისეთი, რომ

$$M_\mu \chi_E(x) \leq c M_\nu \chi_E(x)^{1/p},$$

ყოველი x სთვის X-დან.

უკანასკნელი უტოლობიდან, თუ გავითვალისწინებთ თეორემა 4-ს, დავასკვნით, რომ (3) პირობა ტოლფასია (1) უტოლობის, იმ შემთხვევაში, როცა f მახასიათებელი ფუნქციაა. მაშასადამე სამართლიანია შემდეგი თეორემა.

თეორემა 6. *იმისათვის, რომ M_μ ოპერატორისთვის სამართლიანი იყოს შეზღუდული (p,p) ტიპის უტოლობა აუცილებელი და საკმარისია შესრულდეს (3) პირობა.*

(3)-პირობის კიდევ ერთი საინტერესო შედეგია შემდეგი ლემა:

ლემა 5. *თუ სრულდება (3), მაშინ ν არის μ ზომის მიმართ აბსოლუტურად უწყვეტი.*

დავუშვათ, $p>1$. ვთქვათ B რაიმე ფიქსირებული ბირთვია და χ_E აღნიშნავს $\{x \in B : \omega(x) > \varepsilon\}$ სიმრავლის მახასიათებელ ფუნქციას. მაშინ $f=\omega^{\frac{-1}{p-1}}\chi_B\chi_\varepsilon$ ფუნქციისათვის გვაქვს შემდეგი გამოსახულება

$$M_\mu f(x) \geq \frac{1}{\mu(B)}\int_B \chi_\varepsilon \omega^{-1/(p-1)}d\mu,$$

ყოველი $x \in B$-დან. და $(1)_p$-დან გამომდინარეობს, რომ

$$\nu(B)(\frac{1}{\mu(B)}\int_B \chi_\varepsilon \omega^{-1/(p-1)}d\mu)^p \leq c^p\int_B \chi_\varepsilon \omega^{-p/(p-1)}d\nu = c_p\int_B \chi_\varepsilon\omega^{-1/(p-1)}d\mu.$$

თუ გადავალთ ზღვარზე, როცა ε მიდის 0-კენ მივიღებთ, ეგრეთ წოდებულ $A_p(\mu)$ პირობას ω წონისათვის,

$$\frac{1}{\mu(B)}\int_B \omega d\mu(\frac{1}{\mu(B)}\int_B \omega^{-1/(p-1)}d\mu)^{p-1} \leq c,$$

ყოველი B ბირთვისათვის.

ამ ფაქტს მოკლედ ასე აღვნიშნავთ $\omega \in A_p(\mu)$. მეორეს მხრივ, ჰელდერის უტოლობის ძალით გვექნება

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\mu(B)}\int_B |f|d\mu \\
&\leq \left(\frac{1}{\mu(B)}\int_B |f|^p\omega d\mu\right)^{1/p}\left(\frac{1}{\mu(B)}\int_B \omega^{-1/(p-1)}d\mu\right)^{(p-1)/p} \\
&= \left(\frac{1}{\nu(B)}\int_B |f|^p d\nu\right)^{1/p}\left(\frac{1}{\mu(B)}\int_B \omega d\mu\left(\frac{1}{\mu(B)}\int_B \omega^{-1/(p-1)}d\mu\right)^{p-1}\right)^{1/p}.
\end{aligned}$$

საიდანაც, თუ $\omega \in A_p(\mu)$, მივიღებთ, რომ $M_\mu f(x) \leq cM_\nu f(x)^{1/p}$.

თუ გამოვიყენებთ თეორემა 4-ს დავასკვნით, რომ $\omega \in A_p(\mu)$ პირობიდან გამომდინარეობს სუსტი (p,p) ტიპის უტოლობა (1).

განვიხილოთ $p=1$ შემთხვევა. დავუშვათ (1) სამართლიანია და $f=\chi_B(1-\chi_\varepsilon)/\varepsilon$.

