ივანე ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტი

ზუსტ და საბუნებისმეტყველო მეცნიერებათა ფაკულტეტი

მათემატიკის დეპარტამენტი

ბანახის მესერები

სტუდენტი: ნიკოლოზ სახვაძე

საბაკალავრო ნაშრომი

ხელმძღვანელი: ასოცირებული

პროფესორი თენგიზ კოპალიანი

სარჩევი

ანოტაცია

ნაშრომში ჩვენ შევისწავლით მუსელიაკ-ორლიჩის L^{Φ} სივრცის შეუღლებულ სივრცეს. თუ განვიხილავთ აღნიშნულ სივრცეს, როგორც ბანახის მესერს (ბანახის ფუნქციურ სივრცეს), მაშინ მისი შეუღლებული სივრცე შესაბამისი დალაგებით იქნება ბანახის მესერი.

კარგადაა ცნობილი, რომ საზოგადოდ აღნიშნულ სივრცეზე განსაზღვრული უწყვეტი ფუნქციონალი არ წარმოიდგინება ლებეგის ინტეგრალით, ანუ არსებობს ისეთი უწყვეტი ფუნქციონალებიც რომელიც ნულდება $(L^{\Phi})_a \subset L^{\Phi}$ ქვესივრცეზე. აღნიშნული სივრცეებისთვის სამართლიანია იოსიდა-ჰიუიტის დაშლა; სახელდობრ სამართლიანია წარმოდგენა $(L^{\Phi})^* = L^{\Phi^*} \otimes (L^{\Phi})_s^*$, სადაც Φ^* წარმოადგენს Φ ფუნქციის შეუღლებულ ფუნქციას იუნგის აზრით, ხოლო $(L^{\Phi})_s^*$ არის L^{Φ}-ზე განსაზღვრული სინგულარული უწყვეტი ფუნქციონალების სივრცე. აღნიშნული დაშლა საშუალებას იძლევა დამტკიცდეს, რომ $E^{\Phi} = (L^{\Phi})_a \subset L^{\Phi}$ ქვესივრცე L^{Φ} სივრცის M- იდეალია, თუ L^{Φ} სივრცეზე განვიხილავთ ლუქსემბურგის ნორმას. იმ შემთხვევაში როდესაც გვაქვს ორლიჩის სივრცე (ამ შემთხვევაში $\Phi(x,t)$ ფუნქცია არ არის დამოკიდებული x-ზე) და L^{Φ} სივრცეზე განვიხილავთ ორლიჩის ნორმას, მაშინ $(L^{\Phi})_a \subset L^{\Phi}$ ქვესივრცე არ არის L^{Φ} სივრცის M - იდეალი. წარმოდგენილ ნაშრომში ჩვენ განვიხილავთ ანალოგიურ ამოცანას მუსიელაკ-ორლიჩის სივრცისათვის.

Abstract

In this work, we study the conjugate space of the space L^{Φ}. If we consider L^{Φ} space as the Banach lattice then its conjugate space (with the proper order) appears to be the banach lattice.

It is well known that in general, the continuous functional determined in this space can not be defined by the Lebesgue integral, therefore there exist continuous functionals that are equal to zero on $(L^{\Phi})_a \subset L^{\Phi}$ subspace. For the mentioned spaces Hewitt-Yosida decomposition is true. In particular, the equality $(L^{\Phi})^* = L^{\Phi^*} \otimes (L^{\Phi})_s^*$ holds, where Φ^* is the conjugate of Φ (by Young) and $(L^{\Phi})_s^*$ is the space of singular continuous functionals. This decomposition enables us to prove that subspace $E^{\Phi} = (L^{\Phi})_a \subset L^{\Phi}$ is the M - ideal of L^{Φ} space if we consider this space with the Luxemburg norm. For the case of Orlicz space (the function $\Phi(x,t)$ is independent of x) and the space L^{Φ} with Orlicz norm, that subspace $(L^{\Phi})_a \subset L^{\Phi}$ is not the M - ideal of the space L^{Φ}.

In this paper, we consider the analog problem for the space of Musielak-Orlicz.

§1 შესავალი

ვექტორული მესერების თეორიის შექმნა სათავეს იღებს გასული საუკუნის ოცდაათიანი წლებიდან და ის დაკავშიებულია მსოფლიოში ცნობილი მათემატიკოსების კანტოროვიჩის, რისის და ფრეიდენტალის სახელებთან. იმ წრფივი სივრცეების შესწავლა, რომელშიც მოცემულია დალაგების სტრუქტურა და დალაგება გარკვეული აზრით „შეთანხმებულია" ნორმასთან, განპირობებული იყო ფუნქციონალური ანალიზის მთელი რიგი პრობლემებით. აღსანიშნავია, რომ ბანახის სივრცეთა ზოგადი კონცეფცია, ამ თეორიის განვითარების საწყის ეტაპზე, არ ითვალისწინებდა კონკრეტული ფუნქციონალური სივრცეების სპეციფიკას; სახელდობრ, აღნიშნულ სივრცეებში ბუნებრივი დალაგების არსებობას, რომელიც მოცემულ სივრცეს ვექტორულ მესერად აქცევდა. შემდგომში აღმოჩნდა, რომ ვექტორული მესერების მეთოდიკამ საინტერესო გამოყენებები ჰპოვა სოციალურ მეცნიერებებში, კერძოდ, ეკონომიკაში. ვექტორული მესერების გამოყენებამ მათემატიკური ეკონომიკის და ოპტიმიზაციის თეორიაში ფართო ადგილი დაიკავა კანტოროვიჩის (ნობელის პრემიის ლაურიატი ეკონომიკაში) შრომებში. შემდგომში ვექტორულმა მესერებმა ფართო გამოყენება ჰპოვა სიმრავლეთა თეორიის არასტანდარტული მოდელების კვლევაში. ოპერატორთა თეორია ფუნქციონალური ანალიზის ერთ-ერთი მნიშვნელოვანი მიმართულებაა. შევნიშნოთ, რომ ფუნქციონალების, ოპერატორების დალაგებასთან დაკაშირებული პრობლემები იყო ერთ-ერთი სტიმული ნორმირებული მესერების შესწავლისა. აღნიშნული მიდგომა წარმოდგენილი იყო რისის მიერ 1928 წელს მათემატიკურ კონგრესზე (ბოლონია); სახელდობრ $C([0,1])$ უწყვეტ ფუნქციათა სივრცეზე წრფივ უწყვეტ ფუნქციონალების სივრცეზე სპეციფიკური დალაგების შემოტანით. აღნიშნული დალაგება საშუალებას იძლეოდა ფუნქციონალებისთვის ბუნებრივად შემოტანილი ყოფილიყო ისეთი ცნებები, როგორიცაა ფუნქციონალის მოდული, მისი დადებითი და უარყოფითი კომპონენტები (როგორც ჩვეულებრივი რიცხვითი ფუნქციებისთვის). შემდგომში კანტოროვიჩის მიერ შექმნილი იქნა ნორმირებულ ვექტორთა მესერების ზოგადი თეორია, და დალაგების მიმართ შემოსაზღვრული ოპერატორებისთვის გარკვეული ტიპის აღრიცხვა, რომლის ერთ-ერთი კონკრეტული შემთხვევა იყო რისის ზემოთ მოყვანილი კონსტრუქცია. კანტოროვიჩის მიერ აღნიშნული თეორია გამოყენებულ იქნა აბსტრაქტული ფუნქციონალური განტოლებების ამოხსნისათვის. ვექტორული მესერების განვითარების ისტორიაში აღსანიშნავია ფრეიდენტალის ფუნდამენტალური ნაშრომი ვექტორული მესერერის ელემენტების ინტეგრალური წარმოდგენის შესახებ. ამ წარმოდგენამ და კანტოროვიჩის მიერ ოპერტატორის მოდულის ცნების შემოღებამ ფართო გამოყენება ჰპოვა ჰილბერტის სივრცეში თვთშეუღლებული ოპერატორების სპექტრალურ თეორიაში.

