ივანე ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტი

ზუსტ და საბუნებისმეტყველო მეცნიერებათა ფაკულტეტი

არათვლადი ატომების მქონე სიმრავლეზე განსაზღვრული დისკრეტული ფუნქციური სივრცეები

გამოყენებითი მათემატიკის სამაგისტრო პროგრამა

მაგისტრის აკადემიური ხარისხის მოსაპოვებლად

მათემატიკის დეპარტამენტი

მათემატიკური ანალიზის კათედრა

მაგისტრანტი - აბესალომ დუნდუა

ხელმძღვანელები - თენგიზ კოპალიანი

ფიზიკა-მათემატიკის მეცნიერებათა კანდიდატი

ასოცირებული პროფესორი

ალექსანდრე აპლაკოვი

ფიზიკა-მათემატიკის მეცნიერებათა კანდიდატი

ასისტენტ პროფესორი

თბილისი 2022

სარჩევი

ანოტაცია

ნაშრომში განხილულია $l^{\varphi}(\Gamma)$ ორლიჩის სივრცეები, სადაც φ არის ორლიჩის ფუნქცია, ხოლო Γ რაიმე სიმრავლეა (არა აუცილებლად თვლადი). გამოკვლეულია კავშირები ლუქსემბურგის ნორმას, ორლიჩის ნორმასა და ამემიას ნორმას შორის. შესწავლილია ორლიჩის სივცეების შეუღლებული სივრცეები, იოსიდა-ჰიუიტის ტიპის დაშლები, სინგულარული ფუნქციონალის წარმოდგენები. შესაწავლილია პირობები, რომელიც დროსაც $l^{\varphi}(\Gamma)$ ორლიჩის სივრცე არის AM −სივრცე.

Abstract

This study eximenes $l^{\varphi}(\Gamma)$ Orlicz spaces over an arbitrary set Γ (not nessecery counteble), where φ is an Orlicz function. Relationships between the Luxemburg norm, the Orlicz norm and the Amemiya norm are studied. Dual spaces of Orlicz spaces are considered, representation of singular functional and Yosida-Hewitt type teorem for $l^{\varphi}(\Gamma)$. It is founded conditions, that $l^{\varphi}(\Gamma)$ Orlicz space is the $AM -$ space.

შესავალი

ვექტორული მესერების თეორიის შექმნა სათავეს იღებს გასული საუკუნის ოცდაათიანი წლებიდან და ის დაკავშირებულია მსოფლიოში ცნობილი მათემატიკოსების: კანტოროვიჩის, რისის და ფრეიდენტალის სახელებთან. წრფივი სივრცეების შესწავლა, რომლებშიც მოცემულია დალაგების სტრუქტურა და დალაგება გარკვეული აზრით „შეთანხმებულია" ნორმასთან, განპირობებული იყო ფუნქციონალური ანალიზის მთელი რიგი პრობლემებით. აღსანიშნავია, რომ ბანახის სივრცეთა ზოგადი კონცეფცია ამ თეორიის საწყის ეტაპზე არ ითვალისწინებდა კონკრეტული ფუნქციონალური სივრცეების სპეციფიკას; სახელდობრ, აღნიშნულ სივრცეებში ბუნებრივი დალაგების არსებობას, რომელიც მოცემულ სივრცეს ვექტორულ მესერად აქცევდა. შემდგომში აღმოჩნდა, რომ ვექტორული მესერების მეთოდიკამ საინტერესო გამოყენება ჰპოვა სოციალურ მეცნირებებში, სახელდობრ ეკონომიკაში. ვექტორული მესერების გამოყენებამ მათემატიკური ეკონომიკის და ოპტიმიზაციის თეორიაში ფართო ადგილი დაიკავა კანტოროვიჩის (ნობელის პრემიის ლაურეატი ეკონომიკაში, 1975 წ.) შრომებში. შემდგომში ვექტორულმა მესერებმა ფართო გამოყენება ჰპოვა სიმრავლეთა თეორიის არასტანდარტული მოდელების კვლევაში. ოპერატორთა თეორია ფუნქციონალური ანალიზის ერთ-ერთი მნიშვნელოვანი მიმართულებაა. შევნიშნოთ, რომ ფუნქციონალების, ოპერატორების დალაგებასთან დაკავშირებული პრობელემები იყო ერთერთი სტიმული ნორემირბული მესერების შესწავლისა. აღნიშნული მიდგომა წარმოდგენილი იყო რისის მიერ 1928 წელს მათემატიკურ კონგრესზე (ბოლონია); სახელდობრ $C([0,1])$ უწყვეტ ფუნქციათა სივრცეზე წრფივი უწყვეტი ფუნქციონალების სივრცეზე სპეციფიკური დალაგების შემოტანით. აღნიშნული დალაგება საშუალებას იძლეოდა ფუნქციონალებისათვის ბუნებრივად შემოტანილიყო ისეთი ცნებები, როგორებიცაა ფუნქციონალის მოდული, მისი დადებითი და უარყოფითი კომპონენტები (როგორც ჩვეულებრივი რიცხვითი ფუნქციისთვის). შემდგომში კანტოროვიჩის მიერ შექმნილ იქნა ნორმირებულ ვექტორთა მესერების ზოგადი თეორია და დალაგების მიმართ შემოსაზღვრული ოპერატორების გარკვეული ტიპის აღრიცხვა, რომლის ერთერთი კონკრეტული შემთხვევა იყო რისის ზემოთ მოყვანილი კონსტრუქცია, კანტოროვიჩის მიერ აღნიშნული თეორია გამოყენებულ იქნა აბსტრაქტული ფუნქციონალური განტოლებების ამოხსნისთვის. ვექტორული მესერების განვითარების ისტორიაში აღსაღნიშნავია ფრეიდენტალის ფუნდამენტალური ნაშრომი ვექტორული მესერების ელემენტების

ინტეგრირებული წარმოდგენის შესახებ. ამ წარმოდგენამ და კანტორივიჩის მიერ ოპერატორის მოდულის ცნების შემოღებამ ფართო გამოყენება ჰპოვა ჰილბერტის სივრცეში თვითშეუღებული ოპერატორების სპექტრულ თეორიაში.

ნორმირებული მესერების (ბანახის მესერების) თეორია ვექტორული მესერების თეორიის ერთ-ერთი მათვარი ნაწილია. ნორმირებული მესრების თეორიის მნიშვნელობა განპირობებულია იმით, რომ უმრავლესობა ფუნქციური სივრცეებისა, რომლებსაც შეისწავლიან ანალიზში, წარმოადგენენ ნორმირებულ სივრცეებს. ზოგად თეორიაში მიღებული შედეგები ფართოდ გამოიყენება კონკრეტული სივრცეების სტრუქტურული დახასიათების დროს. ნორმირებული მესერების თეორიას ფართოდ გამოიყენებენ მათემატიკის ისეთ მიმართულებებში, როგორებიცაა ბანახის სივრცეთა ზოგადი თეორია, ინტეგრალისა და ზომის თეორია, ფუნქციათა თეორია, ამოზნექილი ანალიზი, ზოგადი ტოპოლოგია.

თანამედროვე ანალიზში ფართოდ გამოიყენება ორლიჩის დისკრეტული სივრცეები, რომელებიც ბუნებრივი განზოგადებაა კლასიკური l_p $(1 \leq p \leq \infty)$ სივრცეებისა. l_p სივრცე წარმოადგენს ყველა იმ $(x_1, x_2, \dots x_n, \dots)$ რიცხვითი მიმდევრობების ერთობლიობას, რომელთათვისაც სრულდება პირობა

$$|x_1|^p + |x_2|^p + \cdots + |x_n|^p + \cdots < \infty.$$

შევნიშნოთ, რომ აღნიშნული სივრცეების განმარტებაში ბუნებრივად გამოიყენება ინდექსთა სიმრავლეთ ნატურალურ რიცხვთა N სიმრავლე. ანალოგიურად განიმარტება l^φ ორლიჩის დისკრეტული სივრცეები, სადაც φ- არის ფიქსირებული, ამოზნექილი ფუნქცია. სამაგისტრო ნაშრომის ძირითადი მიზანი არის შესწავლილ იქნას აღნიშნული ტიპის სივრცეები, როცა ინდექსთა სიმრავლე ართვლადია. აღნიშნული ტიპის სივრცეებს საინტერესო გამოყენებები აქვთ ბანახის სივრცეთა თეორიაში. ჩვენს მიზანს წარმოადგენს აღნიშნული სირცეებისთვის პირველ რიგში გამოკვლეული იქნას კლასიკური ნორმები (ლუქსემბურგის, ორლჩის, ამემიას), მათ შორის დამოკიდებულებები, სივრცის სისრულე, შეუღლებული სივრცის დახასიათება, წრფივი უწყვეტი ფუნქციონალების წარმოდგენები, სინგულარული ფუნქციონალების არსებობის პრობლემატიკა, შეუღლებული სივრცის დაშლა რეგულარულ და სინგულარულ ნაწილებად. აღნიშნული სივცეების კვლევა მოითხოვს

ბანახის მესერების გარკვეული ასპექტების ცოდნას. პირველ პარაგრაფში შესწავლილია $l^{\varphi}(\Gamma)$ სივრცე, როცა Γ არის არათვლადი. ანიშნული სივცეებისთვის შესწავლილია ნორმის უწყვეტობის საკითხი, ეს საკითხი მჭიდროდ არის დაკავშირებული შეუღლებული სირცის შესწავლასთან, აღნიშნული სივცეები შესწავლილია იმ შემთხვევაში, როცა საწყისი სივრცის ნორმად აღებულია ლუქსემბუგის და ორლიჩის ნორმები. დახასიათებულია ერთეულოვანი ბირთვის გლუვი წერტილები. ნაშრომი კველვითი ხასიათისაა, სახელდობრ დახასიათებულია ის ორლიჩის სივრცეები, რომლებიც წარმოადგენენ AM სივრცეებს.

ბანახის მესერები

განმარტება. ვთქვათ X არის რაიმე სიმრავლე. X სიმრავლეზე ნაწილობითი დალაგება, რომელიც არის ბინარული მიმართება, აღინიშნება შემდეგნაირად $" \leq "$ და ის არის რეფელქსური, ტრანზიტული და ანტისიმეტრიული:

(1) $x \geq x, ყოველი\, x \in X;$

(2) $x \geq y$ $და\, y \geq z$ $გულისხმობს\, x \geq z, ყოველი\, x, y, z \in X;$

(3) $x \geq y$ $და\, y \geq x$ $გულისხმობს\, x = y, ყოველი\, x, y \in X.$

თუ $Y \subset X$, $x \in X$ ელემენტს ვუწოდებთ Y ქვესიმრავლის ზედა საზღვარს (ქვედა საზღვარს) თუ $x \geq y$ ($y \geq x$), ყოველი $y \in Y$. $x \in Y$ ელემენტი არის მაქსიმალური თუ არ არსებობს $y \in Y$ ელემენტი $x \neq y$ ისეთი, რომ $y \geq x$, მინიმალური ელემენტი განისაზღვრება ანალოგიურად. Y ქვესიმრავლის უდიდესი ელემენტი (უმცირესი ელემენტი) არის $x \in Y$ ელემენტი თუ აკმაყოფილებს შემდეგ პირობას $x \geq y$ $(x \leq y)$, ყოველი $y \in Y$.

სიმრავლის სუპრემუმს ვუწოდებთ უმცირეს ზედა საზღვარს, ინფიმუმს ვუწოდებთ უდიდეს ქვედა საზღვარს. ორ ელემენტიანი $\{x, y\}$ სიმრავლისთვის $x \wedge y$ ან $\inf\{x, y\}$ აღვნიშნავთ ინფიმუმს და $x \vee y$ ან $\sup\{x, y\}$ აღვნიშთნავთ სუპრემუმს.

განმარტება. დალაგბული X სიმრავლე არის მესერი, თუ ყოველი $x, y \in X$ არსებობს ორივე $x \wedge y$ და $x \vee y$.

განმარტება. დალაგებულ ვექტორულ სივრცეს, რომელიც ამავდროულად არის მესერი ვუწოდებთ რისის სივრცეს ანუ ვექტორულ მესერს.

ვთქვათ, X არის ვექტორული მესერი. X ვექტორული მესერის Y ქვესივრცე არის *იდეალი* თუ, ყოველი ორი ელემენტისთვის $x, y \in X$ სრულდება შემდეგი პირობა.

$$\left(|x| \leq |y| \text{ და } y \in Y\right) \Rightarrow (x \in Y).$$

თუ A აღნიშნავს რამე თვისებას, მაშინ (A)-ით აღვნიშნავთ ყველა იმ ბანახის სივრცეთა ერთობლიობას, რომლებიც აკმაყოფილებენ A თვისებას.

ვიტყვით, რომ ვექტრული მესერი X არის *დედეკინდის აზრით სრული* (*დედეკინდის აზრით $\sigma -$ სრული*) თუ X სივრცის ნებისმიერ $A \subset X$ ქვესიმრავლეს (თვლად ქვესიმრალეს), რომელიც არის დალაგების მიმართ შემოსაზღვრული ზემოდან, გააჩნია სუპრემუმი; რომელსაც შემოდგომში ასე აღვნიშნავთ $X \in (DC)$ $(X \in (\sigma - DC))$.

ლემა 1.1. თუ $X \in (DC)$ $\left(X \in (\sigma - DC)\right)$ და $Y \subset X$ არის იდეალი X-ში, მაშინ $Y \in (DC)$ $(Y \in (\sigma - DC))$.

განმარტება. ვექტორულ მესერს, რომელიც ამავდროულად არის ნორმირებული სივრცე, უწოდებენ ნორმირებულ მესერს, თუ მისი ნორმა $||\cdot||$ არის მონოტონური, ანუ სრულდება შემდეგი პირობა:

$$(|x| \leq |y|) \Rightarrow \left(\left||x|\right| \leq \left||y|\right|\right).$$

იმ შემთხვევაში, თუ ნორმირებული მესერი სრულია, მაშინ მას უწოდებენ ბანახის მესერს.

ვიტყვით, რომ ნორმირებული მესერი X არის *დალაგების მიმართ უწყვეტი* (ანუ ნორმა $||\cdot||$ X სივრცეზე არის დალაგების მიმარ უწყვეტი) თუ X სივრციდან აღებული ნებისმიერი (x_α) განზოგადებული მიდევრობისათვის, რომლისთვისაც $x_\alpha \downarrow 0$ $(x_\alpha \geq x_\beta, \alpha \leq \beta$ და $inf_\alpha\, x_\alpha = 0)$, გვაქს $inf_\alpha \left||x_\alpha|\right| = 0$ და ამ ფაქტს აღვნიშნავთ $X \in (OC)$.

ვიტყვით, რომ ნორმირებული მესერი X არის *დალაგებიას მიმართ $\sigma -$ უწყვეტი*,თუ X სივრციდან აღებული ნებისმიერი (x_n) მიმდევრობისათვის, რომლისათვის $x_n \downarrow 0$, $(x_1 \geq x_2 \ldots$ $inf_n\, x_n = 0)$, გვაქვს $\left||x_n|\right| \downarrow 0$ და ამ ფაქტს აღვნიშნავთ $X \in (\sigma - OC)$.

თეორემა 1.2. ყოველი ბანახის X მესერისათვის შემდეგი წინადადებები არის ექვივალენტური:

1. $X \in (OC)$;

2. $X \in (DC)$ და $X \in (OC)$;
3. $X \in (\sigma - DC)$ და $X \in (\sigma - OC)$.