მაშინ, თუ $E_\varepsilon = \{x \in B : \omega(x) \leq \varepsilon\}$, გვექნება $M_\mu f(x) \geq \mu(E_\varepsilon)/\left(\varepsilon\mu(B)\right)$, ნებისმიერი $x \in B$ და $||f||_{L^1(\nu)} \leq \mu(E_\varepsilon)$. საიდანაც დავასკვნით, რომ:

$$\mu(E_\varepsilon)(\nu(B)/\varepsilon\mu(B)) \leq c\mu(E_\varepsilon).$$

როგორც ზემოთ ამ შემთხვევაშიც მივიღებთ შემდეგ უტოლობას:

$$(ess\inf_{x\in B}\omega(x))^{-1}\frac{1}{\mu(B)}\int_B \omega d\mu \leq c, \forall B.$$

ამ უკანასკნელ პირობას, შემდგომში აღვნიშვათ $\omega \in A_1(\mu)$ სახით. შევნიშნოთ, რომ თუ ω არა უარყოფითი ზომადი ფუნციაა და $d\nu = \omega d\nu$, მაშინ ადგილი აქვს უტოლობას

$$\frac{1}{\mu(B)} \int_B |f| d\mu \leq \left(\frac{1}{\nu(B)} \int_B |f| d\nu \right) (ess \inf_{x \in B} \omega(x))^{-1} \left(\frac{1}{\mu(B)} \int_B \omega d\mu \right),$$

და შესაბამისად, თუ $\omega \in A_1(\mu)$, მივიღებთ, რომ $M_\mu f(x) \leq c M_\nu f(x)$ ყოველი x წერტილისათვის. საბოლოოდ, თეორემა (4)-ის თანახმად დავასკვნით, რომ M_μ სუსტი $(1,1)$ ტიპის არის $L^1(\nu)$-ზე, თუ $\omega \in A_1(\mu)$.

თეორემა 7. *იმისათვის რომ M_μ იყოს სუსტი $(1,1)$ ტიპის აუცილებელია და საკმარისი, რომ $d\nu = \omega(x) d\mu$ და $\omega \in A_1(\mu)$.*

მოვიყვანით $A_p(\mu)$ წონების მნიშვნელოვანი თვისებები.

ლემა 6. *1. თუ $p > 1$ და $\omega \in A_p(\mu)$ მაშინ არსებობს $\varepsilon > 0$ ისეთი, რომ $\omega \in A_{p-\varepsilon}(\mu)$.*

2. თუ $\omega \in A_p(x)$ მაშინ, $\omega \in A_q(x)$ ყოველი $p > q$.

შევნიშნოთ, რომ ლემა 8-ის მეორე პუნქტი ელემენტარულად გამომდინარეობს ჰელდერის უტოლობიდან.

თეორემა 8. *გვაქვს შემდეგი თეორემა*

1. *ვთქვათ $p > 1$. იმისათვის, რომ შესრულდეს უტოლობა $||M_\mu f||_{L^p(\nu)} \leq c_p ||f||_{L^p(\nu)}$ ნებისმიერი $f \in L^p(\nu)$ ფუნქციისათვის აუცილებელია და საკმარისია, რომ $d\nu = \omega(x) d\mu$ და $\omega \in A_p(\mu)$.*

2. *იმისათვის, რომ M_μ ოპერატოს ჰქონდეს სუსტი (p,p) ტიპი აუცილებელია და საკმარისია, რომ $d\nu = \omega(x) d\mu$ და $\omega \in A_1(\mu)$.*

შევნიშნოთ, რომ ჰელდერის უტოლობით გვაქვს $M_\mu f(x) \leq c M_\nu f(x)^{1/(p-\epsilon)}$. თუ $\omega \in A_p(\mu)$ მაშინ ლემა 8-ის ძალით $\omega \in A_{p-\varepsilon}(\mu)$ და თეორემა 4-იზ გამოყენებით მივიღებთ ზემოთ მოყვანილი დებულების სამართლიანობას.

A_p პირობა მჭიდრო კავშირშია ჰელდერის შებრუნებულ უტოლობასთან.

ვიტყვით, რომ ω წონისათვის სრულდება ჰელდერის შებრუნებული პირობა, თუ რაიმე აბსოლიტური $c > 0$ მუდმივისათვის

$$\left(\frac{1}{\mu(B)} \int_B \omega^r d\mu \right)^{1/r} \leq c \left(\frac{1}{\mu(B)} \int_B \omega d\mu \right), \quad \forall B.$$

ამ დროს ვწერთ, რომ $\omega \in RH_r(\mu)$. შევნიშნოთ, რომ $\omega \in RH_r(\mu)$ და $(1/\omega \in A_p(\mu))$ ერთმანეთის ექვივალენტურია, როცა $(r-1)(p-1) = 1$. ახლა განვიხილოთ შემთხვევა, როცა $p = \infty$