ნორმირებული მესერების (ბანახის მესერების) თეორია ვექტორული მესერების თეორიის ერთ-ერთი მთავარი ნაწილია. ნორმირებული მესერების თეორიის მნიშვნელობა განპირონებულია იმით, რომ უმრავლესობა ფუნქციური სივრცეებისა, რომლებსაც შეისწავლიან ანალიზში, წარმოადგენენ ნორმირებულ სივრცეებს. ზოგად თეორიაში მიღებული შედეგები ფართოდ გამოიყენება კონკრეტული სივრცეების სტრუქტურული დახასიათების დროს. ნორმირებული მესერების თეორიას ფართოდ გამოიყენებენ

მათემატიკის ისეთ მიმართულებებში, როგორიცაა ბანახის სივრცეთა ზოგადი თეორია, ინტეგრალისა და ზომის თეორია, ფუნქციათა თეორია, ამოზნექილი ანალიზი, ზოგადი ტოპოლოგია.

ნაშრომში ჩვენ შევისწავლით მუსელიაკ-ორლიჩის L^{Φ} სივრცის შეუღლებულ სივრცეს. თუ განვიხილავთ აღნიშნულ სივრცეს როგორც ბანახის მესერს (ბანახის ფუნქციურ სივრცეს), მაშინ მისი შეუღლებული სივრცე შესაბამისი დალაგებით იქნება ბანახის მესერი. კარგად არის ცნობილი, რომ საზოგადოდ აღნიშნულ სივრცეზე განსაზღვრული უწყვეტი ფუნქციონალი არ წარმოიდგინება ლებეგის ინტეგრალით, ანუ არსებობს ისეთი უწყვეტი ფუნქციონალებიც რომელიც ნულდება $(L^{\Phi})_a \subset L^{\Phi}$ ქვესივრცეზე. აღნიშნული სივრცეებისათვის სამართლიანია იოსიდა-ჰიუიტის დაშლა; სახელდობრ სამართლიანია წარმოდგენა $(L^{\Phi})^* = L^{\Phi^*} \otimes (L^{\Phi})_s^*$, სადაც Φ^* წარმოადგენს Φ ფუნქციის შეუღლებულ ფუნქციას იუნგის აზრით, ხოლო $(L^{\Phi})_s^*$ არის L^{Φ}-ზე განსაზღვრული სინგულარული უწყვეტი ფუნქციონალების სივრცე. აღნიშნული დაშლა საშუალებას იძლევა დამტკიცდეს, რომ $(L^{\Phi})_a \subset L^{\Phi}$ ქვესივრცე L^{Φ} სივრცის M - იდეალია, თუ L^{Φ} სივრცეზე განვიხილავთ ლუქსემბურგის ნორმას. იმ შემთხვევაში, როდესაც გვაქვს ორლიჩის სივრცე (ამ შემთხვევაში $\Phi(x,t)$ ფუნქცია არ არის დამოკიდებული x-ზე) და L^{Φ} სივრცეზე განვიხილავთ ორლიჩის ნორმას, მაშინ $E^{\Phi} = (L^{\Phi})_a \subset L^{\Phi}$ ქვესივრცე არ რის L^{Φ} სივრცის M -იდეალი. წარმოდგენილ ნაშრომში ჩვენ განვიხილავთ ანალოგიურ ამოცანას მუსიელაკ-ორლიჩის სივრცისთვის. ნაშრომის პირველ ნაწილში ძირითადად განხილული იქნება ბანახის მესერების თეორიის ზოგიერთი მნიშნელოვანი დებულება. მეორე ნაწილში განვიხილავთ მუსელაკ ორლიჩის სივრცის შეუღლებული სივრცის სტრუქტურულ თვისებებს (ლუქსემბურგის, ორლიჩის, ამემიას ნორმის მიმართ), სინგულარული ფუნქციონალების წარმოდგენებს, მათ თვისებებს. შემდგომში შევისწავლით L^{Φ} სივრცის M -იდეალებს.

მათემატიკის ისეთ მიმართულებებში, როგორიცაა ბანახის სივრცეთა ზოგადი თეორია, ინტეგრალისა და ზომის თეორია, ფუნქციათა თეორია, ამოზნექილი ანალიზი, ზოგადი ტოპოლოგია.

§2 წრფივი ნორმირებული სივრცეები/ზოგიერთი დამხმარე დებულება

განსაზღვრება 2.1

წრფივ სიცრცეს X ნამდვილ რიცხვთა ველის (კომპლექსურ რიცხვთა ველის) მიმართ უწოდებენ წრფივ ნორმირებულ სივრცეს თუ X სიმრავლეზე განმარტებულია $\|\cdot\|: X \to R$ ფუნქცია შემდეგი თვისებებით:

1) $\|x\| \geq 0,\ \forall x \in X$;

2) $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|,\ \forall x \in X,\ \forall \alpha \in R\ (\alpha \in C)$;

3 $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|,\ \forall x, y \in X$;

4) $\|x\| = 0 \Rightarrow x = 0$.

აღნიშნულ ფუნქციას ეწოდება ნორმა X სიმრავლეზე, ხოლო $\|x\|$ რიცხვს x ელემენტის ნორმა.

მაგალითი 2.1

$L_p([a,b])$ (სადაც $1 \leq p < +\infty$) სიმბოლოთი აღვნიშნავთ $[a,b]$ -ზე განსაზღვრულ ყველა ზომად ფუნქციათა ერთობლიობას, რომლისთვისაც

$$\int_a^b |f(x)|^p dx < +\infty$$

$f \in L_p([a,b])$ - თვის ნორმა განისაზღვრება შემდეგნაირად:

$$\|f\|_{L_p} = \left(\int_a^b |f(x)|^p dx \right)^{1/p}$$

განსაზღვრება 2.2

X ნორმირებული სივრციდან აღებულ $\{x_n\}$ მიმდევრობას უწოდებენ ფუნდამენტალურს, თუ

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N : \forall n, m \geq N \quad \|x_n - x_m\| < \varepsilon$$

ნორმირებულ სივრცეს უწოდებენ სრულს, თუ ამ სივრცის ნებისმიერი ფუნდამენტალური მიმდევრობა კრებადია.

განსაზღვრება 2.3

სრულ ნორმირებულ სივრცეს **ბანახის სივრცეს** უწოდებენ.

მაგალითი 2.2

ბანახის სივრცის მაგალითია ჰილბერტის სივრცეები (სრული ევკლიდური სივრცე)

განსაზღვრება 2.4

ვთქვათ წრფივ ნორმირებულ X სივრცეზე განმარტებულია ორი $\|\cdot\|$ და $\|\cdot\|_*$ ნორმა. ვიტყვით, რომ ეს ნორმები **ექვივალენტურია** თუ არსებობს $c_1, c_2 > 0$ მუდმივები ისეთი, რომ

$$c_1 \|x\| \le \|x\|_* \le c_2 \|x\|, \ \forall x \in X$$

განსაზღვრება 2.5

f ოპერატორს , რომელიც მოქმედებს X ნორმირებული სივრციდან Y ნორმირებულ სივრცეში უწოდებენ შემოსაზღვრულს, თუ ნებისმიერი $M \subset X$ შემოსაზღვრული სიმრავლისათვის $f\left(M\right)$ სიმრავლე Y ნორმირებულ სივრცეში შემოსაზღვრულია.