ყოველი ბანახის X მესერისათვის განვსაზღვროთ შემდეგი სივრცე:

$$X_\alpha = \{x \in X : \forall(x_\alpha), |x| \geq x_\alpha \downarrow 0 \Rightarrow inf_\alpha \left||x_\alpha|\right| = 0\}.$$

თეორემა 1.3. ყოველი ბანახის X მესერისათვის გვაქვს,

1. *X_α არის იდეალი $X -$ ში;*
2. $X_\alpha \in (OC)$;
3. *თუ $B \subset X$ არის იდეალი ისეთი, რომ $B \in (OC)$ მაშინ $B \subset X_\alpha$;*
4. *X_α იდეალი X სივრცის ჩაკეტილი ქვესივრცეა.*

შევნიშნოთ, რომ $X \in (OC)$ ბანახის მესერი მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როდესაც $X = X_\alpha$. ბანახის მესერის, ერთ-ერთი მნიშვნელოვანი კლასია ე.წ. კიოტეს სივრცეები (ლიტერატურაში ასეთი სივრცეები მოიხსენიება როგორც ბანახის ფუნქციური სივრცეები).

ვთქვათ S რაიმე არაცარიელი სიმრავლეა, Σ არის S სიმრავლის რაიმე ქვესიმარავლეთა $\sigma -$ალგებრა და რომელზედაც განსაზღვრულია μ ზომა. $L^0(S, \Sigma, \mu)$-აღვნიშნოთ S სიმრავლეზე განსაღრული μ ზომად ფუნქციათა სივრცე (ექვივალენტური ფუნქციები გაიგივებულია). ამ სივრცეში გვაქვს ბუნებრივი დალაგება $(x \leq y) \Longleftrightarrow (x(s) \leq y(s)\mu - თ.ყ. S - ში)$. ადვილი დასანახია, რომ $L^0(S, \Sigma, \mu)$ არის $\sigma -$*დედეკინდინის აზრით სრული* ვექტორული მესერი.

ვამბობთ, რომ X ბანახის მესერი არის კიოტეს სივრცე თუ ის არის $L^0(S, \Sigma, \mu)$ სივრცის იდეალი. შევნიშნოთ, რომ ლემა 1.1 ძალით კიოტეს სივრცე არის *დედეკინდის აზრით $\sigma -$სრული* ბანახის მესერი.

X ბანახის მესერი არის კიოტეს სივრცე თუ ის არის იდეალი რაიმე $L^0(S, \Sigma, \mu)$. შევნიშნოთ, რომ ლემა 1.1 ძალით კიოტეს სივრცე არის *დედეკინდის აზრით $\sigma -$სრული ბანახის მესერი*

$l^\varphi(\Gamma)$ სივრცე ატომთა ნებისმიერი სიმრავლით.

ვთქვათ Γ რაიმე არაცარიელი სიმრავლეა, 2^Γ სიმრავლეთი აღვნიშნოთ Γ სიმრავლის ყველა ქვესიმრავლეთა $\sigma -$ალგებრა. განვსაზღვროთ Γ სიმრავლეზე დისკრეტული μ ზომა შემდეგნაირად: $\mu(A) = card(A)$ თუ A არის სასრული, სხვა შემთხვევაში $\mu(A) = \infty$.

შესაბამისად $l^0(\Gamma) \coloneqq L^0(\Gamma, 2^\Gamma, \mu)$, აღნიშნულია Γ სიმრავლეზე განსაზღვრული ყველა ფუნქცია მნიშვნელობებით $\mathbb{R}$-ში. ყოველი $x : \Gamma \to \mathbb{R}$ ფუნქციისათვის და ნებისმიერი $A \subset \Gamma$ სიმრავლისათვის სიმბოლოთი $\sum_{i\in A} x(i)$ (შემოკლებული $\sum_A x$ აღვნიშნავთ ინტეგრალს $\int_A \; xd\mu$:

$$\sum\nolimits_{i\in A} x(i) = sup_{\substack{I\subset A \\ card(I)<\infty}} \sum\nolimits_{i\in I} x(i)\,.$$

იმ შემთხვეში, როცა A თვლადია, მაშინ პირობა $\sum_{i\in A} x(i) < \infty$ ტოლფასია $\sum_{i\in A} |x(i)|$ მწკრივის კრებადობის.

Σ_1-ით აღვნიშნოთ Γ სიმრავლის ყველა სასრულ ქვესიმრავლეთა ერთობლიობა და ყოველი $A \subset \Gamma$ სიმრავლითვის x^A-ით აღინიშნოთ $x \cdot \chi_A$ (χ_A არის A სიმრავლის მახასიათებელი ფუნქცია).

ვთქვათ $\varphi : \mathbb{R} \to [0, +\infty]$ იყოს ორლიჩის ფუნქცია. $\varphi : \mathbb{R} \to [0, +\infty]$ ვუწოდებთ ორლიჩის ფუნქციას, თუ ის არის ამოზნექილი, ლუწი ფუნქცია, ამასთანავე $\varphi(0) = 0$ და ის არის მარცხნიდან უწყვეტი $[0, +\infty)$ შუალედზე (ქვემოთ ვიგულისხმებთ რომ ის არ არის იგივურად ნულის ტოლი). ψ -ით აღვნიშნავთ φ ფუნქციის შეუღლებულ ფუნქციას იუნგის აზრით, სახელდობრ:

$$\psi(u) = \; sup_{v>0} \left(|u|v \; - \; \varphi(v)\right).$$

ψ და φ დაკავშირებულია იუნგის უტოლობით შემდეგნაირად:

$$|uv| \; \le \; \varphi(u) \; + \; \psi(v) \; (u, v \; \in \; \mathbb{R}).$$

$l^0(\Gamma)$ სივრცეზე განვსაზღვროთ მოდულარი I_φ შემდეგნაირად:

$$I_\varphi = \sum\nolimits_{i\in\Gamma} \varphi(x(i))\,, \left(x \; \in l^0(\Gamma)\right).$$

იუნგის უტოლობიდან გამომდინარე გვექნება,

$$\sum\nolimits_{i\in\Gamma} |x(i)y(i)| \; \le \; I_\varphi + \; I_\psi, \qquad \left(\forall \, x, y \; \in \; l^0(\Gamma)\right).$$

განვსაზღვროთ ორლიჩის სივრცე,

$$l^\varphi(\Gamma) = \left\{x \; \in \; l^0(\Gamma) : \; \exists \, \lambda > 0, I_\varphi \, (\lambda x) < \; \infty\right\}.$$

აღნიშნულ სივრცეში შესაძლებელია შემოვიღოთ ნორმა შემდეგი ფორმით (ლუქსემბურგის ნორმა) :

$$||x||_\varphi = inf\left\{k > 0 : I_\varphi\left(\frac{x}{k}\right) \le 1\right\}.$$

თუ გავითვალისწინებთ დალაგებას $x \le y \Longleftrightarrow \forall i \in \Gamma, x(i) \le y(i)$ მაშინ, გვექნება:

$$|x| \le |y| \Rightarrow I_\varphi(x) \le I_\varphi(y) \text{ და } |x| \le |y| \Rightarrow \left||x|\right|_\varphi \le \left||y|\right|_\varphi.$$

მაშასადამე, მოდულარი I_φ და ნორმა $||\cdot||_\varphi$ არის მონოტონური. საბოლოოდ გვექნება, რომ $l^\varphi(\Gamma)$ სივრცე, $\le$ ნაწილობითი დალაგებით, არის ბანახის მესერი და ამავე დროს $l^\varphi(\Gamma)$ არის იდეალი $l^0(\Gamma)$ სივრცეში. იმისთვის, რომ დავასკვნათ $l^\varphi(\Gamma)$ არის კიოტეს სივრცე, აუცილებელია ვაჩვენოთ, რომ $(l^\varphi(\Gamma), ||\cdot||_\varphi)$ არის სრული.

ლემა 1.4 $l^0(\Gamma)$ სივრციდან აღებული ნებისმიერი $(x_n)_{n\in N}$ მიმდევრობისთვის გვაქვს:

1. *თუ* $||x_n||_\varphi \to 0$, *მაშინ* $\forall i \in \Gamma, x_n(i) \to 0$;
2. *თუ* $(x_n)_{n\in N}$ *არის კოშის მიმდევრობა* $l^\varphi(\Gamma)$ *სივრცეში, მაშინ* $\forall i \in \Gamma -$ *ინდექსისათვის* $\left(x_n(i)\right)_{n\in N}$ *რიცხვითი მიმდევრობა არის კოშის მიმდევრობა* $\mathbb{R} -$ *ში.*

დამტკიცება. დავამტკიცოთ თეორემის პირველ ნაწილი. ვთქვათ, $||x_n||_\varphi \to 0$. ავიღოთ ნებისმიერი $i \in \Gamma$. გვექნება $I_\varphi(kx_n) \to 0$ როცა, $n \to \infty$ ყოველი $k > 0$. აქედან გამომდინარე $\varphi(kx_n(i)) \to 0$, როცა $n \to \infty$ ყოველი $k > 0$.

დავუშვათ საწინააღმდეგო: $x_n(i) \nrightarrow 0$ რომელიმე $i \in \Gamma$ ინდექსისათვის, მაშინ არსებობს ნატურალური რიცხვების $(n_k)_{k\in N}$ მიმდევრობა და $\varepsilon > 0$ ისეთი, რომ $|x_{n_k}(i)| \ge \varepsilon$.

ავიღოთ $k := \frac{a_\varphi+1}{\varepsilon}$, სადაც $a_\varphi := sup\,\{u \ge 0 : \varphi(u) = 0\}$, გვექნება:

$$\varphi\left(kx_{n_k}(i)\right) = \varphi\left(k\left|x_{n_k}(i)\right|\right) \ge \varphi(k\varepsilon) = \varphi\left(\frac{a_\varphi + 1}{\varepsilon}\,\varepsilon\right) = \varphi\left(a_\varphi + 1\right) > 0,$$

რაც გულისხმობს, რომ $\varphi\left(kx_{n_k}(i)\right) \nrightarrow 0$. თეორემა დამტკიცებულია.

თეორემის მეორე ნაწილი დამტკიცდება ანალოგიურად.

თეორემა 1.5. $(l^\varphi(\Gamma), ||\cdot||_\varphi)$ სივრცე ლუქსემბურგის ნორმის მიმართ სრულია.

დამტკიცება. ვთქვათ, $(x_n)_{n\in N}$ არის კოშის მიმდევრობა $\left(l^{\varphi}(\Gamma),||\cdot||_{\varphi}\right)$ სივრცეში. ლემა 1.4 ძალით $(x_n)_{n\in N}$ მიმდევრობას $l^0(\Gamma)$ სივრცეში გააჩნია ზღვარი, აღვნიშნოთ ის x-ით. საკმარისია ვაჩვენოთ, რომ $||x_n - x||_{\varphi} \to 0$ როცა $n \to \infty$.

დავაფიქსიროთ ნებისმიერად $\varepsilon > 0$ და $\lambda > 0$ რიცხვები. თეორემის დასამტკიცებლად ვაჩვენოთ, რომ არსებობს ნატურალური რიცხვი $\mathrm{N} \in \boldsymbol{N}$ ისეთი, რომ $I_{\varphi}\left(\lambda(x_n - x)\right) \leq \varepsilon$ ყოველი $n \geq \mathrm{N}$.

იქედან გამომდინარე, რომ $(x_n)_{n\in N}$ არის კოშის მიმდევრობა, განსაზღვრების ძალით არსებობს $\mathrm{N} \in \boldsymbol{N}$ ისეთი, რომ $||x_n - x_m||_{\varphi} \leq \frac{\varepsilon}{\lambda}$ ყოველი $n, m \geq \mathrm{N}$. მივიღებთ, რომ $||\lambda\,(x_n - x_m)||_{\varphi} \leq \varepsilon$ და შესაბამისად,

$$I_{\varphi}(\lambda(x_n - x_m)) \leq \varepsilon.$$

მაშასადამე, გვექნება $\varphi(\,\lambda\,(x_n(i) - x_m(i))) \leq \varepsilon$ ყოველი $n, m \geq \mathrm{N}$ და $i \in \Gamma$ ნომრებისთვის.

შევნიშნოთ, რომ

$$\varphi(\,\lambda\,(x_n(i) - x_m(i))) \to \varphi(\,\lambda\,(x_n(i) - x(i))), \text{როცა}\, m \to \infty,$$

ყოველი ფიქსირებული $n \geq \mathrm{N}$ და $i \in \Gamma$ ნომრებისთვის. ფატუს ლემის ძალით მივიღებთ, $I_{\varphi}\left(\lambda(x_n - x)\right) \leq \lim inf_{m\to\infty} I_{\varphi}\left(\lambda(x_n - x_m)\right) \leq \varepsilon, n \geq \mathrm{N}$- თვის. თეორემა დამტკიცებულია.

ლემა 1.6. ყოველი $x \in l^0(\Gamma)$ ელემენტისთვის სამართლიანია შემდეგი: თუ $sup_{I\in\Sigma_1}||x^I||_{\varphi} < \infty$, მაშინ $||x||_{\varphi} = sup_{I\in\Sigma_1}||x^I||_{\varphi}$ და $x \in l^{\varphi}(\Gamma)$.

დამტკიცება: საკმარისია ვაჩვენოთ $||x||_{\varphi} \leq sup_{I\in\Sigma_1}||x^I||_{\varphi}$. ვთქვათ $c := sup_{I\in\Sigma_1}||x^I||_{\varphi}$. გვექნება

$$I_{\varphi}\left(\frac{x^I}{c}\right) \leq I_{\varphi}\left(\frac{x^I}{||x^I||_{\varphi}}\right) \leq 1 \text{ ყოველი } I \in \Sigma_1.$$

აქედან გამომდინარე, $I_{\varphi}\left(\frac{x^I}{c}\right) = sup_{I\in\Sigma_1} I_{\varphi}\left(\frac{x^I}{c}\right) \leq 1$, შესაბამისად $||x||_{\varphi} \leq c$.

როგორც კლასიკურ შემთხვევაში გვაქვს $l^{\varphi}(\Gamma)$ სივრცეზე შეგვიძლია განვსაზღვროთ ორლიჩის ნორმა შემდეგნაირად:

$$||x||_{\varphi}^{O} = sup_{I_{\psi}(y)\leq 1} \sum_{\Gamma} xy.$$

სადაც ψ არის φ-ის შეუღლებული ფუნქცია იუნგის აზრით.

ადვილი საჩვენებელია, რომ ის ნამდვილად არის ნორმა. ორლიჩის ნორმა $||x||_{\varphi}^{O}$ ასევე შეგვიძლია განვიხილოთ ნებისმიერი $x \in l^0(\Gamma)$ ელემენტისთვის, $||x||_{\varphi}^{O}$იქნება ფუნქციური ნორმა, რომელმაც შეიძლება მიიღოს მნიშვნელობა ∞ რაიმე ელემენტისთვის $l^0(\Gamma)$ სივრციდან. თეორემა დამტკიცებულია.

ლემა 1.7. ტოლობა

$$||x||_{\varphi}^{O} = \sup\left\{\sum_{\Gamma} xy : I_{\psi}(y) \leq 1, \quad \forall\, i \in \Gamma, x(i)\cdot\ y(i) \geq\ 0, \operatorname{supp}(y) \in \Sigma_1\right\}$$

სამართლიანია ყოველი $x \in l^0(\Gamma)$.