და განვმარტოთ $A_\infty(\mu)$ პირობა. ყოველი ფიქსირებული B ბირთვისათვის განვსაზღვროთ, ω ფუნქიის $\omega_{B,\mu}$ მედიანა $\omega_{B,\mu}$ μ ზომის მიმართ შემდეგი სახით

$$\omega_{B,\mu} = (t_1, t_2)^{1/2},$$

სადაც

$$t_1 = \sup t > 0 : \mu(x \in B : \omega(x) < t) \leq \mu(B)/2$$

და

$$t_2 = \inf t > 0 : \mu(x \in B : \omega(x) > t) \leq \mu(B)/2.$$

შევნიშნოთ, რომ ყოველი ნამდვილი a რიცხვისთვის გვაქვს

$$(\omega^a)_{B,\mu} = (\omega_{B,\mu})^a, \quad \text{და} \quad \int_B \omega^a d\mu/\mu(B) \geq (\omega_{B,\mu})^a/2.$$

ვიტყვით, რომ $\omega \in A_\infty(\mu)$, თუ

$$\frac{1}{\mu(B)} \int_B \omega d\mu \leq c\omega_{B.\mu}, \forall B.$$

ზემოაღნიშნულიდან გამომდინარე, თუ $0 < a \leq 1$ და $\omega \in A_\infty(\mu)$, მაშინ

$$\frac{1}{\mu(B)} \int_B \omega^a d\mu \sim (\omega_{B,\mu})^a, \forall B.$$

$A_p(\mu)$ წონები შეგვიძლია დავახასიათოდ $A_\infty(\mu)$ პირობების გამოყენებით.

ლემა 7. *სამართლიანია შემდეგი დებულება.*

დავუშვათ $1 < p < \infty$. $\omega \in A_p(\mu)$ *მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა* $\omega \in A_\infty(\mu)$ *და* $\omega^{-1/(p-1)} \in A_\infty(\mu)$.

დამტკიცება.

აუცილებლობა გამომდინარეობს შემდეგი უტოლობებიდან

$$\frac{1}{\mu(B)} \int_B \omega d\mu \geq \frac{1}{2}\omega_{B,\mu} = \frac{1}{2}((\omega^{-1(p-1)})_{B,\mu})^{-1(p-1)}$$

და

$$\frac{1}{\mu(B)} \int_B \omega^{-1(p-1)} d\mu \geq \frac{1}{2}(\omega_{B,\mu})^{-1(p-1)}.$$

რაც შეეხება საკმარისობას, აღნიშნული ფაქტი მარტივად მიიღება, თუ ზემოთ მოცემული ორივე უტოლობის მარჯვენა მხარეს შევცვლით მუდმივით.

■

ლემა 8. *დავუშვათ* $1 < p, r < \infty$. $\omega \in A_p(\mu) \cap RH_r(\mu)$ *მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა* $\omega^r \in A_\infty(\mu)$ და $\omega^{-1/(p-1)} \in A_\infty(\mu)$.

დამტკიცება.

აუცილებლობა გამომდინარეობს უტოლობიდან

$$\frac{1}{\mu(B)}\int_B \omega^r d\mu \le c\bigg(\frac{1}{\mu(B)}\int_B \omega d\mu\bigg)^r \le c(\omega_{B,r})^r = c(\omega^r)_{B,\mu}.$$

საკმარისობა კი გამომდინარეობს

$$\frac{1}{\mu(B)}\int_B \omega d\mu \le \bigg(\frac{1}{\mu(B)}\int_B \omega d\mu\bigg)^{1/r} \le c(\omega^r)^{1/r}_{B,\mu} = c(\omega)_{B,\mu}$$

და

$$\frac{1}{\mu(B)}\int_B \omega^r d\mu \le c(\omega_{B,\mu})^r \le c\bigg(2\frac{1}{\mu(B)}\int_B \omega\bigg)^r$$

უტოლობებიდან.

ასევე შევნიშნოთ, რომ ლემა 10 ექვივალენტურია $\omega^a \in A_\infty(\mu)$ გამოსახულების ყოველი a-სთვის, სადაც $-1(p-1) \le a \le r$. ■

კარგად არის ცნობილი, რომ ქვემოთ ჩამოთვლილი შემდეგი რვა პირობა ერთმანეთის ექვივალენტურია:

1. არსებობს $0 < \epsilon, \delta < 1$ ისეთი, რომ ყოველი B ბირთვისთვის და $E \subseteq B$ ზომადი სიმრავლისათვის გვაქვს $\nu(E) < (1-\delta)\nu(B)$, როცა $\mu(E) < \epsilon\mu(B)$.

2. არსებობს $c > 0$ მუდმივები და $p \ge 1$ ისეთი, რომ $\nu(E)/\nu(B) \le c(\mu(E)/\mu(B))^{1/p}$ ყოველი B ბირთვისთვის და $E \subseteq B$ ზომადი სიმრავლისთვის.