განსაზღვრება 2.6

$f : X \to Y$ ოპერატორს ვუწოდებთ წრფივს თუ ნებისმიერი $x_1, x_2 \in X$ და α_1, α_2 სკალარისათვის

$$f\left(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2\right) = \alpha_1 f\left(x_1\right) + \alpha_2 f\left(x_2\right)$$

განსაზღვრება 2.7

ნებისმიერი $A: X \to Y$ წრფივი ოპერატორისთვის, რომელიც X ნორმირებული სივრციდან Y ნორმირებულ სივრცეში მოქმედებს, სიდიდეს

$$\|A\| = \sup_{\|x\|_X \le 1} \left\|A\left(x\right)\right\|_Y$$

უწოდებენ A ოპერატორის ნორმას.

თეორემა 2.1

ოპერატორთა სივრცეში უწყვეტობა ექვივალენტურია შემოსაზღვრულობის.

ვთქვათ, $L(Y, Y)$ წარმოადგენს ყველა იმ წრფივი შემოსაზღვრული ოპერატორების ერთთობლიობას რომლებიც მოქმედებენ X ნორმირებული სივრციდან Y ნორმირებულ სივრცეში. თუ ამ სიმრავლეში შემოვიღებთ ბუნებრივად ორი ოპერატორის შეკრების ოპერაციას და ოპერატორის სკალარზე გამრავლების ოპერაციას, მაშინ $L(Y, Y)$ წრფივი სივრცე გახდება. აღნიშნული სივრცე შეგვიძლია გავხადოთ ნორმირებული თუ ნორმად ოპერატორის ნორმას მივიღებთ

თეორემა 2.2

ვთქვათ, X ნორმრებული, ხოლო Y ბანახის სივრცეა. მაშინ $L(Y, Y)$ ბანახის სივრცეა.

ვთქვათ, X რაიმე ბანახის სივრცეა ნამდვილ რიცხვთა ველის მიმართ, ხოლო $Y = R$, მაშინ $L(X, Y)$ ბანახის სივრცეს უწოდებებენ X სივრცის შეუღლებულ სივრცეს და მას აღნიშნავენ სიმბოლოთი X^*. ნებისმიერ ელემენტს $X^* = L(X, R)$ სივრციდან უწოდებენ X სივრცეზე განსაზღვრულ წრფივ უწყვეტ ფუნქციონალს ნამდვილ რიცხვთა ველის მიმართ.

თუ $F \in X^*$ მაშინ F ფუნქციონალის ნორმა განიმარტება ტოლობით

(1) $$\|F\| = \sup_{x \in X, x \neq 0} \frac{|F(x)|}{\|x\|_X} = \sup_{\|x\|_X \leq 1} |F(x)| = \sup_{\|x\|_X = 1} |F(x)|$$

თუ გავითვალისწინებთ იმ ფაქტს, რომ $L(X, R)$ არის ბანახის სივრცე დავადგენთ, რომ ბანახის X სივრცის შეუღლებული X^* სივრცე თვითონ არის ბანახის სივრცე ნორმით (1).

განსაზღვრება 2.8

ვთქვათ, X არის ბანახის სივრცე, ხოლო J არის X -ის ქვესიმრავლე,

$$J^{\perp} = \{x^* \in X^* : x^*(y) = 0 \ \ \forall y \in J\}$$

სიმრავლეს ვუწოდებთ J სიმრავლის ანულატორს.

განსაზღვრება 2.9

ვთქვათ, X_0 არის X -ის რაიმე ქვესივრცე. წრფივ უწყვეტ ასახვას $P : X \to X$ -ს ეწოდება **წრფივი პროექცია** X_0 -ზე თუ:

- $\forall x \in X$ -თვის $P(x) \in X_0$

- $\forall x \in X_0$ -თვის $P(x_0) = x_0$

განსაზღვრება 2.10

წრფივ პროექცია P -ს ეწოდება L -პროექცია, თუ

$$\|x\| = \|P(x)\| + \|x - P(x)\| \quad \text{ნებისმიერი} \quad x \in X \text{ -თვის}$$

ჩაკეტილ ქვესივრცე $J \subset X$ -ს ვუწოდებთ L -დამატებითს თუ იგი L -პროექციის ცვლილების არეა.

განსაზღვრება 2.11

$J \subset X$ ქვესივრცეს ეწოდება M იდეალი თუ $J^{\perp}$ არის L -დამატებითი X^*-ში.

ანუ $J \subset X$ არის X -ის M იდეალი, თუ არსებობს ისეთი წრფივი პროექცია $P : X^* \to X^*$, რომ $P(X^*) = J^{\perp}$ და $\|x^*\| = \|P(x^*)\| + \|x^* - P(x^*)\|$ ნებისმიერი $x^* \in X^*$-თვის.

იდეალებს აქვთ ერთი საინტერესო თვისება, კერძოდ სრულდება შემდეგი თეორემა:

თეორემა 2.3

ვთქვათ J არის X სივრცის M იდეალი მაშინ ნებისმიერი $y^* \in J^*$-თვის არსებობს ერთადერთი $x^* \in X^*$ ფუნქციონალი, რომელიც y^*-ის უწყვეტი გაგრძელებაა და

$$\|x^*\| = \|y^*\|$$

სამართლიანია M იდეალის დახასიათების გეომეტრიული თეორემა

თეორემა 2.4

ბანახის X სივრცის ჩაკეტილი J ქვესივრცისთვის, შემდეგი წინადადებები არის ექვივალენტური:

(1) J არის M იდეალი X -ში;

(2) n ცალი ბირთვის თვისება

ნებისმიერი $n \in N$, $n \geq 3$ -თვის და ნებისმიერი n ცალი ჩაკეტილ $\left(B\left(x_i,\, r_i\right)\right)_{i=1,\ldots,n}$ ბირთვთა ოჯახისთვის, რომელიც აკმაყოფილებს პირობას

$$B\left(x_i,\, r_i\right) \bigcap J \neq 0 \quad \text{ნებისმიერი} \quad i = 1, \ldots, n \text{ -თვის}$$

და

$$\bigcap_{i=1}^{n} B\left(x_i,\, r_i\right) \neq \varnothing$$

მივიღებთ, რომ ჭეშმარიტია

$$\bigcap_{i=1}^{n} B\left(x_i,\, r_i+\varepsilon\right)\bigcap J \neq \varnothing \quad \text{ნებისმიერი} \quad \varepsilon>0\text{-თვის}$$

(3) სამართლიანია მე-(2) თვისება 3 ბირთვისთვის;

(4) 3 ბირთვის (შეზღუდული) თვისება

ნებისმიერი $y_1,\, y_2,\, y_3 \in B_J$ -თვის, ნებისმიერი $x\in B_X$ -თვის (B_X - ერთეულოვანი ბირთვი X -ზე) და ნებისმიერი $\varepsilon>0$ -თვის არსებობს $y\in J$ ისეთი, რომ

$$\left\|x+y_i-y\right\|\le 1+\varepsilon \qquad \left(i=1,\,2,\,3\right);$$

(5) n ცალი ბირთვის (მკაცრი) თვისება

ნებისმიერი $n\in N$, $n\ge 3$-თვის და ნებისმიერი n ცალი ჩაკეტილ $\left(B\left(x_i,\, r_i\right)\right)_{i=1,\dots,n}$ ბირთვთა ოჯახისთვის, რომელიც აკმაყოფილებს პირობას

$$B\left(x_i,\, r_i\right)\bigcap J\neq 0 \quad \text{ნებისმიერი} \quad i=1,\,\dots,n\text{-თვის}$$

და

$$\operatorname{int}\bigcap_{i=1}^{n} B\left(x_i,\, r_i\right)\neq\varnothing,$$

მივიღებთ, რომ ჭეშმარიტია

$$\bigcap_{i=1}^{n} B\left(x_i,\, r_i\right)\bigcap J\neq\varnothing.$$

მოვიყვანოთ მაგალითი ზემოხსენებული თეორემის საილუსტრაციოდ, კერძოდ განვიხილოთ $\mathbb{R}^2$ და მასზე განვსაზღვროთ რამდენიმე სხვადასხვა ნორმა.