დამტკიცება: საკმარისია ვაჩვენოთ უტოლობა " $\leq$ ". დავუშვათ, რომ $||x||_{\varphi}^{O} < \infty$ და ავიღოთ ნებისმიერი $\varepsilon > 0$. ორლიჩის ნორმის განმარტებიდან გამომდინარეობს, რომ არსებობს $y \in l^0(\Gamma)$ ისეთი, რომ $I_{\psi}(y) \leq 1$ და $||x||_{\varphi}^{O} - \varepsilon < \sum_{\Gamma} xy \ \leq\ ||x||_{\varphi}^{O}$. დავუშვათ, რომ $\forall\, i \in \Gamma,\ x(i)\cdot y(i)\ \geq\ 0$ (თუ ეს დაშვება არ არის სამართლიანი გავაკეთებთ $y -$ ის ისეთ მოდიფიცირებას, რომ უტოლობა იყოს სწორი). ავიღოთ $I \in \Sigma_1$ ისეთი, რომ $||x||_{\varphi}^{O} - \varepsilon < \sum_{I} xy$. განვსაზღვროთ $z = y^I$. გვაქვს $I_{\psi}(z) \leq I_{\psi}(y) \leq 1$ $\operatorname{supp}(z)\ \in \Sigma_1$ და

$$||x||_{\varphi}^{O} - \varepsilon < \sum_{\Gamma} xz\ \leq \sup\left\{\sum_{\Gamma} xy : I_{\psi}(y) \leq 1, \quad \forall\, i \in \Gamma, x(i)\cdot\ y(i) \geq\ 0, \operatorname{supp}(y) \in \Sigma_1\right\}$$

თუ $||x||_{\varphi}^{O} = \infty$ შემთხვევა, შეგვიძლია განვიხილოთ ანალოგიურად. თეორემა დამტკიცებულია.

ლემა 1.8. ნებისმიერი $x \in l^0(\Gamma)$ ელემენტისთვის სრულდება შემდეგი ტოლობა $||x||_{\varphi}^{O} = sup_{I\in\Sigma_1} ||x^I||_{\varphi}^{o}$.

დამტკიცება. გვექნება: $\left||x|\right|_{\varphi}^{o} = sup_{I_{\psi}(y)\le 1, xy\ge 0} \sum_{\Gamma} xy = sup_{I_{\psi}(y)\le 1, xy\ge 0} sup_{I\in\Sigma_1} \sum_{I} xy = sup_{I_{\psi}(y)\le 1, xy\ge 0} sup_{I\in\Sigma_1} \sum_{\Gamma} x^{I} y = sup_{I\in\Sigma_1} \left||x^{I}|\right|_{\varphi}^{o}$. თეორემა დამტკიცებულია.

შემდეგი ორი ლემა გვიჩვენებს კავშირს ლუქსემბურგის ნორმასა და ორლიჩის ნორმას შორის.

ლემა 1.9. ნებისმიერი $x \in l^{0}(\Gamma)$ ელემენტისთვის სრულდება შემდეგი უტოლობა $\left||x|\right|_{\varphi}^{o} \le 2\left||x|\right|_{\varphi}$.

დამტკიცება. როდესაც $||x||_{\varphi} = \infty$ და $||x||_{\varphi} = 0$ დებულება ტრივიალურია. დავუშვათ რომ, $0 < ||x||_{\varphi} < \infty$. თუ $I_{\psi}(y) \le 1$, იუნგის უტოლობის ძალით გვექნება

$$\sum_{\Gamma} \frac{x}{\left||x|\right|_{\varphi}} y \le I_{\varphi}\left(\frac{x}{\left||x|\right|_{\varphi}}\right) + I_{\psi}(y) \le 2.$$

აქედან გამომდინარე, $\sum_{\Gamma} xy \le 2\,||x||_{\varphi}$. თუ გავითვალისწინებთ, რომ y ნებისმიერადაა აღებული $I_{\psi}(y) \le 1$ მივიღებთ საჭირო უტოლობას. თეორემა დამტკიცებულია.

ლემა 1.10. ნებისმიერი $x \in l^{0}(\Gamma)$ ელემენტისათვის სრულდება შემდეგი უტოლობა $\left||x|\right|_{\varphi} \le \left||x|\right|_{\varphi}^{o}$.

დამტკიცება: დავუშვათ, რომ $\left||x|\right|_{\varphi}^{o} < \infty$. ვთქვათ, $\mathrm{supp}(y) \in \Sigma_1$ თუ $x \in l^{0}(\Gamma)$

$$sup_{I\in\Sigma_1}\left||x^{I}|\right|_{\varphi} \le \; sup_{I\in\Sigma_1}\left||x^{I}|\right|_{\varphi}^{o} = \left||x|\right|_{\varphi}^{o} < \infty$$

ლემა 1.6-ის ძალით მივიღებთ დასამტკიცებელ უტოლობას. თეორემა დამტკიცებულია.

შედეგი 1.11. თუ $x \in l^{0}(\Gamma)$ და $\left||x|\right|_{\varphi}^{o} < \infty$, მაშინ $x \in l^{\varphi}(\Gamma)$.

დამტკიცება. თუ $\left||x|\right|_{\varphi}^{o} < \infty$, მაშინ $\left||x|\right|_{\varphi} < \infty$. მაშასადამე, $I_{\varphi}\left(\frac{x}{||x||_{\varphi}+1}\right) \le 1$ უტოლობიდან გვექნება, რომ $x \in l^{\varphi}(\Gamma)$.

ლემა 1.12. ნებისმიერი $x \in l^{0}(\Gamma)$ ელემენტისთვის, თუ $sup_{I\in\Sigma_1}\left||x^{I}|\right|_{\varphi}^{o} < \infty$, მაშინ

$$\left||x|\right|_{\varphi}^{o} = \; sup_{I\in\Sigma_1}\left||x^{I}|\right|_{\varphi}^{o} \text{ და } x \in l^{\varphi}(\Gamma).$$

ვთქვათ, $x \in l^0(\Gamma)$. განვსაზღვროთ $f_x : (0;\ +\infty) \to (0;\ +\infty]$ შემდეგნაირად:

$$f_x(k) = \frac{1}{k}\Big(1 + I_\varphi(kx)\Big).$$

თუ $x \notin l^0(\Gamma)$ მაშინ $f_x(k) = +\infty$ ნებისმიერი $k > 0$ რიცხვისთვის. თუ $x \in l^0(\Gamma)$ მაშინ აღვნიშნოთ $k_x := \sup\{k > 0 : I_\varphi(kx) < \infty\}$. ლებეგის თეორემა ზღვარზე გადასვლის ძალით f_x არის უწყვეტი $(0; k_x)$ ინტერვალზე და არის მარცხნიდან უწყვეტი k_x წერტილში. განვსაღვროთ $l^\varphi(\Gamma)$ სივრცეზე ამემიას ნორმა შემდეგნაირად:

$$||x||_\varphi^A = inf_{k>0} f_x(k).$$

მოვიყვანოთ f_x ფუნქციის შემდეგი თვისებები ($\mathbb{Q}$ − რაციონალურ რიცხვთა სიმრავლეს აღნიშნავს).

ლემა1.13. ნებისმიერი $x \in l^0(\Gamma)$ ელემენტისთვის გვაქვს:

1. $||x||_\varphi^A < \infty$ *მაშინ და მხოლოდ მაშინ* $x \in l^\varphi(\Gamma)$;
2. $||x||_\varphi^A = inf_{k \in (0;k_x) \cap \mathbb{Q}} f_x(k)$.

ლემა 1.14. თუ $\frac{\varphi(u)}{u} \to \infty$, როცა $u \to \infty$, მაშინ $\forall\, x \in l^\varphi(\Gamma), \exists\, k > 0\ ||x||_\varphi^A = f_x(k)$.

ყოველი $x \in l^0(\Gamma)$ ელემენისთვის განვსაზღვროთ სიმრავლე

$$K(x) := \Big\{k > 0 :\ ||x||_\varphi^A = f_x(k)\Big\}.$$

შევნიშნოთ, რომ $K(x) = \emptyset$ მხოლოდ იმ შემთხვევაში, როდესაც $\frac{\varphi(u)}{u} \to a < \infty$ თუ $u \to \infty$.

ლემა 1.15. ვთქვათ $x \in\ l^\varphi(\Gamma)$ და $B \subset\ \Gamma$. მაშინ ყოველი $k\ \in K(x^B)$ რიცხვისათვის, არსებობს $l \leq k$ ისეთი, რომ $l\ \in K(x^B)$.

დამტკიცება. ვთქვათ $x \in l^\varphi(\Gamma)$ და $B \subset\ \Gamma$. დავუშვათ $k \in K(x^B)$ ანუ $||x||_\varphi^A = \frac{1}{k}\Big(1 + I_\varphi(kx)\Big)$. ავიღოთ ნებისმიერი $l > k$. გავქვს

$$\frac{1}{l} 1 + I_\varphi(lx)) = \frac{1}{l}\Big(1 + I_\varphi(lx^B)\Big) + \frac{1}{l}\Big(1 + I_\varphi\big(lx^{\Gamma \setminus B}\big)\Big) \geq$$

$$\frac{1}{k}\Big(1+I_\varphi(kx^B)\Big)+\frac{1}{k}\Big(1+I_\varphi(kx^{\Gamma\setminus B})\Big)=\frac{1}{k}\Big(1+I_\varphi(kx)\Big).$$

ამ უტოლობიდან და თუ გავითვალისწინებთ, რომ $\frac{1}{l}\Big(1+I_\varphi(lx)\Big)\to\infty$ როცა $l\to 0$, მივიღებთ დასამტკიცებელ დებულებას. თეორემა დამტკიცებულია.

ლემა 1.16. თუ $x\in l^0(\Gamma)$, მაშინ $\big||x|\big|_\varphi^o\le\big||x|\big|_\varphi^A$.

დამტკიცება. ვთქვათ $x\in l^0(\Gamma)$ და $k>0$ გვექნება:

$$\big||x|\big|_\varphi^o=sup_{I_\psi(y)\le 1}\frac{1}{k}\sum_\Gamma kxy\le\ sup_{I_\psi(y)\le 1}\frac{1}{k}\ \Big(I_\varphi(kx)+I_\psi(y)\Big)\ \le\ \frac{1}{k}\big(I_\varphi(kx)+1\big).$$

ნებისმიერი $k>0$, საიდანაც მივიღებთ დასამტკიცებელ უტოლობას. თეორემა დამტკიცებულია.

თეორემა 1.17. ნებისმიერი $x\in l^0(\Gamma)$ ფუნქციისათვის $\big||x|\big|_\varphi^A=sup_{B\in\Sigma_1}\big||x^B|\big|_\varphi^A$.

დამტკიცება. პირველ რიგში დავუშვათ, რომ $x\notin l^\varphi(\Gamma)$. მაშინ უნდა ვაჩვენოთ $sup_{B\in\Sigma_1}\big||x^B|\big|_\varphi^A=\infty$. დავუშვათ საწინააღმდეგო $sup_{B\in\Sigma_1}\big||x^B|\big|_\varphi^A<\infty$. ლემა 1.16 ძალით $\big||x^B|\big|_\varphi^o\le\big||x^B|\big|_\varphi^A$ ნებისმიერი $B\in\Sigma_1$ აქედან გამომდინარე $sup_{B\in\Sigma_1}\big||x^B|\big|_\varphi^o\le sup_{B\in\Sigma_1}\big||x^B|\big|_\varphi^A$. ვინაიდან $\big||x^B|\big|_\varphi^o=sup_{B\in\Sigma_1}\big||x^B|\big|_\varphi^o$, მივიღებთ, რომ $\big||x^B|\big|_\varphi^o<\infty$ ანუ $x\in l^\varphi(\Gamma)$ რაც ეწინააღმდეგება დაშვებას.

ახლა დავუშვათ რომ $x\in l^\varphi(\Gamma)$. ზოგადობის შეუზღუდავად შეგვიძლია ვიგულისხმოთ, რომ $\big||x^B|\big|_\varphi^A=1$. გქავს ორი შემთხვევა:

1. $\forall\, B\in\Sigma_1\ K(x^B\ )\ =\ \emptyset$,
2. $\exists\, B\in\Sigma_1\ K(x^B\ )\ \ne\ \emptyset$.

განვიხილოთ პირველი შემთხვევა. აღვნიშნოთ $A:=lim_{u\to\infty}\frac{\varphi(u)}{u}<\infty$. თუ გავითვალისწინებთ ლემა 1.14 და ტოლობას

$$\big||x^B|\big|_\varphi^A=lim_{k\to\infty}\frac{1}{k}\Big(1+I_\varphi(kx^B)\Big)=A\big||x^B|\big|_1\ \textit{ყოველი}\,B\in\Sigma_1,$$

მაშინ გვექნება,

$$sup_{B\in\Sigma_1}||x^B||_\varphi^A = sup_{B\in\Sigma_1}A||x^B||_1 = A||x||_1 = lim_{k\to\infty}\frac{1}{k}\left(1+I_\varphi(kx)\right) \ \geq \ ||x^B||_\varphi^A.$$

შებრუნებული უტოლობა ცხადია.

განვიხილოთ მეორე შემთხვევა. აღვნიშნოთ B_0-ით რაიმე სასრული სიმრავლე რომლისთვისაც არსებობს $l \in K(x^{B_0})$. განვსაზღვროთ სიმრავლე $L := \{k > 0 : \exists\, B \in \Sigma_1 \left(B_0 \subset B \wedge k \in K(x^B)\right)\}$. გავაქვს $l \in L$, ასე რომ $L \neq \emptyset$. ვთქვათ $k_0 := \inf L$. ჩვენ ვაჩვენბთ, რომ $k_0 \geq 1$. ავიღოთ რაიმე სიმრავლე $B \in \ \Sigma_1$ ისეთი, რომ $B_0 \subset B$ და $k \in K(x^B)$. საკმარიასია ვაჩვენოთ, რომ $k \geq 1$. დავუშვათ საწინააღმდეგო $k < 1$. ლემა 1.15 ძალით არსებობოს $s \in K(x)$ ისეთი, რომ $s \leq k < 1$. აქედან გამომადინარე, $1 = ||x||_\varphi^A = \frac{1}{s}\left(1+I_\varphi(sx)\right) \geq \frac{1}{s} > 1$, რომელიც არის წინააღმდეგობა. შესაბამისად ვაჩვენეთ, რომ $k_0 \geq 1$.

ავიღოთ ნებიემიერი $\varepsilon > 0$ ვთქვათ $C \in \Sigma_1$ სიმრავლე ისეთია, რომ $B_0 \subset C$ და

$$\frac{1}{k_0}\left(1+I_\varphi(k_0x^C)\right) \geq \frac{1}{k_0}\left(1+I_\varphi(k_0x)\right) - \frac{\varepsilon}{2} \geq \ ||x||_\varphi^A - \frac{\varepsilon}{2}.$$

გვექნება $k_C \in K(x^C)$:

$$||x||_\varphi^A - \frac{\varepsilon}{2} - \left(\frac{1}{k_0} - \ \frac{1}{k_C}\right) \leq \frac{1}{k_0} + \frac{I_\varphi(k_0x^C)}{k_0} - \ \frac{1}{k_0} + \frac{1}{k_C} = \frac{1}{k_C} + \ \frac{I_\varphi(k_0x^C)}{k_0} \leq \frac{1}{k_C} + \ \frac{I_\varphi(k_Cx^C)}{k_C} = ||x^C||_\varphi^A \leq sup_{B\in\Sigma_1}||x^B||_\varphi^A.$$

ზემოთ მოცემული უტოლობა სამართლიანია B_0 სიმრავლის ნებისმიერი $C \in \Sigma_1$სიმრავლითვის. აქედან გამომდინარე, ავიღოთ C ზემოთ მოცემული თვისებებით და $\frac{1}{k_0} - \frac{1}{k_C} \leq \frac{\varepsilon}{2}$, მივიღებთ დასმტკიცებელ დებულებას. თეორემა დამტკიცებულია.

თეორემა 1.18. ნებისმიერი $x \in l^0(\Gamma)$ ელემენტისათვის გვაქვს $||x||_\varphi^A = ||x||_\varphi^o$.

დამტკიცება. გვაქვს $||x^B||_\varphi^A = ||x^B||_\varphi^O$ ყოველი $B \in \Sigma_1$. თუ ტოლობის ორივე მხარეს ავიღებთ სუპრემუმს ყოველი $B \in \Sigma_1$ სიმრავლისთვის და გამოვიყენოთ თეორემა 1.17 და ლემა 1.8 მივღებთ დასამტკიცებელ დებულებას. თეორემა დამტკიცებულია.