3. არსებობს $r > 1$ ისეთი, რომ $d\nu = \omega(x)d\mu$ და ω წონა, აკმაყოფილებს პირობას $RH_r(\mu)$.

4. $d\nu = \omega(x)d\mu$ ზომისათვის არსებობს c მუდმივა ისეთი, რომ $\omega_{B,\mu} \le c\nu(B)/\mu(B)$, ყოველი B ბირთვისათვის.

5. $d\nu = \omega(x)d\mu$ ზომისათვის არსებობს c მუდმივა ისეთი, რომ $\omega_{B,\nu} \le c\omega_{B,\mu}$, ყოველი B ბირთვისათვის.

6. $d\nu = \omega(x)d\mu$ ზომისათვის არსებობს მუდმივა c და $p \ge 1$ რიცხვი ისეთი, რომ $\nu(E)/\nu(B) \ge c \cdot (\mu(E)/\mu(B))^p$, ყოველი B ბირთვისათვის და ზომადი $E \subseteq B$ სიმრავლისათვის.

7. $d\nu = \omega(x)d\mu$ ზომისათვის არსებობს $p > 1$-სთვის, რომლისთვისაც $\omega \in A_p(\mu)$.

8. $d\nu = \omega(x)d\mu$ ზომისათვის $\nu(B)/\mu(B) \leq c\omega_{B,\mu}$, ყოველი B ბირთვისათვის.

4 რუბიო დე ფრანსიას ექსტრაპოლაციის თეორემები ცვლადმაჩვენებლიან ლებეგის სივრცეებში

4.1 ზოგიერთი განმარტება და ცნობილი დებულება

ვთქვათ X რაიმე ჰომოგენური ტიპის სივრცეა, ხოლო $p : X \longrightarrow [1, \infty)$, რაიმე ზომადი ფუნქციაა. $L^{p(\cdot)}(X)$-ით აღვნიშნოთ X-სიმრავლეზე განსაზღვრული ყველა ისეთი μ ზომადი f ფუნციების ერთობლიობა, რომელთათვისაც არსებობს $\lambda > 0$ რიცხვი ისეთი, რომ

$$\int_X \left(\frac{|f(x)|}{\lambda}\right)^{p(x)} d\mu < \infty.$$

კარგადაა ცნობილი, რომ მოცემული სიმრავლე წარმოადგენს ბანახის სივრცეს შემდეგი ნორმის მიმართ

$$\|f\|_{p(\cdot)} = \inf\left\{\lambda > 0 : \int_X \left(\frac{|f(x)|}{\lambda}\right)^{p(x)} d\mu \leq 1\right\}.$$

უკანასკნელ პერიოდში აღნიშნულ სივრცეებს ფართოდ გამოიყენებენ ვარიაციული აღრიცხვის კერძოწარმოებულიანი დიფერენციალური განტოლებების მათემატიკური ფიზიკის პრობლემატიკის კვლევის დროს.

აღვნიშნოთ, რომ $L^{p(\cdot)}(X)$ სივრცის შეუღლებული სივრცე არის $L^{p'(\cdot)}(X)$ სივრცე, სადაც ექსპონენტი $p'(\cdot)$ განსაზღვრულია შემდეგნაირად,$1/p(x) + 1/p;(x) = 1$, ვიგულისხმოთ, რომ $(1/\infty = 0.)$

$\mathcal{P}^0$-ით აღვნიშნოთ ყველა $p : X \to (0, \infty)$ ფუნქციების ერთობლიობა, რომელთათვისაც

$$p^- = \operatorname*{ess\,inf}_{x\in X} p(x) > 0, \quad p^+ = \operatorname*{ess\,sup}_{x\in X} p(x) < \infty.$$

მოცემული $p(\cdot) \in \mathcal{P}^0$-ით ჩვენ როგორც ზემოთ ანალოგიურად შეგვიძლია განვსაზღვროთ ფუნქციათა $L^{p(\cdot)}(X)$ სიმრავლე. ეს განსაზღვრება ექვივალენტურია იმისა, რომ ფუნქციების აღნიშნული სიმრავლე წარმოადგენს ყველა იმ f ფუნქციათა ერთობლიობას, რომელთათვისაც

$$|f|_{p0} \in L^{q(\cdot)}(X),$$

, სადაც $0 < p_0 < p^-$ და $q(\cdot) = p(\cdot)/p_0$.