(1) $\left\|\left(x,y\right)\right\|_1=\max\{|x|,|y|\}$

(2) $\left\|\left(x,y\right)\right\|_2=|x|+|y|$

(3) $\left\|\left(x,y\right)\right\|_3=\sqrt{x^2+y^2}$

$\mathbb{R}^2$ ბანახის სივრცეა მოცემული სამივე ნორმით.

თეორემა 2.5

სამართლიანია შემდეგი

$$\left(\mathbb{R}^2, \|\ \|_1\right)^* = \left(\mathbb{R}^2, \|\ \|_2\right)$$

$$\left(\mathbb{R}^2, \|\ \|_2\right)^* = \left(\mathbb{R}^2, \|\ \|_1\right)$$

სადაც $\left(\mathbb{R}^2, \|\ \|_1\right)$ წარმოადგენს $\mathbb{R}^2$ სივრცეს (1) ნორმით ხოლო $\left(\mathbb{R}^2, \|\ \|_2\right)$ სივრცეს (2) ნორმით

$\mathbb{R}^2$ სივრცის შეუღლებული სივრცის ელემენტებს წარმოადგენენ შემდეგი ფუნქციონალები

$$F(x,y) = ax + by, \quad a,b \in \mathbb{R}$$

განვიხილოთ $\mathbb{R}^2$-ის ქვესიმრავლე $J = \{(x,0), x \in \mathbb{R}\}$

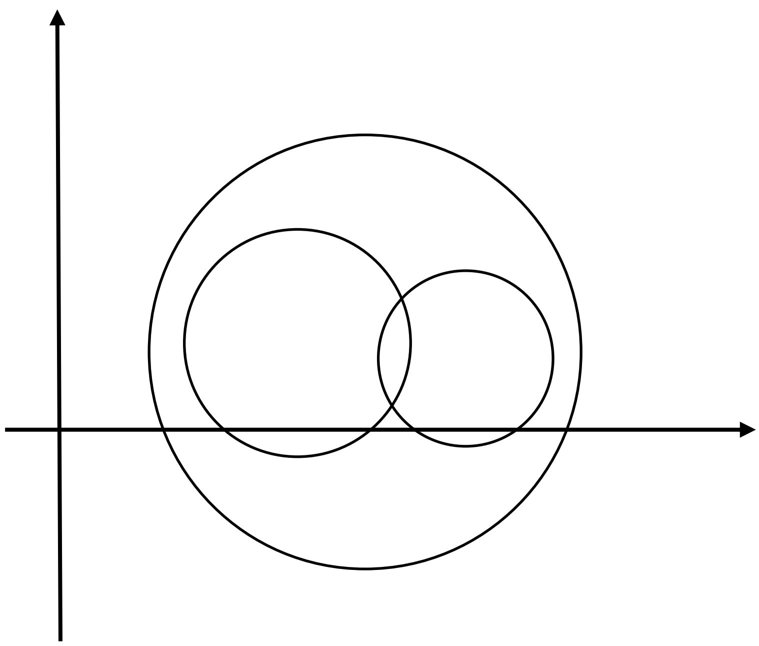
$$J^{\perp} = \{F : F(x,y) = by\} = \{(0,b)\ ,\ b \in \mathbb{R}\}$$

$P : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad P : (a,b) \to (0,b)$ არის წრფივი პროექცია, რომლისათვისაც სრულდება შემდეგი პირობა:

$$\|(a,b)\|_2 = \|P(a,b)\|_2 + \|(a,b) - P(a,b)\|_2$$

ანუ მივიღეთ რომ $J = \{(x,0), x \in \mathbb{R}\}$ არის M იდეალი $\left(\mathbb{R}^2, \|\ \|_1\right)$ სივრცეში.

მაგრამ $J = \{(x,0), x \in \mathbb{R}\}$ სიმრავლე არ წარმოადგენს M იდეალს $\left(\mathbb{R}^2, \|\ \|_3\right)$ სივრცეში, რაც ცხადია შემდეგი მაგალითით.



§3 ბანახის მესერები

განსაზღვრება 3.1

ვთქვათ X ნებისმიერი სიმრავლეა, ნაწილობრივი დალაგება X-ზე არის ბინარული ოპერაცია აღნიშნული $\geq$ სიმბოლოთი, რომელიც არის რეფლექსური, ტრანზიტული და ანტისიმეტრიული, კერძოდ:

1) $x \geq x$ ნებისმიერი $x \in X$-თვის

2) თუ $x \geq y$ და $y \geq x$, მაშინ $x = y$ ნებისმიერი $x,\ y \in X$-თვის

3) თუ $x \geq y$ და $y \geq z$, მაშინ $x \geq z$ ნებისმიერი $x,\ y,\ z \in X$-თვის

ვთქვათ, $x,\ y \in X$, ჩვენ ჩავწერთ $x > y$ თუ $x \geq y$ და $x \neq y$, $x \leq y$ თუ $y \geq x$

განსაზღვება 3.2

ვთქვათ $Y \subset X$, $x \in X$-ს ეწოდება Y სიმრვლის ზედა საზღვარი (შესაბამისად ქვედა საზღვარი) თუ $x \geq y$ (შესაბამისად $y \geq x$) ნებისმიერი $y \in Y$-თვის.

განსაზღვება 3.3

$x \in Y$-ს ეწოდება მაქსიმალური ელემენტი, თუ არ არსებობს $Y \ni y \neq x$ ისეთი, რომ $y \geq x$ (მინიმალური ელემენტი განისაზღვრება ანალოგიურად).

განსაზღვება 3.4

Y სიმრავლის უდიდესი ელემენტი ეწოდება ისეთ $x \in Y$ -ს რომ $x \geq y$ ნებისმიერი $x \leq y$ -თვის.

განსაზღვება 3.5

სიმრავლის სუპრემუმი ეწოდება ზედა საზღვრებს შორის უმცირეს ელემენტს, ინფიმუმი - ქვედა საზღვრებს შორის უდიდესს.

ორ ელემენტიანი $\{x, y\}$ სიმრავლისთვის $x \vee y$-ით აღვნიშნავთ ამ სიმრავლის სუპრემუმს, ხოლო $x \wedge y$-ით - ინფიმუმს.

განსაზღვება 3.6

დალაგებულ X სივრცეს ვუწოდებთ მესერს, თუ ნებისმიერი $x,\ y \in X$ -თვის ორივე $x \wedge y$ და $x \vee y$ არსებობს.