$l^{\varphi}(\Gamma)$ სივრცის $h^{\varphi}(\Gamma)$ ქვესივრცე

განვსაზღვროთ $l^{\varphi}(\Gamma)$ სივრცის $h^{\varphi}(\Gamma)$ ქვესივრცე შემდეგნაირად:

$$h^{\varphi}(\Gamma) = \left\{ x \in l^{\varphi}(\Gamma) : \ \forall \lambda \ > \ 0 \ \exists \ I \in \Sigma_1 \ \sum_{i \in \Gamma \setminus I} \varphi\big(\lambda x(i)\big) < \infty \ \right\}.$$

თეორემა 2.1. ნებისმიერი $x \in l^{0}(\Gamma)$ ელემენტისათვის $x \in h^{\varphi}(\Gamma)$ მაშინ და მხოლოდ მაშინ როცა

$$\forall \ \varepsilon > 0 \ \exists \ I \in \ \Sigma_1 \ \big||x - x^{I}|\big| \leq \varepsilon.$$

შენიშვნა: ზემოთ მოყვანილი პირობა გულისხმობს, რომ ქვესივრცე $h^{\varphi}(\Gamma)$ რეალურად არის $\{x \in l^{\varphi}(\Gamma) : supp(x) \in \Sigma_1 \}$ სიმრავლის ჩაკეტვა ნორმით:

$$h^{\varphi}(\Gamma) = \mathrm{cl}\, \{x \in l^{\varphi}(\Gamma) : supp(x) \in \Sigma_1 \}.$$

დამტკიცება. დავუშვათ, რომ $x \in l^{\varphi}(\Gamma)$ და $\forall \ \varepsilon > 0 \ \exists \ I \in \ \Sigma_1 \ \big||x - x^{I}|\big| \leq \varepsilon$. დავაფიქსიროთ $\lambda > 0$. $\varepsilon = \frac{1}{\lambda}$- თვის არსებობს სიმრავლე $I \in \ \Sigma_1$ ისეთი, რომ

$$\big||x - x^{I}|\big|_{\varphi} \leq \frac{1}{\lambda}.$$

$\big||\lambda(x - x^{I})|\big|_{\varphi} \leq 1$ და შესაბამისად $I_{\varphi}\big(\lambda(x - x^{I})\big) \leq 1$. აქედან გამომდინარე

$$\sum_{i \in \Gamma \setminus I} \varphi\big(\lambda x(i)\big) = I_{\varphi}\big(\lambda(x - x^{I})\big) \leq 1 < \infty.$$

საიდანაც გვექნება $x \in h^{\varphi}(\Gamma)$.

ახლა დავუშვათ, რომ $x \in h^{\varphi}(\Gamma)$ და $\varepsilon > 0$. $\lambda = \frac{1}{\varepsilon}$ რიცხვისთვის არსებობს $I \in \ \Sigma_1$ სიმრავლე ისეთი, რომ $\sum_{i \in \Gamma \setminus I} \varphi\left(\frac{x(i)}{\varepsilon}\right) \leq M < \infty$, რომელიღაც $M > 0$ რიცხვისთვის. მოყვანილ ჯამში შეიძლება გვქონდეს არაუმეტეს ელემენტების თვლადი რაოდენობა, რომელიც არ არის ნულის ტოლი. აქედან გამომდინარე, არსებობს სასრული სიმრავლე $J \subset I$ ისეთი, რომ $\sum_{i \in \Gamma \setminus J} \varphi\left(\frac{x(i)}{\varepsilon}\right) \leq 1$. მაშასადამე გვაქვს $I_{\varphi}\left(\frac{(x - x^{J})}{\varepsilon}\right) \leq 1$, საიდანაც მივიღებთ $\big||x - x^{J}|\big|_{\varphi} \leq \varepsilon$.

ზემოთ მოყვანილი თეორემა შეიძლება ჩამოვაყალიბოდ შემდეგნაირად:

$$x \in h^{\varphi}(\Gamma) \Longleftrightarrow inf_{I \in \ \Sigma_1} \big||x - x^{I}|\big| = 0$$

ან

$x \in h^{\varphi}(\Gamma) \iff განზოგადებული\ მიმდევრობა\ (x^I)_{I\in\Sigma_1}\ ნორმით\ კრებადია\ x - კენ$

შემდეგში გამოვიყენებთ აღნიშვნებს:

$$\left(l^{\varphi}(\Gamma), ||\cdot||_{\varphi}\right) = l^{\varphi}(\Gamma), \left(l^{\varphi}(\Gamma), ||\cdot||_{\varphi}^{o}\right) = l_o^{\varphi}(\Gamma)$$

$$\left(h^{\varphi}(\Gamma), ||\cdot||_{\varphi}\right) = h^{\varphi}(\Gamma), \left(h^{\varphi}(\Gamma), ||\cdot||_{\varphi}^{o}\right) = h_o^{\varphi}(\Gamma)$$

იმ შემთხვევაში როცა არსებითი არ არის რომელ ნორმას გამოვიყენებთ, სიმარტივისთვის ავიღოთ $l^{\varphi}(\Gamma)$ და $h^{\varphi}(\Gamma)$.

ლემა 2.2. $h^{\varphi}(\Gamma)$ სივრცე არის დედეკინდის აზრით სრული.

დამტკიცება. თუ გავითვალისწინებთ, რომ $l^{0}(\Gamma)$ სივრცე არის დედეკინდის აზრით სრული და გამვიყენებთ ლემა 1.1 მივიღებთ, რომ $h^{\varphi}(\Gamma) \in (DC)$

ლემა 2.3. $h^{\varphi}(\Gamma)$ სივრცე არის *დალაგებიას მიმართ* $\sigma -$ *უწყვეტი*.

დამტკიცება. ვთქვათ $h^{\varphi}(\Gamma)$ სივრცეში მოცემული გვაქვს მიმდევრობა (x_n) ისეთი, რომ $x_n \downarrow 0$. უნდა ვაჩვენოთ, რომ ნებისმიერი $\lambda > 0$ რიცხივისთვის გვაქვს $I_{\varphi}(\lambda x_n) \downarrow 0$. დავაფიქსიროთ $\lambda > 0$ რიცხვი. $x_1 \in h^{\varphi}(\Gamma)$ ელემენტისთვის, მოიძებნება სიმრავლე $I \in \Sigma_1$ ისეთი, რომ $I_{\varphi}\left(\lambda x_1^{\Gamma\setminus I}\right) < \infty$. ლებეგის თეორემიდან ზღვარზე გადასვლის შესახებ მივიღებთ რომ $I_{\varphi}\left(\lambda x_n^{\Gamma\setminus I}\right) \downarrow 0$. იქედან გამომდინარე, რომ $x_n \downarrow 0$ გვექნება $x_n(i) \downarrow 0\ \forall\, i \in \Gamma$ მაშასადამე შეგვიძლია ვიგულისხმოთ, რომ $i \in I$ მაშინ $\forall\, i \in I, \varphi\big(\lambda x_n(i)\big) \downarrow 0$. საბოლოოდ მივიღებთ,

$$I_{\varphi}(\lambda x_n) = \sum_{i\in\Gamma\setminus I} \varphi\big(\lambda x_n(i)\big) + \sum_{i\in I} \varphi\big(\lambda x_n(i)\big) = \left(I_{\varphi}\left(\lambda x_n^{\Gamma\setminus I}\right) + \sum_{i\in I} \varphi\big(\lambda x_n(i)\big)\right) \downarrow 0.$$

თეორემა დამტკიცებულია.

შედეგი 2.4. $h^{\varphi}(\Gamma)$ სივრცე არის *დალაგებიას მიმართ უწყვეტი.*

დამტკიცება. დებულების სამართლიანობა გამამომდინარეობს თეორემა 1.2 და იმ ფაქტიდან, რომ $h^{\varphi}(\Gamma)$ სივრცე არის დედეკინდის აზრით სრული და *დალაგებიას მიმართ* $\sigma -$ *უწყვეტი.*

შედეგი 2.5. სამართლიანია შემდეგი ჩართვა $h^{\varphi}(\Gamma) \subset l^{\varphi}(\Gamma)_a$.

დამტკიცება. იქედან გამომდინარე, რომ $h^{\varphi}(\Gamma)$ ქვესივრცე არის იდეალი $l^{\varphi}(\Gamma)$ სივრცეში ზემოთ მოყვანილი დებულების სამათლიანობა გამომდინარეობს შედეგი 2.4. და თეორემა 1.3-დან.

თეორემა 2.6. ტოლობა სამართლიანია $h^{\varphi}(\Gamma) = \ l^{\varphi}(\Gamma)_a$.

დამტკიცება. საკმარია ვაჩვენოთ $l^{\varphi}(\Gamma)_a \subset h^{\varphi}(\Gamma)$. ავიღოთ ნებისმიერი $x \in l^{\varphi}(\Gamma)_a$. იქედან გამომდინარე, რომ $x \in h^{\varphi}(\Gamma)$ მაშინ და მხოლოდ მაშინ როცა $|x| \in h^{\varphi}(\Gamma)$, შეგვიძლია დავუშვათ, რომ $x \geq 0$. უნდა ვაჩვენოთ, რომ ნებისმიერი $\lambda > 0$ მოიძებნება $I \in \Sigma_1$სიმრავლე რომლისთვისაც $I_{\varphi}\left(\lambda x_1^{\Gamma\setminus I}\right) < \infty$. დავაფიქსიროთ $\lambda > 0$. $\{\Gamma \setminus I :\ I\ \in\ \Sigma_1\}$ სიმრავლეში შეგვიძლია შემოვიღოთ დალაგება:

$$(\Gamma\setminus I\ \leq\ \Gamma\setminus J)\ \Longleftrightarrow\ (\Gamma\setminus I\ \supset\ \Gamma\setminus J)$$

ცხადია ზემოთ მოყვანილი სიმრავლე არის მიმართული სიმრავლე. ნებისმიერი $\Gamma \setminus I$ ($I\ \in\ \Sigma_1$) სიმრავლე დავუკავშიროთ $x^{\Gamma\setminus I}$ ელემენტს. ჩვენ მივიღებთ განზოგადებულ მიმდევრობას $\left(x^{\Gamma\setminus I} \downarrow 0\right)$, რომელიც მონოტონურად მიისწრაფვის ნულისკენ ე.ი. თუ $(\Gamma\setminus I\ \leq\ \Gamma\setminus J)$ მაშინ $x^{\Gamma\setminus I} \geq x^{\Gamma\setminus J}$ და $inf_{I\in\Sigma_1} x^{\Gamma\setminus I} = 0$. იმ დაშვების ძალით, რომ $x\ \in l^{\varphi}(\Gamma)_a$ და აქედან გამომდინარე რომ $x\ \geq x^{\Gamma\setminus I}$ ნებისმიერი $I\ \in\ \Sigma_1$, მივიღებთ, რომ $inf_{I\in\Sigma_1}\left\|x^{\Gamma\setminus I}\right\|_{\varphi} = 0$. ვთქვათ $I_0\ \in\ \Sigma_1$ იყოს ისეთი სიმრავლე, რომ $\left\|x^{\Gamma\setminus I_0}\right\|_{\varphi} \leq \frac{1}{\lambda}$. მაშინ $\left\|\lambda x^{\Gamma\setminus I_0}\right\|_{\varphi} \leq 1$ და საბოლოოდ მივიღებთ $I_{\varphi}\left(\lambda x_1^{\Gamma\setminus I_0}\right) \leq 1 < \infty$. თეორემა დამტკიცებულია.

თეორემა 2.7. $h^{\varphi}(\Gamma)$ სამართლიანია ქვესივრცის შემდეგი დახასიათება:

$$h^{\varphi}(\Gamma) = \left\{x\ \in\ l^{\varphi}(\Gamma) :\ |x|\ \geq\ x_n\ \downarrow\ 0\ \Rightarrow\ \left\|x_n\right\|_{\varphi}\ \downarrow\ 0\right\}.$$

დამტკიცება. თუ გამოვიყენებთ თეორემა 2.6 და 1.3-ს და გავითვალისწინებთ იმ ფაქტს, რომ ყველა მიმდევრობა არის განზოგადებული მიდევრობა დავასკვნით, რომ სამათლიანია შემდეგი წარმოგენა:

$$\begin{aligned} h^{\varphi}(\Gamma) &= \left\{x\ \in\ l^{\varphi}(\Gamma) :\ |x|\ \geq\ x_\alpha\ \downarrow\ 0\ \Rightarrow\ \left\|x_\alpha\right\|_{\varphi}\ \downarrow\ 0\right\} \\ &\subset \left\{x\ \in\ l^{\varphi}(\Gamma) :\ |x|\ \geq\ x_n\ \downarrow\ 0\ \Rightarrow\ \left\|x_n\right\|_{\varphi}\ \downarrow\ 0\right\}. \end{aligned}$$

შეგვიძლია ვაჩვენოთ, რომ $A := \left\{x \in l^{\varphi}(\Gamma) : |x| \geq x_n \downarrow 0 \Rightarrow \left||x_n|\right|_{\varphi} \downarrow 0\right\}$ არის იდეალი $l^{\varphi}(\Gamma)$ სივრცეში და ასევე $A \in (\sigma - OC)$. იქედან გამომდინარე, რომ $l^{\varphi}(\Gamma) \in (DC)$, გვექნება $A \in (DC)$ (თეორემა 1.1 ძალით) და ასევე $A \in (OC)$ (თეორემა 1.2 ძალით). თეორემა 1.3 ძალით მივიღებთ, რომ $A \subset l^{\varphi}(\Gamma)_a = h^{\varphi}(\Gamma)$. თეორემა დამტკიცებულია.

თეორემა 2.8. თუ $x \in h^{\varphi}(\Gamma)$, მაშინ $supp(x)$ არის არა უმეტეს თვლადი.

დამტკიცება. დავუშვათ $x \in h^{\varphi}(\Gamma)$ და ნებისმიერი $n \in N$ განვსაზღვროთ სიმრავლე

$$A_n = \left\{i \in \Gamma : |x(i)| > \frac{1}{n}\right\}.$$

ვაჩვენოთ, რომ $A_n \in \Sigma_1$. დავუშვათ $I \in \Sigma_1$ არის ისეთი სიმრავლე, რომლისთვისაც

$$I_{\varphi}\left(n\left(a_{\varphi} + 1\right)x^{\Gamma \setminus I}\right) < \infty.$$

იქედან გამომდინარე, რომ $A_n = (A_n \cap (\Gamma \setminus I)) \cup (A_n \cap I)$, საკმარისია ვაჩვენოთ, რომ $A_n \cap (\Gamma \setminus I) \in \Sigma_1$. აღნიშნულის სამართლიანობა შეგვიძლია ვაჩვენოთ შემდეგნაირად:

$$\varphi\left(a_{\varphi} + 1\right)\mu\left(A_n \cap (\Gamma \setminus I)\right) = \sum_{A_n \cap (\Gamma \setminus I)} \varphi\left(a_{\varphi} + 1\right)$$

$$\leq \sum_{i \in (\Gamma \setminus I)} \varphi(n\left(a_{\varphi} + 1\right)x(i)) = I_{\varphi}\left(n\left(a_{\varphi} + 1\right)x^{\Gamma \setminus I}\right) < \infty.$$

თეორემა დამტკიცებულია.