$L^{p(\cdot)}(X)$ სიმრავლეზე შეგვიძლია განვსაზღვროთ კვაზი-მეტრიკული ნორმა შემდეგნაირად

$$\|f\|_{p(\cdot)} = \||f|^{p_0}\|_{q(\cdot)}^{1/p_0}.$$

ვთქვათ ω არის არაუარყოფითი, ლოკალურად ინტეგრებადი ფუნქცია(წონა). ქვემოთ $L^p_{(\omega)}(X)$-თი აღვნიშნავთ წონიანი ლებეგის სივრცეს ნორმით

$$\|f\|_{p,\omega} := \left(\int_X |f(x)|^p \omega(x) d\mu\right)^{\frac{1}{p}}.$$

წონების შესწავლის მთავარი ნაწილია A_p წონები. ვიტყვით, რომ $\omega \in A_p$ თუ არსებობს მუდმივა C ისეთ, რომ ყოველი $Q \subset X$ ბირთვისათვის,

$$\frac{1}{|Q|}\int_Q \omega(x)d\mu(x)\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q \omega(x)^{1-p'}d\mu(x)\right)^{p-1} \le C < \infty,$$

თუ $\quad 1 < p < \infty$ და

$$\frac{1}{|Q|}\int_Q \omega(x)d\mu \le C \cdot \operatorname{ess\,inf}_Q \omega(x), \quad \text{თუ} \quad p = 1.$$

შემდგომში $\mathcal{F}$-ით აღვნიშნავთ (f,g) არაუარყოფითი, ზომადი ფუნქციების ოჯახს X-ზე.

შემდგომში ვიგულისხმებთ, რომ უტოლობა

$$\int_X f(x)^{p_0} w(x)d\mu \le C\int_X g(x)^{p_0}\omega(x)d\mu$$

სამართლიანია ნებისმიერი $(f,g) \in \mathcal{F}$-სთვის და $w \in A_q$-სათვის (რაიმე $q, 1 \le q < \infty$), თუ იგი სამართლიანია $\mathcal{F}$ ოჯახიდან აღებული ნებისმიერი წყვილისათვის, ამასთან მარცხენა მხარე არის სასრული და მუდმივა C დამოკიდებულია მხოლოდ p_0-ზე და ω წონის A_q-ს მუდმივაზე.

დავუშვათ $B(x,r)$ აღნიშნავს ღია ბირთვს X-ში, რადიუსით r და ცენტრით x. ჰარდი-ლიტვუდის მაქსიმალური ოპერატორი M

$$Mf(x) = \sup_{r>0}\frac{1}{\mu(|B(x,r)|)}\int_{B(x,r)}|f(y)|d\mu.$$

სამართლიანია რუბიო დე ფრანსისას ტიპის თეორემები ცვლადმაჩვენებლიანი ლებეგის სივრცეებისათვის ჰომოგენური ტიპის სივრცის სიმრავლეებისათვის. სახელდობრ.

შემდგომში $\mathcal{B}(X)$-ით აღვნიშნავთ ყველა იმ $p(x)$ ექსპონენტების ერთობლიობას, რომელთათვისაც $L^{p(x)}(X)$ სივრცეში ჰარდი-ლიტვუდის მაქსიმალური ოპერატორი შემოსაზღვრულია.

თეორემა 9. *ვთქვათ მოცემულია ფუნქციათა $\mathcal{F}$ ოჯახი. დავუშვათ, რომ რაიმე p_0-სთვის, სადაც $0 < p_0 < \infty$, და ყოველი $w \in A_1$ წონისათვის:*

$$\int_X f(x)^{p_0}\omega(x)d\mu \le C_0\int_X g(x)^{p_0}\omega(x)d\mu, \quad (f,g) \in \mathcal{F},$$

სადაც მუდმივა C_0 დამოკიდებულია მხოლოდ p_0-ზე დაω წონის A_1 მუდმივაზე. ვთქვათ $p(\cdot) \in \mathcal{P}^0$ ისეთია, რომ $p_0 < p_-$ და $(p(\cdot)/p_0)' \in \mathcal{B}(X)$. მაშინ, ყოველი $(f,g) \in \mathcal{F}$ სადაც $f \in L^{p(\cdot)}(X)$ გვაქვს

$$\|f\|_{p(\cdot)} \le C\|g\|_{p(\cdot)},$$

სადაც მუდმივა C არაა დამოკიდებულია $(f,g) \in \mathcal{F}$ წყვილზე.