მაგალითი 3.2

თუ განვიხილავთ X -ის ყველა ქვესიმრავლეთა სიმრავლეს და მასზე განვსაზღვრავთ ჩადგმის ოპერაციას ($A \subset B \Leftrightarrow A \leq B$) როგორც დალაგების მიმართებას მაშინ X არის ამ სიმრავლის უდიდესი ელემენტი.

§4 რისის სივრცეები

განსაზღვება 4.1

დალაგებული წრფივი სივრცე ეწოდება ისეთ წრფივ სივრცეს რომელზეც განსაზღვრულია დალაგების მიმართება შემდეგი თვისებიებით:

1) $x \geq y$ -დან გამომდიანრებოს, რომ $x + z \geq y + z$ ნებისმიერი $x,\ y,\ z \in X$ -თვის.

2) $x \geq y$ -დან გამომდინარეობს, რომ $\alpha x \geq \alpha y$ ნებისმერი $x, y \in X$ -თვის და $\alpha \geq 0$ სკალარისათვის.

თუ დალაგებული წრფივი სივრცე აგრეთვე წარმოადგენს მესერს, მაშინ მას რისის სივრცეს ვუწოდებთ.

განსაზღვრება 4.2

$X_{+} = \{x \in X,\ x \geq 0\}$ სიმრავლეს X სივრცის დადებითი კონუსი ეწოდება

განსაზღვრება 4.3

ვთქვათ X რისის სივრცეზე განმარტებულია ნორმა შემდეგი თვისებით:

$|x| \leq |y|$-დან გამომდინარეობს $\|x\| \leq \|y\|$

მაშინ ვიტყვით რომ X არის ნორმირებული მესერი.

განსაზღვრება 4.4

თუ რისის სივრცე მასზე განსაზღვრული ნორმით, რომელიც აკმაყოფილებს ზემოხსენებულ თვისებას, სრულია, მაშინ მას ბანახის მესერი ეწოდება.

განსაზღვება 4.5

ვიტყვით რომ რისის X სივრცე არის არქიმედესეული, თუ $\inf_{n\in N}\left\{n^{-1}x\right\}=0$ სამართლიანია ნებისმიერი $x\in X_+$-თვის.

არქიმედესეული თვისება ნამდვილ რიცხვებში გამოიხატება იმაში, რომ არ არსებობს უსასრულოდ დიდი და უსასრულოდ მცირე რიცხვები, სხვა სიტყვებით, რომ ვთქვათ ნებისმიერი $r\in R_+$-თვის $\lim_{n\to+\infty} nr=\infty$, ან მისი ექვივალენტური $\lim_{n\to+\infty} n^{-1}r=0$.

ლემა 4.1

ყოველი ბანახის მესერი არქიმედესეულია

დამტკიცება

ვთქათ, $0\le y\le\left\{n^{-1}x\right\}$, $x\ge 0$ $n\in N$. ბანახის ნორმის თვისებიდან გამომდინარე სამართლიანია შემდეგი

$$\|y\|\le\left\|n^{-1}x\right\|=n^{-1}\|x\|.$$

ნებისმიერი n-თვის და შესაბამისად $\|y\|=0$, საიდანაც $y=0$. აქედან მივიღებთ, რომ

$$\left\{n^{-1}x\right\}=0.$$

მაგალითი 4.1

განვიხილოთ R^n ვექტორულ სივრცეში სტანდარტული დალაგება შემდეგნაირად: $x\ge y$ მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $x_i\ge y_i$ ნებისმიერი $i=1,\dots,n$-თვის. R^n არის რისის სივრცე, კერძოდ, გვაქვს ტოლობა $x\vee y=\left(\max\left\{x_1,\ y_1\right\},\dots,\max\left\{x_n,\ y_n\right\}\right)$. R^n არის ასევე ბანახის სივრცე მასზე შემოღებული ნებისმიერი ნორმით.

სხვა, ასევე ხშირად გამოყენებადი დალაგება R^n-ში არის ლექსიკოგრაფიული დალაგება, რომელიც განმარტებულია შემდეგნაირად: $x\ge y$ მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა არსებობს ისეთი $k\in\left\{0,\dots,n\right\}$, რომ $x_1=y_1,\dots,x_k=y_k$ და $x_{k+1}>x_k$. ის ასევე არის სრულად დალაგებული რისის სივრცე, სადაც $x\vee y$ არის უდიდესი ელემენტი ამ ორს

შორის. დადებითი კონუსი მაგალითად, R^2-ში არის მარჯვენა ღია ნახევარსიბრტყე $\{(x_1,x_2);x_1>0\}$ და ნახევარღერძი $\{(x_1,x_2);x_1=0,x_2>0\}$. ეს სივრცე არაა არქიმედესეული, მართლაც $(n^{-1},0)\geq(0,1)$ ნებისმიერი n-თვის, $\inf_n\{(n^{-1},0)\}\neq 0$.

მაგალითი 4.2

ტიპიური მაგალითი რისის სივრცისა არის ფუნქციური სივრცეები. თუ X ნამდვილ მნიშვნელობიანი ფუნქციების წრფივი სივრცეა, განსაზღვრული Ω-ზე, მაშინ შეგვიძლია შემოვიღოთ წერტილოვანი დალაგება X-ში შემდეგნაირად: $f\leq g$ მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $f(x)\leq g(x)$ ნებისმიერი $x\in\Omega$-თვის, ამ დალაგებით X გახდება წრფივი დალაგებული სივრცე. $X\times X$-ზე განვსაზღროთ $f\vee g$ და $f\wedge g$, თითოეულ წერტილში მაქსიმუმით და მინიმუმით

$$(f\vee g)(x):=\max\{f(x),g(x)\}$$

$$(f\wedge g)(x):=\min\{f(x),g(x)\}$$

ვიტყვით რომ, X არის ფუნქციური სივრცე, თუ $f\vee g, f\wedge g\in X$ ნებისმიერი $f,g\in X$-თვის. ცხადია ფუნქციური სივრცე წერტილოვანი დალაგებით არის რისის სივრცე.

განსაზღვრება 4.6

ვიტყვით, რომ რისის სივრცე არის დედეკინდის აზრით (ან დალაგებით) სრული, თუ X-ის ყველა არაცარიელ და ზემოდან შემოსაზღვრულ ქვესიმრავლეს გააჩნია უმცირესი ზედა საზღვარი. ვიტყვით, რომ რისის სივრცე არის σ-დედეკინდის აზრით (ან σ-დალაგებით) სრული, თუ X-ის ყველა არაცარიელ, თვლად და ზემოდან შემოსაზღვრულ ქვესიმრავლეს გააჩნია უმცირესი ზედა საზღვარი.

შენიშვნა 4.1

იმისათვის, რომ რისის X სივრცეს ვუწოდოთ დედეკინდის აზრით სრული საკმარისია, რომ ნებისმიერი ზემოთ მიმართულ არაურაყოფით ელემენტებისგან შემდგარ სიმრავლეს გააჩნდეს სუპრემუმი X-ში. $S\subset X$ სიმრავლეს ეწოდება ზემოთ მიმართული თუ ნებისმიერი $x,y\in S$-თვის არსებობს $z\in X$ ისეთი, რომ $x\leq z$ და $y\leq z$.