ლემა 2.9. ნებისმიერი $x \in l^{\varphi}(\Gamma)$ ელემენტისათვის სამათლიანია შემდეგი ტოლობა

$$inf_{z \in h^{\varphi}(\Gamma)}\left||x - z|\right|_{\varphi} = inf_{\substack{y \in l^{\varphi}(\Gamma), \\ supp(y) \in \Sigma_1}} \left||x - y|\right|_{\varphi}.$$

დამტკიცება. დავაფიქსიროთ რაიმე $x \in l^{\varphi}(\Gamma)$.

$$inf_{z \in h^{\varphi}(\Gamma)}\left||x - z|\right|_{\varphi} \leq inf_{\substack{y \in l^{\varphi}(\Gamma), \\ supp(y) \in \Sigma_1}} \left||x - y|\right|_{\varphi}.$$

ცხადია სამართლინია უტოლობა. ვაჩვენოთ საპირისპირო უტოლობის სამათლიანიბა. ავიღოთ ნებისმიერი $\varepsilon > 0$ და $z \in h^{\varphi}(\Gamma)$. თეორემა 2.1 ძალით გვაქვს

$$h^{\varphi}(\Gamma) = \mathrm{cl}\,\{x \in l^{\varphi}(\Gamma) : supp(x) \in \Sigma_1\},$$

აქედან გამომდინარე არსებობს $y \in l^{\varphi}(\Gamma)$ ისეთი, რომ $supp(y) \in \Sigma_1$ და $||z-y||_{\varphi} < \varepsilon$.

მაშასადამე

$$||x-y||_{\varphi} \leq ||x-z||_{\varphi} + ||z-y||_{\varphi} \leq ||x-z||_{\varphi} + \varepsilon$$

ბოლო უტოლობიდან გამომდინარე გვაქვს

$$inf_{\substack{y \in l^{\varphi}(\Gamma) \\ supp(y) \in \Sigma_1}} ||x-y||_{\varphi} \leq ||x-z||_{\varphi} + \varepsilon$$

ვინაიდან $z \in h^{\varphi}(\Gamma)$ ნებისმიერად გვქონდა აღებული, ამიტომ გვექნება:

$$inf_{\substack{y \in l^{\varphi}(\Gamma) \\ supp(y) \in \Sigma_1}} ||x-y||_{\varphi} \leq inf_{z \in h^{\varphi}(\Gamma)} ||x-z||_{\varphi} + \varepsilon$$

ზემოთ მოყვანილი უტოლობა სამათრლიანია ნებისმიერი $\varepsilon > 0$ რიცხვისათვის, აქედან გამომდინარე მივიღებთ დამტკიცებული დებულების სამათლიანობას. ლემა დამტკიცებულია.

თეორემა 2.10. ნებისმიერი $x \in l^{\varphi}(\Gamma)$ ელემენტისათვის სამრთლიანია შემდეგი ტოლობა

$$d(x) = d_o(x) = inf_{I \in \Sigma_1} ||x - x^I||_{\varphi} = inf_{I \in \Sigma_1} ||x - x^I||_{\varphi}^{o} = \theta(x).$$

სადაც $d(x)$ და $\theta(x)$ განმარტებულია შესაბამისად ტოლობებით:

$$d(x) = inf_{y \in h^{\varphi}(\Gamma)} ||x-y||_{\varphi}, d_o(x) = inf_{y \in h^{\varphi}(\Gamma)} ||x-y||_{\varphi}^{o} \text{ და}$$

$$\theta(x) = \inf\left\{\lambda > 0 : \exists\, I \in \Sigma_1, \sum_{i \in \Gamma \setminus I} \varphi\left(\frac{x(i)}{\lambda}\right) < \infty\right\}.$$

დამტკიცება. თუ $x \in h^{\varphi}(\Gamma)$ მაშინ ზემოთ მოყვანილი ტოლობა არის ტრივიალური. შესაბამისად დავუშვათ, რომ $x \notin h^{\varphi}(\Gamma)$. იქედან გამომდინარე, რომ

$$h^{\varphi}(\Gamma) = \{x : \theta(x) = 0\}, \textit{მაშინ } \theta(x) > 0$$

თავდაპირველად ვაჩვენოთ, რომ $\theta(x) \leq d(x)$. ავიღოთ ნებისმიერი $\varepsilon > 0$, ისეთი რომ $0 < \varepsilon < \theta(x)$ და $y \in l^{\varphi}(\Gamma)$ ისეთი, რომ $supp(y) \in \Sigma_1$. მაშინ გვექნება

$$\sum_{i\in\Gamma\setminus I}\varphi\left(\frac{x(i)}{\theta(x)-\varepsilon}\right)=\infty\ (\forall I\in\ \Sigma_1),$$

კერძოდ,

$$\sum_{i\in\Gamma\setminus supp(y)}\varphi\left(\frac{x(i)}{\theta(x)-\varepsilon}\right)=\infty.$$

აქედან გამომდინარე

$$I_\varphi\left(\frac{x-y}{\theta(x)-\varepsilon}\right)=\sum_{i\in\Gamma}\varphi\left(\frac{x-y}{\theta(x)-\varepsilon}\right)=\sum_{i\in\Gamma\setminus supp(y)}\varphi\left(\frac{x(i)}{\theta(x)-\varepsilon}\right)+\sum_{i\in supp(y)}\varphi\left(\frac{(x-y)(i)}{\theta(x)-\varepsilon}\right)=\infty$$

ბოლო ტოლობიდან დავასკვნით, რომ $\left\|\frac{x-y}{\theta(x)-\varepsilon}\right\|_\varphi>1,$ საიდანაც $\|x-y\|_\varphi>\theta(x)-\varepsilon.$ თუ გავითვალისწინებთ, რომ $\varepsilon>0$ რიცხვი აღებული იყო ნებისმიერად დავასკვნით, რომ $\|x-y\|_\varphi\geq\theta(x).$ შევნიშნოთ, რომ y ელემენტის საყრდენი არის Σ_1 სიმრავლის ელემენტი ამიტომ

$$\inf_{\substack{y\in l^\varphi(\Gamma)\\ supp(y)\in\Sigma_1}}\|x-y\|_\varphi\geq\theta(x)$$

და თეორემა 2.9 ძალიათ სამართლიანია შემდეგი უტოლობა $d(x)\geq\ \theta(x).$

ზემოთ მიღებული შეფასებას თუ გამოვიყენებთ, გვექნება:

$$\theta(x)\ \leq d(x)\leq d_o(x)\leq inf_{I\in\Sigma_1}\|x-x^I\|_\varphi^o$$

$$\theta(x)\leq d(x)\leq inf\ _{I\in\Sigma_1}\|x-x^I\|_\varphi\leq inf_{I\in\Sigma_1}\|x-x^I\|_\varphi^o.$$

იმისთვის, რომ დავასრულოთ დამტკიცება საკმარისია ვაჩვენოთ, რომ

$$inf_{I\in\Sigma_1}\|x-x^I\|_\varphi^o\leq\ \theta(x).$$

ნებისმიერად მოცემული $\varepsilon>0$ რიცხვისათვის არსებობს $I\in\Sigma_1$ ისეთი, რომ

$$\sum_{i\in\Gamma\setminus I}\varphi\left(\frac{x(i)}{\theta(x)+\varepsilon}\right)<\infty.$$

აქედან გამომდინარე, არსებობს $J\in\Sigma_1$ სიმრავლე ისეთი, რომ

$$\sum_{i\in\Gamma\setminus J}\varphi\left(\frac{x(i)}{\theta(x)+\varepsilon}\right)<\infty.$$

ნებისმიერი $K\in\Sigma_1$ სიმრავლისთვის, რომელიც აკმაყოფილებს პირობას $J\subset K$ სამართლიანია

$$\sum_{i\in\Gamma}\varphi\left(\frac{x(i)-x^K(i)}{\theta(x)+\varepsilon}\right)\le\sum_{i\in\Gamma\setminus J}\varphi\left(\frac{x(i)}{\theta(x)+\varepsilon}\right)<\varepsilon.$$

თეორემა 1.18 ძალით სამართლიანია

$$\left||x-x^K|\right|_\varphi^o\le(\theta(x)+\varepsilon)\left(1+\sum_{i\in\Gamma}\varphi\left(\frac{x(i)-x^K(i)}{\theta(x)+\varepsilon}\right)\right)<(\theta(x)+\ \varepsilon)(1\ +\ \varepsilon),$$

საიდანაც გვექნება

$$inf_{K\in\Sigma_1}\left||x-x^K|\right|_\varphi^o=inf_{K\in\Sigma_1,J\subset K}\left||x-x^K|\right|_\varphi^o\le(\theta(x)+\ \varepsilon)(1\ +\ \varepsilon).$$

$\varepsilon>0$ რიცხვის ნებისმიერობის გამო მივიღებთ საჩვენებელ უტოლობას. თეორემა დამტკიცებულია.

განმარტება. ვთქვათ $L>1$. ვიტყვით, რომ φ ფუნქცია აკმაყოფილებს δ_L პირობას (ჩავწერთ როგორც $\varphi\in\delta_L$), თუ არსებობს $K>0,u_0>0$ ისეთი, რომ $0<\ \varphi(u_0)<\infty$ და სამართლიანია შემდეგი უტოლობა $\varphi(Lu)\le K\varphi(u)$, როდესაც $|u|\le u_0$.

ლემა 2.11. თუ $\varphi\in\delta_L$ რაიმე $L>1$ რიცხვისთვის, მაშინ $\varphi(x)=0$, მხოლოდ მაშინ როცა $x=0$.

დამტკიცება. დავუშვათ $\varphi\in\delta_L$ რაიმე $L>1$ რიცხვისთვის. სამართლიანია უტოლობა

$$a_\varphi:=\sup\{u\ge0:\varphi(u)=0\}>0.$$

იქედან გამომდიანრე, რომ $a_\varphi+\varepsilon>\ a_\varphi,$ გვაქვს $\varphi\left(a_\varphi+\varepsilon\right)>0$. მეორე მხრივ იქედან გამომდინარე, რომ $L>1$ რიცხვისთვის არსებობს $\varepsilon>0$ ისეთი, რომ $\frac{a_\varphi+\varepsilon}{L}<a_\varphi$ და $\varphi\in\delta_L$, მივიღებთ

$$\varphi\left(a_\varphi+\varepsilon\right)=\varphi\left(L\frac{a_\varphi+\varepsilon}{L}\right)\le K\varphi\left(\frac{a_\varphi+\varepsilon}{L}\right)=0,$$

რაც წინააღმდეგობაა.

თუ გამოვიყენებთ δ_L და δ_2 განმარტებებს, ადვილად დავასკვნით, რომ სამართლიანია შემდეგი ლემა.

ლემა 2.12. ნებისმიერი $L > 1$ რიცხვისთვის, ის ფაქტი, რომ $\varphi \in \delta_L$ ექვივალენტურია $\varphi \in \delta_2$.

თეორემა 2.13. თუ $\varphi \in \delta_2$, მაშინ $h^{\varphi}(\Gamma) = l^{\varphi}(\Gamma)$.

დამტკიცება. დავუშვათ $x \in l^{\varphi}(\Gamma)$ და $\varphi \in \delta_2$. მაშინ არსებობს $\lambda_0 > 0$ რიხცვი ისეთი, რომ $I_{\varphi}(\lambda_0 x) < \infty$. ავიღოთ ნებისმიერი $\lambda > 0$ რიცხვი. თუ $\lambda \leq \lambda_0$, ცხადია, რომ $I_{\varphi}(\lambda x) < \infty$. ვავუშვათ, რომ $\lambda > \lambda_0$ ე.ი. $\frac{\lambda}{\lambda_0} > 1$. ლემა 2.12 ძალით $\varphi \in \delta_{\frac{\lambda}{\lambda_0}}$, რაც იმას ნიშნავს, რომ, არსებობს $K > 0$ და $u_0 > 0$ ისეთი, რომ $0 < \varphi(u_0) < \infty$ და $\varphi\left(\frac{\lambda u}{\lambda_0}\right) \leq K\varphi(u)$, როცა $|u| \leq u_0$.

განვსაზღვროთ $I = \{i \in \Gamma : |\lambda_0 x(i)| > u_0\}$ სიმრავლე. იქედან გამომდინარე, რომ

$$0 < \sum_{i \in I} \varphi(u_0) \leq \sum_{i \in I} \varphi\big(\lambda_0 x(i)\big) \leq I_{\varphi}(\lambda_0 x) < \infty$$

მიღებთ, რომ $I \in \Sigma_1$ და შესაბამისად სამართლიანია შემდეგი უტოლობა:

$$\sum_{i \in \Gamma \setminus I} \varphi\big(\lambda x(i)\big) \leq \sum_{i \in \Gamma \setminus I} \varphi\left(\frac{\lambda}{\lambda_0} \lambda_0 x(i)\right) \leq \sum_{i \in \Gamma \setminus I} K\varphi\big(\lambda_0 x(i)\big) \leq K I_{\varphi}(\lambda_0 x) < \infty.$$

თეორემა დამტკიცებულია.

$h^{\varphi}(\Gamma)$ სივრცის შეუღლებული სივრცე.

ლემა 3.1. ნებისმიერი $x, y \in l^0(\Gamma)$ ელემენტებისათვის სამართლიანია ჰელდერის უტოლობა:

$$\sum_{\Gamma} |xy| \leq \big||x|\big|_{\varphi} \big||y|\big|_{\psi}^{o}.$$

დამტკიცება. როდესაც $x = 0$ ან $\big||x|\big|_{\varphi} = \infty$, ჰელდერის ზემოთ მოყვანილი უტოლობის სამართლინობა ცხადია. დავუშვათ, რომ $0 < \big||x|\big|_{\varphi} < \infty$, გვექნება

$$\sum_{\Gamma} |xy| = \big||x|\big|_{\varphi} \sum_{\Gamma} \frac{|x|}{\big||x|\big|_{\varphi}} |y| \leq \big||x|\big|_{\varphi} \big||y|\big|_{\psi}^{o}$$

განმარტება. შემდგომში X^*-ით აღნიშნული იქნება $(X, ||\cdot||)$ სივრცის შეუღლებული სივრცეს. $||F||$ სიმბოლოთი აღვნიშნოთ X^* სივრცის ნებისმიერი $F \in X^*$ ფუნქციონალის ნორმა:

$$||F|| := \sup\{|F(x)| : ||x|| \leq 1\}.$$

თეორემა 3.2. 1) ყოველი $y \in l^{\psi}(\Gamma)$ ელემეტისათვის, $F(x) = \sum_{\Gamma} xy$, $\forall\, x \in h^{\varphi}(\Gamma)$, განსაზღვრავს $F \in h^{\varphi}(\Gamma)^*$ ფუნქციონალს, როლის ნორმა წარმოდგენილია შემდეგი ფორმულით $||F|| = ||y||_{\psi}^{o}$. 2) ნებისმიერი $G \in h^{\varphi}(\Gamma)^*$ ფუნქციონალისთვის არსებობს $y \in l^{\psi}(\Gamma)$ ელემენტი ისეთი, რომ სამართლიანია წარმოდგენა $G(x) = \sum_{\Gamma} xy$, $\forall\, x \in h^{\varphi}(\Gamma)$.

დამტკიცება. ვთქვათ $y \in l^{\psi}(\Gamma)$. განვსაზღვროთ $F(x) = \sum_{\Gamma} xy$. ჰელდერის უტოლობის ძალით სამართლანია შემდეგი უტოლობა $|F(x)| \leq ||x||_{\varphi}||y||_{\psi}^{o}$, აქედან გამოდინარე F წრფივი ფუნქციონალი არის კორექტულად განსაზღვრული $h^{\varphi}(\Gamma)$ სივრცეზე და $|F(x)| \leq ||y||_{\psi}^{o} < \infty$, მაშასადამე F არის უწყვეტი. განვსაზღვროთ

$$e_j(i) = \begin{cases} 1, \textit{როცა } i = j, \\ 0, \textit{როცა } i \neq j, \end{cases} \quad (i, j \in \Gamma).$$

მაშინ $y(j) = F(e_j), \forall\, i \in \Gamma$. ლემა 1.8 ძალით სამართლიანია

$$||y||_{\psi}^{o} = \left|\left|\left(F(e_i)\right)_{i\in\Gamma}\right|\right|_{\psi}^{o} = sup_{\substack{I_{\varphi}(x)\leq 1 \\ supp(x)\in\Sigma_1}} \sum_{i\in\Gamma} x(i)F(e_i) =$$

$$sup_{\substack{I_{\varphi}(x)\leq 1 \\ supp(x)\in\Sigma_1}} F(x) \leq sup_{\substack{I_{\varphi}(x)\leq 1 \\ supp(x)\in\Sigma_1}} ||F||\,||x||_{\varphi} \leq ||F||.$$

მაშასადამე ტოლობა ნაჩვენებია, $||F|| = ||y||_{\psi}^{o}$.