თეორემა 10. *დავუშვათ, გვაქვს ოჯახი $\mathcal{F}$. დავუშვათ რომ ზოგიერთი p_0 და q_0-სთვის, სადაც $0 < p_0 \le q_0 < \infty$ და ყოველი $\omega \in A_1$-სთვის, გვაქვს გამოსახულება*

$$\left(\int_X f(x)^{q_0}\omega(x)d\mu\right)^{1/q_0} \le C_0\left(\int_X g(x)^{p_0}\omega(x)^{p_0/q_0}d\mu\right)^{1/p_0}, \quad (f,g) \in \mathcal{F}.$$

ვთქვათ $p(\cdot) \in \mathcal{P}^0$ ისეთი, რომ $p_0 < p_- \le p_+ < \frac{p_0 q_0}{q_0 - p_0}$, განვსაზღვროთ $q(\cdot)$ ფუნქცია შემდეგნაირად

$$\frac{1}{p(x)} - \frac{1}{q(x)} = \frac{1}{p_0} - \frac{1}{q_0}, \quad x \in X.$$

თუ $(q(\cdot)/q_0)' \in \mathcal{B}(X)$, მაშინ ყოველი $(f,g) \in \mathcal{F}$ ისეთი, რომ $f \in L^{p(\cdot)}(X)$,

$$\|f\|_{q(\cdot)} \le C\|g\|_{p(\cdot)}.$$

წინამდებარე ნაშრომში დავამტკიცებთ შემდეგ თეორემებს.

თეორემა 11. *ვთქვათ $\mathcal{F}$ ფუნქციათა რაიმე ოჯახია. დავუშვათ, რომ რიამე p_0 δ რაიმე რიცხვებისათვის, სადაც $0 < p_0 < \infty, 0 < \delta < 1$ და ყოველი $\omega \in A_1$-სთვის*

$$\int_X f(x)^{p_0}\omega^\delta(x)d\mu \le C_0 \int_X g(x)^{p_0}\omega^\delta(x)d\mu, \quad (f,g) \in \mathcal{F}.$$

დავუშვათ, $\delta\,(p(\cdot)/p_0)' \in \mathcal{B}(X)$ სადაც $p_0 < p^- \le p^+ < \frac{p_0}{1-\delta}$. მაშინ, ყოველი $(f,g) \in \mathcal{F}$ წყვილებისათვის სადაც $f \in L^{p(\cdot)}(X)$ გვაქვს

$$\|f\|_{p(\cdot)} \le C\|g\|_{p(\cdot)}.$$

თეორემა 12. *დავუშვათ $\mathcal{F}$ ფუნქციათა რაიმე ოჯახია. ვთქვათ რაიმე p_0, q_0 და δ-სთვის, სადაც $0 < p_0 \le q_0 < \infty$, ხოლო $0 < \delta < 1$ და ყოველი $\omega \in A_1$ წონისათვის*

$$\left(\int_X f(x)^{q_0} w(x)^\delta d\mu\right)^{1/q_0} \le$$
$$\le C_0 \left(\int_X g(x)^{p_0} w(x)^{\delta p_0/q_0} d\mu\right)^{1/p_0}, \quad (f,g) \in \mathcal{F}.$$

ვთქვათ $p(\cdot) \in \mathcal{P}^0$ ისეთი, რომ $p_0 < p^- \le p_+ < \frac{p_0 q_0}{q_0 - \delta p_0}$, განვსაზღვროთ ფუნქცია $q(\cdot)$ შემდეგნაირად

$$\frac{1}{p(x)} - \frac{1}{q(x)} = \frac{1}{p_0} - \frac{1}{q_0}, x \in X.$$

თუ $\delta\,(q(\cdot)/q_0)' \in \mathcal{B}(X)$, მაშინ ყოველი $(f,g) \in \mathcal{F}$ ისე, რომ $f \in L^{p(\cdot)}(X)$ გვაქვს

$$\|f\|_{q(\cdot)} \le C\|g\|_{p(\cdot)}.$$

შევნიშნოთ, რომ თეორემა 11 არის თეორემა 12-ის კონკრეტული შემთხვევა. კერძოდ როცა $p_0 = q_0$. მოცემული თეორემა $p_0 = 2$ შემთხვევაში დამტკიცებულია Duoandikoetxea-ს მიერ, სახელდობრ სამართლიანია შემდეგი თეორემა.