მაგალითი 4.3

დალაგებით სრული რისის სივრცე არის არქიმედესეული. ამის საჩვენებლად დავუშვათ, რომ X არის დალაგებით სრული რისის სივრცე და დავუშვათ რომ $x\leq n^{-1}y$ რაიმე $x,y\in X_+$-თვის და ნებისმიერი $n\in N$-თვის. რადგანაც $u\in\sup\{nx;\, n\in N\}$ არსებობს X-

ში, ამიტომ შეგვიძლია დავწეროთ $nx = (n+1)x - x \le u - x$. ავიღოთ სუპრემუმი ორივე მხარეს ვნახავთ, რომ $u \le u - x$, საიდანაც $x \le 0$. რადგანაც x დადებითია მივიღებთ $x = 0$.

მაგალითი 4.4

$C([0,1])$ არ არის σ-დალაგებით სრული (და შესაბამისად არც დალაგებით სრული). ამის საჩვენებლად განვიხილოთ ფუნქციათა მიმდევრობა

$$f_n(x) = \begin{cases} 1; & 0 \le x \le \frac{1}{2} - \frac{1}{n} \\ n\left(\frac{1}{2} - x\right); & \frac{1}{2} - \frac{1}{n} < x < \frac{1}{2} \\ 0; & \frac{1}{2} < x < 1 \end{cases}$$

ცხადია, რომ ეს არის ზრდადი მიმდევრობა, რომელიც შემოსაზღვრულია $g(x) = 1$ ფუნქციით, თუმცა ეს ფუნქცია წერტილოვნად კრებადია წყვეტილი f ფუნქციისკენ, $f(x) = 1$, როცა $x \in [0,1/2)$ და $f(x) = 0$, როცა $x \in [1/2,1]$.

§5 მუსელიაკ-ორლიჩის სივრცე

ვთქვათ $(T, \sum, \mu)$ ზომადი სივრცეა, μ ზომას უწოდებენ არაატომურს, თუ ნებისმიერი A სიმრავლისთვის, რომლისათვისაც $\mu(A) > 0$ და ნებისმიერი $B \subset A$-თვის $\mu(A) = \mu(B)$

ვთქვათ, დალაგებული $(T, \sum, \mu)$ სამეული წარმოადგენს დადებით არაატომურ σ-სასრულ, სრულ ზომად სივრცეს. $L^0 = L^0(\mu)$ აღნიშნავს ყველა $\sum$ ზომად ნამდვილ x ფუნქციებს განსაზღვრულს T სიმრავლეზე.

განსაზღვრება 5.1

$\Phi : R \to R_+$ ვუწოდებთ ორლიჩის ფუნქციას, თუ სრულდება პირობები: $\Phi(0) = 0$, Φ არის ლუწი ამოზნექილი ფუნქცია და აკმაყოფილებს შემდეგ პირობას $\Phi(u) \to \infty$, როცა $u \to +\infty$, პირობას.

განსაზღვრება 5.2

$\Phi : T \times R \to R_+$ ასახვას ვუწოდოთ მუსელიაკ-ორლიჩის ფუნქცია, თუ იგი აკმაყოფილებს კარათეოდორის პირობებს:

- ნებისმიერი $u \in R$-თვის $\Phi(\cdot, u)$ ფუნქცია არის $\sum$ ზომადი.
- არესებობს $T_0 \in \sum$ ნული ზომის სიმრავლე ისეთი, რომ ნებისმიერი $t \in T \setminus T_0$ -თვის $\Phi(t, .)$ არის ორლიჩის ფუნქცია.

მოცემულ ნაშრომში ვიგულისხმოთ რომ Φ დააკმაყოფილებს შემდეგ პირობას:

(∞_1) $\qquad\qquad (\Phi(t, u)/u) \to +\infty$ როცა $u \to +\infty$, თ.ყ $t \in T$-თვის.

განსაზღვრება 5.3

ვთქვათ Φ მუსელიაკ-ორლიჩის ფუნქციაა, Φ-ის შეუღლებული ფუნქცია იუნგის აზრით, განიმარტება შემდეგნაირად:

$$\Phi^*(t, u) = \sup_{v>0} \{|u| v - \Phi(t, v)\} \qquad (\forall t \in T, u \in R)\text{-თვის}$$

ადვილია ჩვენება იმისა რომ Φ^* ასევე ორლიჩის ფუნქციაა.

განსაზღვრება 5.4

მუსელიაკ-ორლიჩის Φ ფუნქციისათვის L^0-ზე განვსაზღვროთ I_Φ ფუნქციონალი შემდეგნაირად:

$$I_\Phi(x)=\int_T \Phi\big(t,\, x(t)\big)d\mu$$

ცხადია, რომ ეს ფუნქციონალი არის არაუარყოფითი, ლუწი და ამოზნექილი, ასევე სრულდება $I_\Phi(0)=0$ ტოლობა და, თუ $x\in L^0$ და $I_\Phi(\lambda x)=0$ ყველა $\lambda>0$-თვის, მაშინ $x=0$.

I_Φ ფუნქციონალს მოდულარი ეწოდება.

მუსელიაკ-ორლიჩის ნებისმიერი Φ ფუნქცია წარმოქმნის **მუსელიაკ-ორლიჩის L^Φ სივრცეს,** რომელიც განსაზღრულია შემდეგნაირად: L^Φ წარმოადგენს ისეთ $x\in L^0$ სიმრავლეთა ერთობლიობას, რომელთათვისაც $I_\Phi(\lambda x)<+\infty$ რაიმე $\lambda>0$-თვის (λ დამოკიდებულია x-ზე).

L^Φ -ზე განისაზღვრება შემდეგი სამი ნორმა:

- $\|x\|_\Phi=\inf\left\{\lambda>0: I_\Phi(x/\lambda)\le 1\right\}$ **(ლუქსემბურგის ნორმა)**
- $\|x\|_\Phi^0=\sup\left\{\left|\int_T x(t)\,y(t)\,d\mu\right|: I_{\Phi^*}(y)\le 1\right\}$ **(ორლიჩის ნორმა)**
- $\|x\|_\Phi^A=\inf_{k>0}\dfrac{1}{k}\big(1+I_\Phi(kx)\big)$ **(ამემიას ნორმა)**

ცნობილია, რომ $\|x\|_\Phi\le\|x\|_\Phi^0\le 2\|x\|_\Phi$ ნებისმიერი $x\in L^\Phi$ - თვის. ასევე მტკიცდება (ანალოგიურად როგორც ორლიჩის სივრცეში), რომ ნებისმიერი $x\in L^\Phi$ - თვის $\|x\|_\Phi^0=\|x\|_\Phi^A$.

წარმოებული: აღვნიშნოთ $\Phi'_-(t,u)$-ით და $\Phi'_+(t,u)$-ით $\Phi(t,\cdot)$ ფუნქციის მარცხენა და მარჯვენა წარმოებულები ნებისმიერ ფიქსირებულ $u\in R$ წერტილში. შემოვიტანოთ $\partial\Phi(t,u)=\left[\Phi'_-(t,u),\Phi'_+(t,u)\right]$ აღნიშვნა ნებისმიერი $t\in T$ - თვის და $u\in R$ - თვის. მარტივია იმის დანახვა, რომ

$$\partial\Phi(t,u)=\left\{v\in R: uv=\Phi(t,u)+\Phi^*(t,v)\right\}$$

თ.ყ. $t\in T$-თვის და $u\in R$-თვის.