ზემოთ ჩატარებული მსჯელობიდან შეგვიძლია ვაჩვენოთ, რომ $y = \left(G(e_j)\right)_{i\in\Gamma}$, ელენტისთვის სამართლიანია უტოლობა $||y||_{\psi}^{o} \leq ||G|| < \infty$ და შედეგი 1.11 ძალით $y \in l_o^{\psi}(\Gamma)$ სამართლიანია ნებისმიერი $G \in h^{\varphi}(\Gamma)^*$ ფუნქციონალისთვის. ახლა ვაჩვენოთ, რომ F ფუნქციონალი განსაზღრულია y-ის საშუალებით და ემთხვევა მოცემულ G ფუნქციონალს. F და G ფუნქციონალები ნადვილად ტოლია $\{x \in h^{\varphi}(\Gamma) : supp(x) \in \Sigma_1\}$ სიმარავლეზე და $h^{\varphi}(\Gamma)$ სივრცე არის ამ სიმრავლის ჩაკეტვა, მაშასადამე F და G ფუნქციონალების უწყვეტობის გამო მივიღებთ, რომ $F = G$.

თეორემა 3.3-დან ცხადია, რომ ყოველი $v \in l^{\psi}(\Gamma)$ ელემენტი განსაზღვრავს წრფივ ფუნქციონალს $h^{\varphi}(\Gamma)$ სივრცეზე, რომელსაც აღვნიშნავთ F_v. შევნიშნოთ, რომ F_v ფუნქციონალი გაგრძელდება $l^{\varphi}(\Gamma)$ სივრცის ფუნქციონალამდე, რომელიც ნორმას ინარჩუნებს. განვსაზღვროთ $l^{\varphi}(\Gamma)$ სივრცის ფუნქციონალი შემდეგნაირად $G(x) = \sum_{\Gamma} xy$, $\left(x \in l^{\varphi}(\Gamma)\right)$ და $G(x) = F_v(x)$ $x \in h^{\varphi}(\Gamma)$ ელემენტისთვის. ჰელდერის უტოლობის ძალით მივიღებთ

$$|G(x)| = \left|\sum_{\Gamma} xy\right| \leq \left||x|\right|_{\varphi} \left||y|\right|_{\psi}^{o} \left(\forall\, x \in l^{\varphi}(\Gamma)\right),$$

ე.ი. G ფუნქციონალი არის კორექტულად განსაზღრული $l^{\varphi}(\Gamma)$ სივრცეზე და $\left||G|\right| \leq \left||y|\right|_{\psi}^{o}$. იქედან გამომდინარე, რომ G ფუნქციონალი არის F_v ფუნქციონალის გაგრძელება გვაქვს $\left||G|\right| \geq \left||F_v|\right| = \left||y|\right|_{\psi}^{o}$. შემდგომში G ფუნქციონალს ავღნიშნათ F_v სიმბოლოთი. თეორემა დამტკიცებულია.

თეორემა 3.3. ყოველი $x^* \in l^{\varphi}(\Gamma)^*$ ფუნქციონალი შეიძლება წარმოდგელი იქნეს ერთადერთი სახით $x^* = G + F_v$, სადაც F_v განსაზღვრული არის რაიმე $v \in l^{\psi}(\Gamma)$ ელემენტის საშუალებით, ხოლო G არის სიგულალური ფუნქციონალი, ე.ი.

$$G\left(h^{\varphi}(\Gamma)\right) = \{0\}.$$

დამტკიცება. იქედან გამომდინარე, რომ $x^*|_{h^{\varphi}(\Gamma)}$ არის ფუნქციონალი $h^{\varphi}(\Gamma)$ სივრცეზე, თეორემა 3.2 ძალით იარსებებს $v \in l_o^{\psi}(\Gamma)$ ელემენტი, რომელიც განსაზღვრავს $x^*|_{h^{\varphi}(\Gamma)}$ ფუნქციონალს. დავუშვათ F_v არის $x^*|_{h^{\varphi}(\Gamma)}$ ფუნქციონალის გაგრძელება $l^{\varphi}(\Gamma)$ სივრცეზე. განვსაზღვროთ G ფუნქციონალი შემდეგნაირად $G = x^* - F_v$. თუ $x \in h^{\varphi}(\Gamma)$, მაშინ

$$G(x) = x^*(x) - F_v(x) = x^*|_{h^{\varphi}(\Gamma)}(x) - x^*|_{h^{\varphi}(\Gamma)}(x) = 0.$$

დავუშვათ, რომ $x^* = F_z + H$, სადაც $z \in l^{\psi}(\Gamma)$ და $H\left(h^{\varphi}(\Gamma)\right) = \{0\}$. იქედან გამომდინარე, რომ $G + F_v = F_z + H$, $F_v - F_z = H - G$, ყოველი $x \in h^{\varphi}(\Gamma)$ სამართლიანია

$$(F_v - F_z)(x) = (H - G)(x) = H(x) - G(x) = 0$$

ე.ი. $F_v(x) = F_z(x)$ ყოველი $x \in h^{\varphi}(\Gamma)$ ელემენტისთვის, მაშასადამე $v = z$ და $G = H$. თეორემა დამტიცებულია.

ლემა 3.4. ვთქვათ $x \in l^{\varphi}(\Gamma)$ და $|\sum_{i\in\Gamma} x(i)| < \infty$. მაშინ ყოველი $\varepsilon > 0$ რიცხვისთვის არსებობს $I_\varepsilon \in \Sigma_1$ სიმრავლე ისეთი, რომ ყოველი $I \in \Sigma_1$ სამართლინია უტოლობა $\left|\sum_{i\in\Gamma\setminus I} x(i)\right| < \varepsilon$, სადაც $I_\varepsilon \subset I$.

დამტკიცება. იქედან გამომდინარე, რომ $|\sum_{i\in\Gamma} x(i)| < \infty$ სამართლიანია შემდეგი უტოლობები $\sum_{i\in\Gamma} x^+(i) < \infty$ და $\sum_{i\in\Gamma} x^-(i) < \infty$. დავუშვათ $\varepsilon > 0$, ავიღოთ $K \in \Sigma_1$ ისეთ, რომ $\sum_K x^+ > \sum_\Gamma x^+ - \frac{\varepsilon}{2}$. შეგვიძლია დავუშვათ, რომ თუ $i \in K$, მაშინ სამართლიანია $x^+(i) > 0$ უტოლობა. ანალოგიურად ავიღოთ $J \in \Sigma_1$ ისეთი, რომ $\sum_J x^- > \sum_\Gamma x^- - \frac{\varepsilon}{2}$ და $x^-(i) > 0$ $i \in J$ ელემეტისთვის.

განვსაზღვროთ $I_\varepsilon = K \cup J$. შევნიშნოთ, რომ $\sum_{I_\varepsilon} x^+ = \sum_K x^+$ და $\sum_{I_\varepsilon} x^- = \sum_J x^-$. ყოველი $I \in \Sigma_1$, $I_\varepsilon \subset I$ სამართლიანია

$$\left|\sum_{\Gamma\setminus I} x\right| \le \sum_{\Gamma\setminus I} x^+ + \sum_{\Gamma\setminus I} x^- \le \sum_{\Gamma\setminus I_\varepsilon} x^+ + \sum_{\Gamma\setminus I_\varepsilon} x^- = \left(\sum_\Gamma x^+ - \sum_{I_\varepsilon} x^+\right) + \left(\sum_\Gamma x^- - \sum_{I_\varepsilon} x^-\right)$$
$$= \left(\sum_\Gamma x^+ - \sum_K x^+\right) + \left(\sum_\Gamma x^- - \sum_J x^-\right) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}.$$

ლემა დამტკიცებულია.

თეორემა 3.5. ნებისმიერი $x^* = F_v + G \in l^{\varphi}(\Gamma)^*$ ფუნქციონლისთვის სამართლიანია შემდეგი ტოლობა

$$\left||x^*|\right| = \left||v|\right|_\psi^o + \left||G|\right|.$$

დამტკიცება. თავდაპირველად დავამტკიცებთ $\left||x^*|\right| \le \left||v|\right|_\psi^o + \left||G|\right|$ უტოლობის სამართლიანობას.

$$\left||x^*|\right| = \left||F_v + G|\right| \le \left||F_v|\right| + \left||G|\right| = \left||v|\right|_\psi^o + \left||G|\right|.$$

დაფიქსიროთ რაიმე $\varepsilon > 0$ რიცხვი და ავიღოთ $x_1, x_2 \in l^{\varphi}(\Gamma)$ ელემენტები ისეთი, რომ $\left||x_1|\right|_\varphi \le 1$, $\left||x_2|\right|_\varphi \le 1$ და $\left||v|\right|_\psi^o - \varepsilon = \left||F_v|\right| - \varepsilon < F_v(x_1)$, $\left||G|\right| - \varepsilon < G(x_2)$. იქედან გამომდინარე, რომ $\left||F_v : l^{\varphi}(\Gamma) \to \mathbb{R}|\right| = \left||F_v : h^{\varphi}(\Gamma) \to \mathbb{R}|\right|$, ზოგადობის შეუზღუდავად შეგვიძლია დავუშვათ,

რომ $x_1 \in h^{\varphi}(\Gamma)$ და შესაბამისად $supp(x_1) \in \Sigma_1$, ეს დაშვება სამრთლილიანია იმიტომ, რომ $h^{\varphi}(\Gamma)$ სივრცე არის

$$\{x \in l^{\varphi}(\Gamma) : supp(x) \in \Sigma_1\}$$

სიმრავლის ჩაკეტვა და $F_v : h^{\varphi}(\Gamma) \to \mathbb{R}$ არის უწყვეტი. იქედან გამომგინარე, რომ $|\sum_{\Gamma} vx_2| = |F_v(x_2)| < \infty$, ლემა 3.4 ძალით დავასკვნით, რომ $I_\varepsilon \in \Sigma_1$ სიმარავლე ისეთი, რომ $\forall\, I \in \Sigma_1, I_\varepsilon \subset I$ სამართლიანია შემდეგი უტოლობა $\left|\sum_{\Gamma\setminus I} vx_2\right| < \infty$. ავიღოთ $K \in \Sigma_1$ სიმრავლე ისეთი, რომ $supp(x_1) \subset K, I_\varepsilon \subset K$ და

$$\sum_{i \in K} \varphi\big(x_2(i)\big) > \sum_{i \in \Gamma} \varphi\big(x_2(i)\big) - \varepsilon.$$

x ელემენტი განვსაზღვროთ შემდეგნარად

$$x(i) = \begin{cases} x_1(i)\ i \in K, \\ x_2(i)\ i \in \Gamma\setminus K. \end{cases}$$

მაშინ სამართლიანია

$$I_\varphi(x) = \sum_{i \in K} \varphi\big(x_1(i)\big) + \sum_{i \in \Gamma} \varphi\big(x_2(i)\big) < I_\varphi(x_1) + \ \varepsilon \le 1 + \varepsilon.$$

მაშასადამე $I_\varphi\left(\frac{x}{1+\varepsilon}\right) \le \frac{1}{1+\varepsilon} I_\varphi(x) \le 1$ რაც ტოლფასია შემდეგი უტოლობის $\left|\left|\frac{x}{1+\varepsilon}\right|\right| \le 1$. ამგვარად $\big||x^*|\big| \ge x^*\left(\frac{x}{1+\varepsilon}\right)$. შედეგად გვაქვს

$$\begin{aligned}(1+\varepsilon)\big||x^*|\big| \ge x^*(x) &= x^*(x_1\chi_K) + x^*\big(x_2\chi_{\Gamma\setminus K}\big) = F_v(x_1\chi_K) + G(x_1\chi_K) + F_v\big(x_2\chi_{\Gamma\setminus K}\big) + G\big(x_2\chi_{\Gamma\setminus K}\big) \\ &= F_v(x_1) + 0 + F_v\big(x_2\chi_{\Gamma\setminus K}\big) + G(x_2\chi_\Gamma - x_2\chi_K) = F_v(x_1)\ + F_v\big(x_2\chi_{\Gamma\setminus K}\big) + G \\ &= \ F_v(x_1) + \sum_{i \in \Gamma\setminus K} v(i)x_2(i) + \ G(x_2) > \big||v|\big|_\psi^o - \varepsilon + (-\varepsilon) + \big||G|\big| - \varepsilon \\ &= \big||v|\big|_\psi^o + \big||G|\big| + 3\varepsilon.\end{aligned}$$

საბოლოოდ გვექნება უტოლობა $(1+\varepsilon)\big||x^*|\big| > \big||v|\big|_\psi^o + \big||G|\big| + 3\varepsilon$. $\varepsilon > 0$ რიცხვის ნებისმიერობის გამო მივიღებთ საჭირო ტოლობას. თეორემა დამტკიცებულია.

$h_o^{\varphi}(\Gamma)$ სივრცის შეუღლებული სივრცე

ლემა 4.1. ყოველი $x \in l^{\varphi}(\Gamma)$ ელემენტისთვის სამართლიანია შემდეგი ტოლობა

$$\left||x|\right|_{\varphi} = sup_{||y||_{\psi}^{o} \le 1} \sum_{\Gamma} xy = sup_{\substack{||y||_{\psi}^{o} \\ supp(y) \in \Sigma_1}} \sum_{\Gamma} xy.$$

დავამტკიცება. შევნიშნოთ, რომ

$$sup_{\substack{||y||_{\psi}^{o} \\ supp(y) \in \Sigma_1}} \sum_{\Gamma} xy \le sup_{||y||_{\psi}^{o} \le 1} \sum_{\Gamma} xy \le sup_{||y||_{\psi}^{o} \le 1} \left||x|\right|_{\varphi} \left||y|\right|_{\psi}^{o} \le \left||x|\right|_{\varphi}.$$

ტოლობის დასამტკიცებლად აუცილებელია ვაჩვენოთ შემდეგი უტოლობა

$$\left||x|\right|_{\varphi} \ge sup_{\substack{||y||_{\psi}^{o} \\ supp(y) \in \Sigma_1}} \sum\nolimits_{\Gamma} xy \ (2).$$

თუ დავუშვებთ, რომ (2) უტოლობა სამართლია იმ ელემენტისთვის რომელასაც სასრული საყრდენი გააჩნია, მაშინ ადვილად ვაჩვენებთ, რომ ანალოგიური უტოლობა სამართლიანია. მართლაც, დავუშვათ $x \in l^{\varphi}(\Gamma)$ და y და იყოს ისეთი, რომ $\left||y|\right|_{\psi}^{o} \le 1$ და $supp(y) \in \Sigma_1$. მაშასადამე ყოველი $I \in \Sigma_1$ სიმრავლისთვის სამართლიანია

$$\sum_{\Gamma} x^I y = \sum_{I} x^I y \le \sum_{I} x^I y + \sum_{i \in \Gamma \setminus I} x(i) y(i) sgn\big(x(i) y(i)\big) = \sum_{\Gamma} xz$$

სადაც

$$z(i) = \begin{cases} y(i) & i \in I \\ y(i) sgn\big(x(i) y(i)\big) & i \in \Gamma \setminus I, \end{cases}$$

იქედან გამომდინარე, რომ $\left||z|\right|_{\psi}^{o} \le \left||y|\right|_{\psi}^{o} \le 1$ და $supp(z) \subset supp(y) \in \Sigma_1$, გააქვს შემდეგი უტოლობა

$$\sum_{\Gamma} x^I y \le sup_{\substack{||y||_{\psi}^{o} \\ supp(y) \in \Sigma_1}} \sum_{\Gamma} xy.$$

ამრიგად

$$sup_{\substack{||y||_{\psi}^{o} \\ supp(y) \in \Sigma_1}} \sum_{\Gamma} x^I y \le sup_{\substack{||y||_{\psi}^{o} \\ supp(y) \in \Sigma_1}} \sum_{\Gamma} xy$$

ლემა 1.6 და უტოლობა (2) ძალით იმ ელემენტისთვის, რომლებსაც აქვს სასრული საყრდენი გვექნება:

$$\left||x|\right|_{\varphi} = sup_{I\in\Sigma_1}\left||x^I|\right|_{\varphi} \le sup_{I\in\Sigma_1} sup_{\substack{||y||_{\psi}^{o} \\ supp(y)\in\Sigma_1}} \sum_{\Gamma} x^I y \le sup_{\substack{||y||_{\psi}^{o} \\ supp(y)\in\Sigma_1}} \sum_{\Gamma} x^I y$$

საიდანაც მივიღებთ საჭირო უტოლობას.