თეორემა 13. *ვთქვათ δ აკმაყოფილებს $0 < \delta < 1$ პრიობას. დავუშვათ, რომ ყოველი $\omega \in A_{p_0}$ სადაც $1 < p_0 < \infty$ გვაქვს*

$$\int_X f(x)^{p_0}\omega^\delta(x)d\mu \le C \int_X g(x)^{p_0}\omega^\delta(x)d\mu, \quad (f,g) \in \mathcal{F}.$$

მაშინ ყოველი p რიცხვისათვის,სადაც $\frac{p_0}{1+\delta(p_0-1)} < p < \frac{p_0}{1-\delta}$ და ყოველი $\omega^{\frac{p_0}{p_0-p(1-\delta)}} \in A_{\frac{p_0 p\delta}{p_0-p(1-\delta)}}$ წონისათვის

$$\int_X f(x)^p \omega(x) d\mu \leq C \int_X g(x)^p \omega(x) d\mu.$$

თუ გამოვიყენოთ ფაქტს, $A_1 \subset A_p$ მაშინ თეორემა 8 და თეორემა 10-დან გვაქვს შემდეგ შედეგს:

შედეგი 3. *ვთქვათ მოცემულია δ, სადაც $0 < \delta < 1$, დავუშვათ, რომ ყოველი $\omega \in A_{p_0}$, სადაც $1 < p_0 < \infty$ გვაქვს*

$$\int_X f(x)^{p_0} \omega^{\delta}(x) d\mu \leq C_0 \int_X g(x)^{p_0} \omega^{\delta}(x) d\mu, \quad (f, g) \in \mathcal{F}.$$

დავუშვათ $\delta_* \left(p(\cdot)/p_*\right)' \in \mathcal{B}\left(X\right)$ სადაც $\delta_* = \frac{p_0-p_*(1-\delta)}{p_0}$ და

$$\frac{p_0}{1+\delta\left(p_0-1\right)} < p_* < p^- \leq p^+ < \frac{p_0}{1-\delta}.$$

მაშინ ყოველი $(f, g) \in \mathcal{F}$, სადაც $f \in L^{p(\cdot)}\left(X\right)$ გვაქვს:

$$\|f\|_{p(\cdot)} \leq C\|g\|_{p(\cdot)}..$$

4.2 ძირითადი თეორემის დამტკიცება

პირველ რიგში შევნიშნოთ, რომ თეორემის პირობებიდან მივიღებთ

$$\frac{1}{p^-} - \frac{1}{q^-} = \frac{1}{p^+} - \frac{1}{q^+} = \frac{1}{p_0} - \frac{1}{q_0}.$$

რადგან $p_0 < p^- \leq p^+ < \frac{p_0 q_0}{q_0 - \delta p_0}$, მივიღებთ, რომ $q_0 < q^- \leq q^+ < \frac{q_0}{1-\delta}$. ახლა დავუშვათ, რომ $M = L^{p(\cdot)/p_0}(X)$ და $N = L^{q(\cdot)/q_0}(X)$. ვთქვათ $q^- < q^+$. შეფასება $q^+ < \frac{q_0}{1-\delta}$ შეგვიძლია გადავწეროთ შემდეგი სახით $1 < \frac{\delta q^+}{q^+ - q_0}$. გვექნება

$$1 < \frac{\delta q^+}{q^+ - q_0} \leq \frac{\delta q(x)}{q(x) - q_0} = \delta \left(\frac{q(x)}{q_0} \right)', \quad x \in X.$$

განვსაზღვროთ $\mathcal{M}$ ოპერატორი შემდეგი სახით $\mathcal{M}h(x) = M\left(h^{1/\delta}\right)^{\delta} x()$, სადაც $\mathcal{M}$ არის ჰარდი-ლიტვუდის მაქსიმალური ოპერატორი. შევნიშნოთ, რომ ოპერატორი $\mathcal{M}$ შემოსაზღვრულია N'-ზე. მართლაც:

$$\begin{aligned} \|\mathcal{M}\|_{N'} &= \left\| \left(M\left(h^{1/\delta}\right)\right)^{\delta} \right\|_{N'} = \left\| M\left(h^{1/\delta}\right)\right\|^{\delta}_{\delta(q(\cdot)/q_0)'} \\ &\leq C \left\| h^{1/\delta} \right\|^{\delta}_{\delta(q(\cdot)/q_0)'} \leq C\|h\|_{N'}. \end{aligned}$$

ვინაიდან $\mathcal{M}$ ოპერატორი შემოსაზღვრულია N'-ზე, შეგვიძლია განვსაზღვროთ რუბიო დე ფრან-სიას იტერაციული ალგორითმი შემდეგი სახით:

$$\mathcal{R}h(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mathcal{M}^k h(x)}{2^k \|\mathcal{M}\|^k_{N'}},$$