ვიტყვით, რომ მოცემული $t\in T$-თვის $\Phi(t,\cdot)$ არის გლუვი $u\in R$ წერტილში, თუ

$$\Phi'_-(t,u)=\Phi'_+(t,u).$$

განსაზღვრება 5.5

ვიტყვით, რომ $x \in L^{\Phi}$ ფუნქციის ნორმა არის უწყვეტი დალაგების მიმართ, თუ ნებისმიერი $A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \ldots \supset A_n \supset \ldots$ ზომად სიმრვლეთა მიმდევრობისთვის, რომლისთვისაც $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = \varnothing$

სრულდება:

$$\lim_{n\to\infty} \left\| f \chi_{A_n} \right\| = 0$$

განსაზღვრება 5.6 განვსაზღროთ L^{Φ} -ის ჩაკეტილი ქვესივრცე E^{Φ} შემდეგნაირად:

$E^{\Phi} = \left\{ x \in L^0 : I_{\Phi}\left(\lambda x\right) < +\infty, \forall \lambda > 0 \right\}$

იოლია იმის დანახვა რომ E^{Φ} არის დალაგებით უწყვეტი ელემენტების ქვესიმრავლე L^{Φ} -ში, რაც იმას ნიშნავს რომ $x \in L^{\Phi}$ ეკუთვნის E^{Φ} -ის მაშინ და მხოლოდ მაშინ თუ ნებისმიერი (x_n) მიმდევრობისთვის, სადაც $|x_n| \le |x|$ ნებისმიერი $n \in N$ -თვის და $|x_n| \to 0$ თითქმის ყველგან T -ზე, მაშინ სრულდება $\|x_n\|_{\Phi} \to 0$. რადგანაც Φ არის სასრულ მნიშვნელობებიანი, გვაქვს: $E^{\Phi} \neq \{0\}$.

კამინსკამ[1] ააგო მუსელიაკ-ორლიჩის ნებისმიერი Φ ფუნქციისთვის შემდეგი ზრდადი მიმდევრობა $(T_n)_{n=1}^{\infty}$ ზომადი სიმრავლეებისა, სადაც სრულდება $0 < \mu(T_n) < +\infty$ ყველა $n \in N$-თვის და $\bigcup_{n=1}^{\infty} T_n = T$ და $n \in N$. აქედან მივიღბთ რომ χ_{T_n} (T_n სიმრავლის ინდიკატორის ფუნქცია) ეკუთვნის E^{Φ} -ის, ნებისმიერი $n \in N$ -თვის.

შემოდგომში T_n სიმბოლოს ქვეშ ვიგულისხმებთ ზემოხსენებულ მიმდევრობას.

L^{Φ} და E^{Φ} სივრცეები ზემოთ მოყვანილი სამი ნორმით წარმოადგენენ ბანახის სივრცეებს. L^{Φ} და E^{Φ} სივრცეები ემთხვევიან ერთმანეთს მაშინ და მხოლოდ მაშინ როცა Φ აკმაყოფილებს Δ_2 პირობას.

ვიტყვით რომ Φ აკმაყოფილებს Δ_2 პირობას და ჩავწერთ $\Phi \in \Delta_2$: თუ არსებობს 0 ზომის T_0 სიმრავლე, მუდმივი $K > 0$ და Σ -ზომადი ფუნქცია h განსაზღვრული T -ზე, ისეთი რომ $\int_T h(t) d\mu < +\infty$ და

$$\Phi(t, 2u) \le K\Phi(t, u) + h(t)$$

ნებისმიერი $t \in T \setminus T_0$ -თვის და $u \in R$-თვის.

ცნობილია, რომ L^{Φ} სივრცის შეუღლებული $\left(L^{\Phi}\right)^{*}$ სივრცე წარმოდგინდება შემდეგნაირად:

$$\left(L^{\Phi}\right)^{*}=L^{\Phi^{*}}\oplus S$$

ეს ნიშნავს რომ ყოველი $x^{*}\in\left(L^{\Phi}\right)^{*}$ -თვის არსებობს ერთადერთი წარმოდგენა ამ ფორმით: $x^{*}=\xi_{v}+\varphi$, სადაც φ არის სინგულარული ფუნქციონალი, ანუ $\varphi(x)=0$ ყოველი $x\in E^{\Phi}$ -თვის და ξ_{v} არის რეგულარული ფუნქციონალი განსაზღვრული $v\in L^{\Phi^{*}}$ ფუნქციით შემდეგი ფორმულით:

$$\xi_{v}(x)=\langle x, v\rangle=\int_{T}v(t)x(t)\,d\mu \quad \left(\forall x\in L^{\Phi}\right)\text{-თვის}$$

განსაზღვრება 5.7 ყოველი $x^{*}\in\left(L^{\Phi}\right)^{*}$ -თვის განვსაზღვროვთ ლუქსემბურგისა და ორლიჩის ნორმები შემდეგნაირად

$$\left\|x^{*}\right\|=\sup\left\{x^{*}(x):x\in L^{\Phi}\quad \|x\|_{\Phi}^{0}\leq 1\right\}$$

$$\left\|x^{*}\right\|^{0}=\sup\left\{x^{*}(x):x\in L^{\Phi}\ \|x\|_{\Phi}\leq 1\right\}\qquad x\in L^{\Phi}$$

განსაზღვრება 5.8 ყოველი $x\in L^{\Phi}$ -თვის შესაბამისად განისაზღვრება $d(x)$ და $d_{0}(x)$ ფუნქციები შემდეგნაირად

$$d(x)=\inf\left\{\|x-y\|_{\Phi}:y\in E^{\Phi}\right\}$$

$$d_{0}(x)=\inf\left\{\|x-y\|_{\Phi}^{0}:y\in E^{\Phi}\right\}$$

განსაზღვრება 5.9 ყოველი $x\in L^{\Phi}$ -თვის განვიხილოთ

$$\theta(x)=\inf\left\{\lambda>0:I_{\Phi}(x/\lambda)<+\infty\right\}$$

შემოვიღოთ შემდეგი ფუნქცია

$$x_{n}(t)=\begin{cases}x(t), & |x(t)|\leq n\ \&\ t\in T_{n}\\ 0\end{cases}$$

ცხადია, რომ $|x_{n}|\downarrow|x|$ და $0\downarrow|x-x_{n}|\leq|x|$ თითქმის ყველგან T -ზე და $x_{n}\in E^{\Phi}$ ყველა $n\in N$ -თვის.

მოვიყვანოთ ზემოთ განხილული ფუნქციები ზოგიერთი მნიშვნელოვანი თვისება

ლემა 5.1 თუ Φ მუსელიაკ-ორლიჩის ფუნქციაა, ისეთი რომ $\Phi(t,\cdot)\neq 0$ თ.ყ $t\in T$-თვის მაშინ $\|x\|_\Phi < \|x\|_\Phi^0$ ნებისმიერი $x\in L^\Phi\setminus\{0\}$-თვის.

ლემა 5.2 ნებისმიერი $x\in L^\Phi$-თვის სრულდება შემდეგი ტოლობები

$$\lim_{n\to+\infty}\|x-x_n\|_\Phi^0 = \lim_{n\to+\infty}\|x-x_n\|_\Phi = \theta(x) = d_0(x) = d(x)$$

ლემა 5.3 ნებისმიერი სინგულარული φ ფუნქციონალისთვის სრულდება შემდეგი უტოლობა

$$\|\varphi\| = \|\varphi\|^0 = \sup\{\varphi(x) : I_\Phi(x) < +\infty\} = \sup_{x\in L^\Phi}\varphi(x)/\theta(x)$$

ლემა 5.4 ნებისმიერი ფუნქციონალისთვის $x^* = \xi_v + \varphi \in (L^\Phi)^*$, ჭეშმარიტია:

$$(1)\ \|x^*\|^0 = \|v\|_{\Phi^*}^0 + \|\varphi\|^0$$

$$(2)\ \|x^*\| = \inf\left\{\lambda > 0 : I_{\Phi^*}(v/\lambda) + \|\psi\|/\lambda \le 1\right\}$$

ლემა 5.5 ფუნქციონალი $x^* \in (L^\Phi)^*$ არის სინგულარული მაშინ და მხოლოდ მაშინ როცა

$$\|x^*\|^0 = \|x^*\|$$

§6 ძირითადი შედეგი

თეორემა 6.1 თუ $L^{\Phi} \supset E^{\Phi} \neq \{0\}$ და $E^{\Phi} \neq L^{\Phi}$ მაშინ E^{Φ} არ არის M იდეალი L^{Φ}-ში ორლიჩის ნორმით.