შესამამისად, იმისთვის, რომ ვაჩვენოთ უტოლობა

$$\left||x|\right|_{\varphi} \le sup_{\substack{||y||_{\psi}^{o}\le 1 \\ supp(y)\in\Sigma_1}} \sum_{\Gamma} xy$$

შეგვიძლია ვიგულისხმოთ, რომ $supp(y) \in \Sigma_1$. ზოგადობის შეუზღუდავად დამატებით დავუშვათ, რომ $\left||x|\right|_{\varphi} = 1$. მაშინ $I_{\varphi}(x) \le 1$ და $\forall\, i \in \Gamma, \varphi\big(x(i)\big) \le 1$. ზემოთ მოყვანილი დაშვების ძალით გვექნება

$$x(i) \le b_{\varphi} := \sup\{u : \varphi(x) < \infty\}\ (\forall i \in \Gamma).$$

პირველად განვიხილოთ შემთხვევა როდესაც არსებობს $i_0 \in \Gamma$ ელემენტი ისეთი, რომ სამართლიანია ტოლობა $|x(i_0)| = b_{\varphi}$. განვსაზღვროთ z ელემენტი შემდეგნაირად

$$z = \frac{1}{b_{\varphi}} \chi_{\{i_0\}} sgn\big(x(i_0)\big)$$

გვექნება, რომ $supp(z) = \{i_0\}$ და

$$\left||z|\right|_{\psi}^{o} = sup_{I_{\varphi}(g)\le 1} \sum_{\Gamma} zg = sup_{I_{\varphi}(g)\le 1} \frac{1}{b_{\varphi}} g(i_0) \le \frac{1}{b_{\varphi}} b_{\varphi} = 1,$$

და

$$sup_{\substack{||y||_{\psi}^{o}\le 1 \\ supp(y)\in\Sigma_1}} \sum_{\Gamma} xy \ge \sum_{\Gamma} xz = x(i_0)\frac{1}{b_{\varphi}} sgn\big(x(i_0)\big) = \frac{1}{b_{\varphi}} b_{\varphi} = 1.$$

ახლა დავუშვათ, რომ $\forall\, i \in \Gamma$, $|x(i)| < b_{\varphi}$. იქედან გამომდინარე, რომ $supp(x) \in \Sigma_1$ არსებობს $\varepsilon_0 > 0$ რიცხვი ისეთი, რომ $\forall\, i \in \Gamma$, $(1+\varepsilon_0)|x(i)| < b_{\varphi}$. ავიღოთ ნებისმიერი $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ რიცხვი. მაშინ $\left||(1+\varepsilon)x|\right|_{\varphi} > 1$ და შესაბამისად $I_{\varphi}\big((1+\varepsilon)x\big) > 1$. განვსაზღვროთ

$$w(i)=\begin{cases}\varphi'\big((1+\varepsilon)x(i)\big)\ \ i\in supp(x)\\ \quad\quad 0\ \ i\notin supp(x),\end{cases}$$

სადაც φ' არის φ ფუნქციის მაცხენა წარმოებული და $\mathrm{z}=\frac{w}{I_{\psi}(w)+1}.z$ და w ელემენტები არიან კორექტულად განსაზღვრულები $supp(z)\ =\ supp(w)\subset supp(x)$ და $||z||_{\psi}^{o}\leq 1$. გვექნება,

$$||z||_{\psi}^{o}=sup_{I_{\varphi}(h)\leq 1}\sum_{\Gamma}zh=\frac{1}{I_{\psi}(w)+1}sup_{I_{\varphi}(h)\leq 1}\sum_{\Gamma}wh$$

$$\leq\frac{1}{I_{\psi}(w)+1}sup_{I_{\varphi}(h)\leq 1}\sum_{\Gamma}(I_{\psi}\,(w)+\ I_{\varphi}(h))\ \leq\ \frac{1}{I_{\psi}(w)+1}(I_{\psi}\,(w)+1)=1.$$

ამასთანავე სამათლიანია შემდეგი

$$sup_{\substack{||y||_{\psi}^{o}\leq 1\\ supp(y)\in\Sigma_1}}\sum_{\Gamma}xy\geq\sum_{\Gamma}xz\ \ =\frac{1}{I_{\psi}(w)+1}\sum_{\Gamma}xw\ \ =\frac{1}{(1+\varepsilon)}\frac{1}{I_{\psi}(w)+1}\sum_{\Gamma}(1+\varepsilon)xw$$

$$=\frac{1}{(1+\varepsilon)}\frac{1}{I_{\psi}(w)+1}\sum_{i\in supp(x)}(1+\varepsilon)x\varphi'\big((1+\varepsilon)x(i)\big)$$

$$=\frac{1}{(1+\varepsilon)}\frac{1}{I_{\psi}(w)+1}\sum_{i\in supp(x)}\Big(\varphi\big((1+\varepsilon)x(i)\big)+\psi\Big(\varphi'\big((1+\varepsilon)x(i)\big)\Big)\Big)$$

$$=\frac{1}{(1+\varepsilon)}\frac{1}{I_{\psi}(w)+1}\Big(I_{\varphi}\big((1+\varepsilon)x\big)+I_{\psi}(w)\Big)\ \ >\frac{1}{(1+\varepsilon)}\frac{1}{I_{\psi}(w)+1}I_{\psi}(w)+1$$

$$=\frac{1}{(1+\varepsilon)}$$

$\varepsilon>0$ რიცხვის ნებისმიერობიდან მივიღეთ დასამტკიცებელ თეორემას. თეორემა დამტიცებულია.

თეორემა 4.2. 1) ყოველი $y\in l^{\psi}(\Gamma)$ ელემეტისათვის, $F(x)=\sum_{\Gamma}xy$, $\forall\, x\in h_{o}^{\varphi}(\Gamma)$, განსაზღვრავს $F\in h_{o}^{\varphi}(\Gamma)^{*}$ ფუნქციონალს, როლის ნორმა გამოითვლება შემდეგი ფორმულით $||F||=||y||_{\varphi}$. 2) ნებისმიერი $G\in h_{o}^{\varphi}(\Gamma)^{*}$ ფუნქციონალი განისაზღვრება რაიმე $y\in l^{\psi}(\Gamma)$ ელემენტით.

დამტკიცება. დავუშვათ $y\in l^{\psi}(\Gamma)$. განვსაზღვროთ $F(x)=\sum_{\Gamma}xy$. ჰელდერის უტოლობის ძალით სამართლანია შემდეგი უტოლობა $|F(x)|\leq\ ||x||^{o}{}_{\varphi}||y||_{\psi}$, აქეან გამოდინარე F წრფივი

ფუნქციონალი არის კორექტულად განსაზღვრული $h_o^{\varphi}(\Gamma)$ სივრცეზე და $|F(x)| \leq ||y||_{\psi}$. ლემა 4.1 ძალით გამომდინარეობს საპირისპირო უტოლობა:

$$||F|| = sup_{\substack{||x||_{\varphi}^{o} \leq 1 \\ x \in h_o^{\varphi}(\Gamma)}} F(x) = sup_{\substack{||x||_{\varphi}^{o} \leq 1 \\ x \in h_o^{\varphi}(\Gamma)}} \sum_{\Gamma} xy \geq sup_{\substack{||x||_{\varphi}^{o} \leq 1 \\ supp(x) \in \Sigma_1}} \sum_{\Gamma} xy = ||y||_{\psi}.$$

ავიღოთ ნებისმიერი $G \in h_o^{\varphi}(\Gamma)^*$ ფუნქციონალი. იქედან გამომდინარე, რომ $|| \cdot ||_{\varphi}$ და $|| \cdot ||_{\varphi}^{o}$ არიან ექვივალენტური ნორმები, $h_o^{\varphi}(\Gamma)^*$ შეუღლებული სივრცე ექვივალენტურია $h^{\varphi}(\Gamma)^*$ შეუღვლებული სივრცის და შესაბამისად თეორემა 3.2 ძალით არსებობს $y \in l^{\psi}(\Gamma)$ ისეთი, რომ $G(x) = \sum_{\Gamma} xy$ ნებისმიერი $x \in h^{\varphi}(\Gamma)$ ელემენტისთვის. თეორემა დამტკიცებულია.

$\boldsymbol{l^{\varphi}(\Gamma)}$ სივრცის გლუვი წერტილები

განმარტება 5.1. შემდგომში X-ით აღნიშნულია რაიმე ბანახის სივრცეს, ხოლო X^*-ით მისი შეუღლებული, $S(X)$-ით და $S(X)^*$-ით ავღშნოთ შესაბამისად სივრცის ერთეულოვანი სფეროები. ვიტყვით, რომ $x^* \in S(X)^*$ წარმოადგენს $x \in S(X)$ ელემენტის *საყრდენ ფუნქციონალს* თუ სრულდება შემდეგი პირობები: $||x^*|| = 1$ და $x^*(x) = 1$. სიმბოლო $Grad(x)$ ავღინშნავთ სიმრავლეს რომელიც შეიცავს $x \in S(X)$ ელემენტის ყველა *საყრდენ ფუნქციონალს.* ნებისმიერ $x \neq 0$ წერტილისთვის, მაშინ განვსაზღვროთ $x^* \in Grad(x)$ თუ $||x^*|| = 1$ და $x^*(x) = ||x||$.

განმარტება 5.2. ვიტყვით, რომ $x \in S(X)$ არის გლუვი წერტილი თუ $Grad(x)$ არის ერთ ელემენტიანი სიმრავლე.

შემდგომში გამოვიყენებთ $d(x)$ ფუნქციას, რომელიც წარმოიდგინება შემდეგნაირად $d(x) \coloneqq inf_{y \in h^{\varphi}(\Gamma)} ||x - y||_{\varphi}$.

ლემა 5.3. თუ $G \in l^{\varphi}(\Gamma)^*$ არის სინგულარი ფუნქციონალი, მაშინ $|G(x)| \leq ||G|| d(x)$ ნებისმიერი $x \in l^{\varphi}(\Gamma)$ ელემენტისთვის.

დამტკიცება. ავიღოთ რაიმე $x \in l^{\varphi}(\Gamma)$ ელემენტი. ნებისმიერი $y \in h^{\varphi}(\Gamma)$ ელემენტისთვის. გვაქვს $|G(x)| = |G(x) - G(y)| \leq |G(x - y)| \leq ||G|| ||x - y||_{\varphi}$, შესაბამისად $|G(x)| \leq ||G|| inf_{y \in h^{\varphi}(\Gamma)} ||x - y||_{\varphi}$. ლემა დამტკიცებულია.

ლემა 5.4. დავუშვათ $x \in S\big(l^{\varphi}(\Gamma)\big)$. თუ $d(x) < 1$, მაშინ ნებისმიერი $x^* \in Grad(x)$ არის რეგულარული ფუნქცინალი (ე.ი. სინგულური ნაწილი x^* არის ნულის ტოლი).

დამტკიცება. დავუშვათ $x^* = F_v + G \in Grad(x)$. დავუშავათ საწინააღმდეგო, $||G|| > 0$.

მაშინ, ლემა 5.3 და თეორემა 3.5 ძალით მივიღებთ.

$$1 = x^*(x) = F_v(x) + G(x) \leq ||F_v|| ||x||_{\varphi} + ||G|| d(x) < ||F_v|| + ||G|| = ||x^*||,$$

მაშასადამე $||x^*|| > 1$, რაც არის წინააღმედეგობა. ლემა დამტკიცებულია.

ლემა 5.5. დავუშვათ $x \in l^{\varphi}(\Gamma)$, $||x||_{\varphi} = 1$ და $d(x) = 1$. მაშინ არსებობს $y, z \in l^{\varphi}(\Gamma)$ ისეთი, რომ $||y||_{\varphi} = ||z||_{\varphi} = 1, supp(y) \cap supp(z) = \emptyset$ და $x = y + z$.

დამტკიცება. დავუშვათ $x \in l^{\varphi}(\Gamma)$ ელემენტისათვის გვაქვს, რომ $||x||_{\varphi} = 1$ და $d(x) = 1$. იქედან გამომდინარე, რომ $d(x) = \theta(x)$ (თეორემა 2.10 ძალით), მაშინ

$$\inf\left\{\lambda > 0 : \exists\, I \in \Sigma_1 \sum_{i \in \Gamma \setminus I} \varphi\left(\frac{x(i)}{\lambda}\right) < \infty\right\} = 1$$

ამრიგად, ყოველი $0 < \lambda < 1$ რიცხვისთვის და ყოველი $I \in \Sigma_1$ სიმრავლისთვის, სამაღთლიანია შემდეგი ტოლობა

$$\sum_{i \in \Gamma \setminus I} \varphi\left(\frac{x(i)}{\lambda}\right) = \infty. \ (3)$$

ავიღოთ ნებისმიერი $(\lambda_n)_{n \in N}$ მიმდევრობა ისეთი, რომ $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < \cdots < 1$ და $\lambda_n \to 1$, *როცა* $n \to \infty$.

ჩვენ განვსაზღვრავთ ინდუქციით $(I_n)_{n \in N}$ სიმრავლეთა მიმდევრობას შემდეგი თვისებები: $I_n \in \Sigma_1, \forall\, n \in N, I_n \cap I_k = \emptyset$ *როცა* $n \neq k$ და

$$\sum_{i \in I_n} \varphi\left(\frac{x(i)}{\lambda_n}\right) > 1. \ (4)$$

იქედან გამომდიანრე, რომ $\sum_{i \in \Gamma} \varphi\left(\frac{x(i)}{\lambda_1}\right) = \infty$, არსებობს $I_1 \in \Sigma_1$ ისეთი, რომ $\sum_{i \in I_1} \varphi\left(\frac{x(i)}{\lambda_1}\right) > 1$. თქვათ ჩვენ უკვე განვსაზღვრეთ $I_k\ k = 1, \dots, n$ სიმრავლეები ზემოთ მოყვანილ თვისებებით.

განვსაზღვროთ I_{n+1}სიმრავლე. იქედან გამოამდიანრე, რომ $I_1 \cup\ I_2 \cup \dots \cup\ I_n \in \Sigma_1$, (3) ტოლობის ძალით გვაქვს

$$\sum_{i \in \Gamma \backslash (I_1 \cup\ I_2 \cup \dots \cup\ I_n)} \varphi\left(\frac{x(i)}{\lambda_{n+1}}\right) = \infty.$$

ამრიგად, არსებობს $I_{n+1} \subset \Gamma \backslash (I_1 \cup\ I_2 \cup \dots \cup\ I_n)$ სიმრავლე და $I_{n+1} \in \Sigma_1$ ისეთი, რომ

$$\sum_{i \in I_{n+1}} \varphi\left(\frac{x(i)}{\lambda_{n+1}}\right) > 1.$$

y და x ელემენტები განვსაზღვროთ შემდეგნაირად,

$$y = x\chi_{I_1 \cup I_3 \cup\ I_5 \cup I_7} + x\chi_{\Gamma \backslash I_1 \cup I_2 \cup I_3 \dots} \text{ და } z = x\chi_{I_2 \cup I_4 \cup I_6 \cup I_8 \cup \dots}$$

ცხადია რომ $x\ =\ y\ +\ z$ და $supp(y) \cap supp(z) = \emptyset$. უნდა ვაჩვენოთ რომ $\left||y|\right|_\varphi = \left||z|\right|_\varphi = 1$.