სადაც $k \geq 1$-სთვის $\mathcal{M}^k = \mathcal{M} \circ \mathcal{M} \cdots \circ \mathcal{M}$ აღნიშნავს $\mathcal{M}$ ოპერატორების k იტერაციას და $\mathcal{M}^0 h = |h|$. $\mathcal{M}$ ოპერატორის განსაზღვრებიდან გვექნებ $h(x) \leq \mathcal{R}h(x)$, $\|\mathcal{R}\|_{N'} \leq 2\|h\|_{N'}$ და

$$\left(M(\mathcal{R}h)^{1/\delta} \right)\Big)^{\delta} = \mathcal{M}(\mathcal{R}h) \leq \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\mathcal{M}^{j+1}}{2^k \left\|\mathcal{M}^j\right\|_{M'}} \leq C \cdot \mathcal{R}(h)$$

მაშასადამე $(\mathcal{R}h)^{1/\delta} \in A_1$. გადავიდეთ ძირითადი უტოლობის დამტკიცებაზე. დავაფიქსიროთ $(f,g) \in \mathcal{F}$. ვინაიდან N ბანახის სივრცეა გვაქვს

$$\|f\|^{q_0}_{q(\cdot)} = \|f^{q_0}\|_N = \sup\left\{ \int_M |f(x)|^{q_0} h(x) d\mu : h \in N', \|h\|_{N'} \leq 1 \right\}.$$

ვინაიდან f არაუარყოფითი ფუნქციაა, შეგვიძლია ვიგულისხმოთ, რომ h ფუნქციის საყრდენი ემთხვევა f ფუნქციის საყრდენს. ასეთი h ფუნქციებისათვის საკმარისია ვაჩვენოთ, რომ

$$\int_X f(x)^{q_0} h(x) d\mu \leq C\|g\|^{q_0}_{p(\cdot)}$$

სადაც მუდმივა დამოუკიდებელია h-სგან. შესაბამისად გვაქვს

$$\begin{aligned}&\int_X f(x)^{q_0} h(x) d\mu \\ &\leq \int_X f(x)^{p_0} \mathcal{R}h(x) d\mu \\ &\leq \|f^{q_0}\|_N \cdot \|\mathcal{R}h\|_{N'} \\ &\leq C\|f\|_{q(\cdot)}^{q_0} \|h\|_{N'} < \infty.\end{aligned}$$

ზემოთ დამტკიცბეულ უტოლობებში გამოვიყენეთ შეფასება. ვინაიდან $(\mathcal{R}h)^{1/\delta} \in A_1$, გვექნება:

$$\begin{aligned}&\int_X f(x)^{q_0} h(x) d\mu(x) \\ &\leq \int_X f(x)^{q_0} \mathcal{R}h(x) d\mu(x) \\ &\leq C \left(\int_g (x)^{p_0} \mathcal{R}h(x)^{p_0/q_0} d\mu(x) \right)^{q_0/p_0} \\ &\leq C \left\|g^{p_0}\right\|_M^{q_0/p_0} \left\|(\mathcal{R}h)^{p_0/q_0}\right\|_{M'}^{q_0/p_0} \\ &= \|g\|_{p(\cdot)}^{q_0} \left\|(\mathcal{R}h)^{q_0/p_0}\right\|_{M'}^{q_0/p_0}.\end{aligned}$$

შევნიშნოთ, რომ

$$\left\|(\mathcal{R}h)^{q_0/p_0}\right\|_M^{q_0/p_0} = \|\mathcal{R}h\Big) \|_{N'} \leq C\| h\|_{N'} = C.$$

ლიტერატურა

[1] A. Björn and J. Björn. Nonlinear Potential Theory on MetricSpaces, EMS Tracts in Mathematics, vol. 17, European Mathematical Society (EMS), Zürich, 2011.

[2] R. Coifman and G. Weiss. Analyse harmonique non-commutative sur certains espaces homogenes, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1971.

[3] D. Cruz-Uribe and A. Fiorenza, Variable Lebesgue Spaces, Birkhäuser, Basel, 2013.

[4] L. Diening, P. Harjulehto, P. Hästö, and M. Ružicka, Lebesgue and Sobolev Spaces with Variable Exponents, Lecture Notes in Math. 2017, Springer, Berlin, 2011.

[5] P. Hajłasz and P. Koskela. Sobolev met Poincaré, Mem. Amer. Math. Soc., no. 688 (145):x+101, 2000.

[6] R.A. Macías and C. Segovia, Lipschitz functions on spaces of homogeneous type, Adv. Math. 33 (1979) 257–270.

[7] A. Nagel and E.M. Stein, On the product theory of singular integrals, Rev. Mat. Iberoam. 20 (2004) 531–561.

[8] arXiv:1407.5216v1 [math.FA] 19 Jul 2014 (Amiran Gogotishvili and Tengiz Kopaliani).

[9] Jan-Olov Strömberg and Alberto Torchinsky Weighted hardy Spaces.