დამტკიცება: $E^{\Phi} \neq \{0\}$ ექვივალენტურია იმის რომ $\Phi(t,u)$ არის სასრულ მნიშვნელობებიანი ფუნქცია.

$E^{\Phi} \neq L^{\Phi}$ ნიშნავს, რომ $\Phi(t,u)$ არ აკმაყოფილებს Δ_2 პირობას.

დავუშვათ, რომ μ არაატმურია. Φ სასრულ მნიშვნელობებიანია და არ აკმაყოფილებს Δ_2 პირობას, მაშინ Φ^* ვერ იქნება წრფივი მთელს $T \times R_+$-ზე. ანუ არსებობს $u_t > 0$ ისეთი რომ $\Phi^*(t, \lambda u_t) > \lambda \Phi^*(t, u_t)$ ნებისმიერი $\lambda > 1$-თვის და თ.ყ $t \in T$-თვის. არსებობს $A \in \Sigma$ სიმრავლე რომლისთვისაც სრულდება $0 < \mu(A) < +\infty$ პირობა და სინგულარული ფუნქცია $\psi \neq 0$ ისეთი რომ $\|\xi_v\| + \|\psi\| = 1$, სადაც $v(t) = u_t 1_A(t)$. ბეპო-ლევის თეორემით გვაქვს

$$I_{\Phi^*}\left(\frac{v}{1-\|\psi\|}\right) \leq 1 \tag{1}$$

განვიხილოთ ამოზნექილი ფუნქცია

$$f(\lambda) = I_{\Phi^*}(\lambda v)$$

(1)-დან გამომდინარეობს რომ f ფუნქცია არის უწყვეტი ინტერვალზე $\left[0, \frac{1}{1-\|\psi\|}\right]$.

აქედან გამომდინარე

$$I_{\Phi^*}(v) + \|\psi\| = 1 \tag{2}$$

სინამდვილეში, თუ (2) პირობა არ სრულდება, გვაქვს:

$$I_{\Phi^*}(v) + \|\psi\| < 1 \tag{3}$$

რადგანაც ფუნქცია

$$g(\lambda) = I_{\Phi^*}(\lambda v) + \lambda \|\psi\|$$

არის უწყვეტი $\left[0, \frac{1}{1-\|\psi\|}\right]$ ინტერვალზე, (3) უტოლობიდან და რაღაციდან გამომდინარე მივიღბთ

$$I_{\Phi^*}\left(\frac{v}{\lambda_0}\right)+\frac{\|\psi\|}{\lambda_0}\le 1 \text{ რაიმე } \lambda_0\in(0,1)\text{-თვის}$$

საიდანაც

$$\|\xi_v+\psi\|\le\lambda_0=1$$

ანუ მივიღეთ წინააღმდეგობა.

შესაბამისად (2) უტოლობა დამტკიცებულია, რაც იმას ნიშნავს რომ $I_{\Phi^*}(v)=1-\|\psi\|$. მეორეს მხრივ

$$1\ge I_{\Phi^*}\left(\frac{v}{1-\|\psi\|}\right)=\int_T\Phi^*\left(t,\frac{v}{1-\|\psi\|}\right)d\mu>\frac{1}{1-\|\psi\|}\int_T\Phi^*(t,v)d\mu=\frac{1}{1-\|\psi\|}I_{\Phi^*}(v)$$

ანუ მივიღეთ წინააღმდეგობა, აქედან გამომდინარე $\|\xi_v+\psi\|=\|\xi_v\|+\|\psi\|$ რაც იმას ნიშნავს რომ E^Φ არაა M იდეალი L^Φ-ში.

შედეგი 6.1 ცხადია, რომ თუ $E^\Phi=L^\Phi$ მაშინ E^Φ არის M იდეალი L^Φ-ში ორლიჩის ნორმით, შესაბამისად წინა თეორემის გამოყენებით ჩვენ შეგვიძლია დავასკვნათ, რომ E^Φ არის M იდეალი L^Φ-ში ორლიჩის ნორმით, მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $E^\Phi=L^\Phi$.

დასკვნა

ნაშრომში ჩვენ შევისწავლეთ მუსელიაკ-ორლიჩის L^{Φ} სივრცის შეუღლებულ სივრცე. განვიხილეთ აღნიშნულ სივრცე, როგორც ბანახის მესერი (ბანახის ფუნქციური სივრცე) , მისი შეუღლებული სივრცე შესაბამისი დალაგებით გამოვიდა ბანახის მესერი. განვიხილეთ იოსიდა-ჰიუიტის დაშლა; სახელდობრ $(L^{\Phi})^* = L^{\Phi^*} \otimes (L^{\Phi})_s^*$ წარმოდგენა, სადაც Φ^* წარმოადგენს Φ ფუნქციის შეუღლებულ ფუნქციას იუნგის აზრით, ხოლო $(L^{\Phi})_s^*$ არის L^{Φ}-ზე განსაზღვრული სინგულარული უწყვეტი ფუნქციონალების სივრცე. აღნიშნული დაშლა საშუალებას იძლევა დამტკიცდეს რომ $E^{\Phi} = (L^{\Phi})_a \subset L^{\Phi}$ ქვცესივრცე L^{Φ} სივრცის M - იდეალია, თუ L^{Φ} სივრცეზე განვიხილავთ ლუქსემბურგის ნორმას. იმ შემთხვევაში როცა გვაქვს ორლიჩის სივრცე (ამ შემთხვევაში $\Phi(x,t)$ ფუნქცია არაა დამოკიდებული x-ზე), და L^{Φ} სივრცეზე განვიხილავთ ორლიჩის ნორმას, მაშინ $(L^{\Phi})_a \subset L^{\Phi}$ ქვესივრცე არ არის L^{Φ} სივრცის M -იდეალი. წარმოდგენილ ნაშრომში ჩვენ განვიხილეთ ანალოგიური ამოცანა მუსიელაკ-ორლიჩის სივრცისათვის და დავადგინეთ რომ E^{Φ} არის M იდეალი L^{Φ}-ში ორლიჩის ნორმით, მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $E^{\Phi} = L^{\Phi}$.

ლიტერატურა

1) A. Kaminska, Some convexity properties of Musielak-Orlicz spaces of Bochner type, ´ Rend. Circ. Mat. Palermo (2) Suppl. 10 (1985), 63–73.

2) Peter Harmand Dirk Werner Wend Werner M-Ideals in Banach Spaces and Banach Algebras Springer-Verlag 1993.

3) J. Banasiak BANACH LATTICES IN APPLICATIONS Department of Mathematics and Applied Mathematics University of Pretoria, Pretoria, South Africa.

4) H.Hudzik, Z.Zba¸ Smoothness in Musielak-Orlicz spaces equipped with the Orlicz norm 1997 Universitat de Barcelona.