შევნიშნოთ, რომ $I_\varphi(y) \le I_\varphi(x) \le 1$ და $I_\varphi(z) \le I_\varphi(x) \le 1$. დავაფიქსიროთ, რაიმე $\lambda < 1$ რიცხვი. λ_n რიცხვების აგების წესის თანახმად იარსებებს λ_k ისეთი, რომ $\lambda_k > \lambda$. ზოგადობის შეუზღუდავად დავუშვათ, რომ k არის კენტი რიცხვი. (4) უტოლობის ძალიათ სამართლიანია

$$I_\varphi\left(\frac{y}{\lambda}\right) \ge I_\varphi\left(\frac{y}{\lambda_k}\right) \ge I_\varphi\left(\frac{1}{\lambda_k} x\chi_{I_k}\right) = \sum_{i \in I_k} \varphi\left(\frac{x(i)}{\lambda_k}\right) > 1$$

და

$$I_\varphi\left(\frac{z}{\lambda}\right) \ge I_\varphi\left(\frac{z}{\lambda_{k+1}}\right) \ge I_\varphi\left(\frac{1}{\lambda_{k+1}} x\chi_{I_{k+1}}\right) = \sum_{i \in I_{k+1}} \varphi\left(\frac{x(i)}{\lambda_{k+1}}\right) > 1$$

ამგვარად $\left||y|\right|_\varphi = \left||z|\right|_\varphi = 1$. ლემა დამტკიცებულია

ლემა 5.6. დავუშვათ $x \in l^\varphi(\Gamma)$, $\left||x|\right|_\varphi = 1$ და $card\{i \in \Gamma : |x(i)| = b_\varphi\} \ge 2$. მაშინ არსებობს $y, z \in l^\varphi(\Gamma)$ ისეთი, რომ $\left||y|\right|_\varphi = \left||z|\right|_\varphi = 1, supp(y)\ \cap\ supp(z)\ =\ \emptyset$ და $x\ =\ y\ +\ z$.

დამტკიცება. ზემოთ მოყვანილი ლემა შეგვიძლია დავამტკიცოდ ანალოგიურად როცა $\Gamma\ =\ N$.

იქედან გამომდინარე, რომ $\Gamma = N$, არსებობს $j,k \in \Gamma$ რიცხვები ისეთი, რომ $j \neq k$ და $|x(i)| = |x(k)| = b_{\varphi}$. y და x ელემენტები განვსაზღვროთ შემდეგნაირად $y = x\chi_{\{j\}}$ და$z = x\chi_{\Gamma\setminus\{j\}}$შესაბამისად. მაშინ $supp(y) \cap supp(z) = \emptyset$ და $x = y + z$. ლემის დასამტკიცებლად საკმარისია ვაჩვენოთ, რომ $||y||_{\varphi} = ||z||_{\varphi} = 1$. ნამდვილად $I_{\varphi}(y) \leq I_{\varphi}(x) \leq 1$ და $I_{\varphi}(z) \leq I_{\varphi}(x) \leq 1$ და ნებისმიერი $\lambda < 1$ რიცხვისთვის გვაქვს $I_{\varphi}(z) = I_{\varphi}(x) = \infty$. ლემა დამტკიცებულია.

თეორემა 5.7. $x \in S(l^{\varphi}(\Gamma))$ წერტილი არის გლუვი წერტილი მაშინ და მხოლოდ მაშინ თუ სრულდება პირობები:

1. $d(x) < 1$;
2. მაქსიმუმ არსებობსა რაუმეტეს ერთი $i \in \Gamma$ ელემეტი ისეთი, რომ $|x(i)| = b_{\varphi}$;
3. თუ $|x(i)| < b_{\varphi}$ ნებისმიერი $i \in \Gamma$ ელემენტისთვის, მაშინ ნებისმიერი $i \in \Gamma$ ელემენტისთვის, რომლისთვისაც $\varphi(|x(i)|) < 1$ სამათლიანია ტოლობა $\varphi'_{-}(|x(i)|) = \varphi'_{+}(|x(i)|)$;
4. თუ $|x(i_0)| = b_{\varphi}$ რაიმე $i_0 \in \Gamma$, მაშინ $I_{\varphi}(x) < 1$ ან $\varphi'_{-}(b_{\varphi}) = \infty$ $\varphi'_{+}(|x(i)|) = 0$ ნებისმიერი $i \neq i_0$ ელემენტისთვის.

თეორემა 5.8. თუ φ არის ორლიჩის ფუნქცია და ის არის გლუვი ნულ წერტილში, მაშინ $S(l^{\varphi}(\Gamma))$ ერთეულოვან ბირთვზე არსებობს გლუვი წერტილი. კერძოდ, $S(l^{\varphi}(\Gamma))$ ერთეულოვან ბირთვის გლუვი წერტილი განისაზღვრება შემდეგი პირობით

$$x = \sup\{u : \varphi(u) \leq 1\}\, \chi_{\{k\}},$$

სადაც k არის Γ სიმრავლის ნებისმიერი ელემენტი.

დამტკიცება. დავაფიქსიროთ $k \in \Gamma$ და შევნიშნოთ, რომ თეორემაში განსაზღვრული x ელემენტი ეკუთვნის $h^{\varphi}(\Gamma)$ სივრცეს ანუ თეორემის 5.7-ის პირველი პირობა დაკმაყოფილებულია. x ელემენტის განმარტებიდან, მივიღებთ, რომ თეორემა 5.7-ის მეორე პირობაც დაკმაყოფილებულია.

განვიხილოთ ორი შემთხვევა.

შემთხვევა 1: $\varphi(b_\varphi) > 1$. მაშინ $I_\varphi(x) = 1$ ანუ $||x||_\varphi = 1$. თუ $|x(i)| < \varphi^{-1}(1)$, მაშინ $i \neq k$ და შესაბამისად $x(i) = 0$. იმ დაშვებით, რომ φ არის გლუვი ნულ წერტილში, მივიღებთ, რომ 5.7 თეორემის 3 და 4 პირობები დაკმაყოფილებულია. ამიტომ x არის გლუვი წერტილი.

შემთხვევა 2: $\varphi(b_\varphi) \geq 1$. იქედან გამომდინარე, რომ $I_\varphi(x) \leq 1$ და $I_\varphi\left(\frac{x}{\lambda}\right) = \infty$ ნებიმიერი $\lambda < 1$ რიცხვისთვის, გვექნება $||x||_\varphi = 1$. შესაბამისად, სამართლიანია შემდეგი ტოლობები $x(k) = b_\varphi$ და $x(i) = 0$, როცა $i \neq k$. იქედან გამომდინარე, რომ φ არის გლუვი ნულ წერტილში, მაშინ $\varphi'_+(x(i)) = 0$. როცა $i \neq k$, ანუ, 5.7 თეორემის მე-3 და მე-4 პირობები დაკმაყოფილებულია და, შესაბამისად, x არის გლუვი წერტილი.

როდესაც Γ არის არათვლადი სიმრავლე და φ არის ორლიჩის ფუნქცია, რომელიც იღებს მხოლოდ სასრულ მნიშვნელობებს, მაშინ შეგვიძლია დავამტკიცოთ ზემოაღნიშნული თეორემის შებრუნებული თეორემა.

თეორემა 5.9. დავუშვათ Γ არის არათვლადი სიმრავლე და φ არის ორლიჩის ფუნქცია, რომელიც იღებს მხოლოდ სასრულ მნიშვნელობებს. თუ, $S(l^\varphi(\Gamma))$ ერთეულოვან ბირთვს აქვს გლუვი წერტილი, მაშინ φ არის გლუვი ნულ წერტილში.

დამტკიცება. დავუშვათ $x \in S(l^\varphi(\Gamma))$ იყოს გლუვი წერტილი. თუ, $a_\varphi > 0$, მაშინ φ ფუნქცია არის გლუვი ნულ წერტილში. დავუშვა, რომ $a_\varphi = 0$. მაშინ, $\exists\, j \in \Gamma, x(j) = 0$ (სინამდვილეში $x(i) = 0$ ყველა ინდექსისთვის A სიმრავლის გარეთ, რომელიც მაქსიმუმ არის თვლადი). მაშასადამე 5.7 თეორემის მესამე პირობით მივიღებთ, რომ φ არის გლუვი ნულ წერტილში.

მაგალითი 5.10. $l^1(\Gamma)$ სივრცეს $S(l^1(\Gamma))$ ერთეულოვან ბირთვს აქვს გლუვი წერტილები, მაშინ და მხოლოდ მაშინ, თუ Γ სიმრავლე თვლადია.

კერძოდ, თუ $\Gamma = N$, მაშინ გლუვი წერტილები არის ყველა ის $x \in S(l^1(N))$ რომლისთვისაც $supp(x) = N$. მაშინ, ასეთი მიმდევრობის *საყრდენ ფუნქციონალებს* ამ წერტილში იქნება $y \in l^1(N)^* = l^\infty(N)$ და ექნება შემდეგი სახე

$$y = (sgn(x_1), sgn(x_2), sgn(x_3), \dots),$$

ახლა დავუშვათ, რომ Γ არის არათვლადი სიმრავლე. ნებისმიერი $x \in S\left(l^1(\Gamma)\right)$ ელემენტისთვის არსებობს $i_0 \in \Gamma$ ისეთი, რომ $x(i_0) = 0$. შევნიშნოთ, რომ ნებისმიერი $\alpha \in [-1, 1]$ რიცხვისთვის, $y_\alpha \in l^1(\Gamma)^* = l^\infty(\Gamma)$ ელემენტი, განისაზღვრული შემდგი ფორმულით

$$y_\alpha(i) = \begin{cases} \alpha \; i = i_0 \\ sgn(x_i) \; i \neq i_0. \end{cases}$$

არის *საყრდენ ფუნქციონალი* ამ წერტილში. შესაბამისად, ერთეულოვანი $S\left(l^1(\Gamma)\right)$ ბირთვის თითოეულ წერტილში არსებობოს უსასრულოდ ბევრი *საყრდენ ფუნქციონალი*, ანუ არ არსებობს $x \in S(l^1(\Gamma))$ წერტილი რომელიც გლუვი არის.

$l^\varphi(\Gamma)$ სივრცე როგორც AM სივრცე

$(X, ||\cdot||)$ არის ქვესივრცე $L^0(\mu)$ სივრცის და $(X, ||\cdot||)$ ვიტყვით, რომ არის ბანახის ფუნქციური სივრცე, თუ ის არის ბანახის სივრცე და აკმაყოფილებს შემდეგ თვისებებს: თუ $x \in L^0(\mu)$, $y \in X$ და $|x(t)| \leq |y(t)|$ μ-თ.ყ. მაშინ $x \in X$ და $\left||x|\right| \leq \left||y|\right|$.

$X = (X, ||\cdot||)$ ბანახის ფუნქიური სივრცე არის AM –სივრცე, თუ

$$\|\max(x, y)\| = \max\left(\left||x|\right|, \left||y|\right|\right) \; \textit{ყოველი} \; 0 \leq x, y \in X$$

ბანახის ფუნქიური სივრცე არის AM –სივრცე მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა

$$\left||x + y|\right| = max\left(\left||x|\right|, \left||y|\right|\right) \; \textit{ყოველი} \; x, y \in X \; \textit{და} \; x \perp y$$

სადაც $x \perp y$ გულისხმობს რომ $\mu\left(supp(x) \cap supp(y)\right) = 0$

φ ორლიჩის ფუნქციისსთვის განვსაზღვროთ შემდეგი ორი თვისება:

$$u_0(\varphi) = \sup\{u \geq 0 : \; \varphi(u) = 0\} \; \textit{და} \; u_\infty(\varphi) = \sup\{u > 0 : \; \varphi(u) < \infty\}.$$

ორლიჩის ფუნქციის განსაზღვრებიდან გამომდინარეობს, რომ

$$u_0(\varphi) \leq u_\infty(\varphi), u_0(\varphi) < \infty \; \textit{და} \; u_\infty(\varphi) > 0$$

თეორემა 6.1. $\left(l^\varphi(\Gamma), ||\cdot||_\varphi\right)$ არის AM –სივრცე მაშინ და მხოლოდ მაშინ როცა:

$$u_0(\varphi) > 0, u_\infty(\varphi) < \infty \; \textit{და} \; u_0(\varphi) = u_\infty(\varphi).$$

დამტკიცება. დავუშვათ ზემოთ ჩამოთვლილი პირობები არ სრულდება ანუ ან $u_0(\varphi) = 0$, ან $u_0(\varphi) \neq u_\infty(\varphi)$. თუ $u_0(\varphi) = 0$, მაშინ $l^\varphi(\Gamma)$ ის მონოტონური შესაბამისასად ის არ შეიძლება

იყოს $AM-$ სივრცე, თუ $u_0(\varphi) \neq u_\infty(\varphi)$, მაშინ არსებობს $u > 0$ ისეთი, რომ $0 < \varphi(u) < \infty$. შეგვიძლია ვიპოვოთ $v \in [0, u]$ და ნატურალური რიცხვი n ისეთი, რომ $n\varphi(v) = 1$. განვსაღვროთ

$$x = (v, v, \dots\dots, v, 0, 0, \dots), y = (0, 0, \dots, v, v, \dots\dots, v, 0, 0, \dots).$$

გვაქვს $I_\varphi(x) = I_\varphi(y) = n\varphi(v) = 1$, აქედან გამომდინარე $\|x\|_\varphi = \|y\|_\varphi = 1$. უფრო მეტიც $I_\varphi(x+y) = 2n\varphi(v) = 2.$ ამრიგად $\|x+y\|_\varphi > 1 = \max\left(\|x\|_\varphi, \ \|y\|_\varphi\right)$, რაც გულისხმოს, რომ $\left(l^\varphi(\Gamma), \|\cdot\|_\varphi\right)$ არ არის AM $-$სივრცე.

დასკვნა

ნაშრომში განვიხილეთ $l^\varphi(\Gamma)$ ორლიჩის სივრცეები, სადაც φ არის ორლიჩის ფუნქცია, ხოლო Γ ნებისმიერი სიმრავლეა (არა აუცილებლად თვლადი). გამოკვლეულია ლუქსემბურგის, ორლიჩის და ამემიას ნორმებს შორის კავშირი. შევისწავლეთ ორლიჩის სივრცის შეუღლებული სივრცე, იოსიდა-ჰიუიტის ტიპის დაშლები, სინგულარული ფუნქციონალის წარმოდგენები. აგრეთვე ნაპოვნია პირობები, რომელის დროსაც $l^\varphi(\Gamma)$ სივრცე არის AM $-$სივრცე. სახელდობრ დამტკიცებულია შემდეგი თეორემა:

თეორემა. $\left(l^\varphi(\Gamma), \|\cdot\|_\varphi\right)$ არის AM $-$სივრცე მაშინ და მხოლოდ მაშინ როცა:

$$u_0(\varphi) > 0, u_\infty(\varphi) < \infty \text{ და } u_0(\varphi) = u_\infty(\varphi).$$

გამოყენებული ლიტერატურა

[1] H. Hudzik, L. Szymaszkiewicz, *Basic topological and geometric properties of orlicz spaces over an arbitrary set of atoms*, Journal for Analysis and its Applications, *27* (2008), 425–449.

[2] C. E. Finl, H. Hudzik, L. Maligranda, *Banach function lattices which are AM-spaces*, Arch. Math. 69 (1997), 234-242.

[3] Charalambos D. Aliprantis, Kim C. Border, *Infinite Dimensional Analysis*, Berlin 1999.

[4] Osvaldo Méndez, Jan Lang, *Analysis on Function Spaces of Musielak-Orlicz Type*, London 2019.